MENENTUKAN INVERS SUATU MATRIKS DENGAN MENGGUNAKAN METODE AUGMENTASI DAN REDUKSI

S. E. Wati[1*], M. Imran[2], A. Sirait[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*sofiaermawati@yahoo.com

ABSTRACT

We discuss a method to obtain an inverse of a nonsingular matrix, called Augmentation and Reduction Method. The total computational cost of this method to obtain an inverse of a matrix is the same as those of Gauss-Jordan method. However this method to be applied needs more storage than those of Gauss-Jordan method.

Keywords: *Gauss-Jordan elimination, matrix augmentation, matrix reduction.*

ABSTRAK

Skripsi ini membahas tentang bagaimana menentukan invers suatu matriks dengan menggunakan metode augmentasi dan reduksi. Secara *cost* komputasi metode ini mempunyai *cost* yang sama dengan metode eliminasi Gauss-Jordan. Akan tetapi penerapan metode ini memerlukan *storage* yang lebih banyak dari metode eliminasi Gauss-Jordan.

Kata kunci: *eliminasi Gauss-Jordan, matriks augmentasi, matriks reduksi.*

1. PENDAHULUAN

Matriks merupakan sebuah cabang dari ilmu Aljabar Linear, yang merupakan bahasan penting dalam matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang numerik, operasi riset dan statistika.

Dalam menyelesaikan masalah-masalah di luar matematika yang tersaji dalam bentuk matriks, sering diperlukan penentuan invers dari matriks tersebut agar masalah yang disajikan dapat ditentukan penyelesaiannya. Ada beberapa cara yang dikenal dalam menentukan invers suatu matriks antara lain metode *adjoint* [3], $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$, metode eliminasi Gauss-Jordan [6]

$$[A|I] \Longrightarrow [I|A^{-1}],$$

dan dekomposisisi LU [1]

$$A^{-1} = (LU)^{-1},$$

dimana L adalah matriks segitiga bawah dan U adalah matriks segitiga atas.

Pada makalah ini dibahas penentuan invers matriks dengan menggunakan metode augmentasi dan reduksi yang merupakan review sebagian dari artikel Theodore J. Sheskin [5], dengan judul "*Matrix Inversion by Augmentation and Reduction,*" yang dasar pemikirannya bermula dari bentuk komplemen *Schur* [2].

2. INVERS MATRIKS DENGAN MENGGUNAKAN METODE AUGMENTASI DAN REDUKSI

Asumsikan $A = [a_{ij}]$, matriks berorde r yang akan diinverskan. Bentuk sebuah matriks *augmented* B berorde $2r$ dengan mengadjoinkan ke A sebuah matriks identitas positif, sebuah matriks identitas negatif dan sebuah matriks nol, yang mana seluruhnya berorde r. Susun matriks *augmented*-nya kebentuk

$$B = \begin{bmatrix} A & I_r \\ -I_r & O_r \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan proses reduksi pertama lakukan inisialisasi $n = 2r$, dan kemudian dilanjutkan dengan memisalkan $B_n = B = [b_{ij}]$. Kedua untuk menghindari pembagian dengan nol dan untuk mengurangi error pembulatan, dapat dilakukan *partial pivoting*, yaitu dengan membandingkan elemen b_{11} dengan elemen $n - r$ pertama pada kolom 1, kemudian pilih nilai mutlak terbesar dari elemen-elemen ini, dan lakukan pergantian pada baris-baris yang sesuai. Ketiga partisi B_n seperti berikut

$$B_n = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{A_n}^{1} & \overbrace{R_n}^{n-1} \\ \hline U_n & T_n \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\quad 1 \\ \}\quad n-1 \end{array},$$

dimana

$$\begin{aligned} A_n &= \text{elemen tunggal} \quad b_{11}, \\ R_n &= \text{vektor baris} \quad 1 \times (n-1), \\ U_n &= \text{vektor kolom} \quad (n-1) \times 1, \\ T_n &= \text{matriks} \quad (n-1) \times (n-1). \end{aligned}$$

Kemudian nyatakan

$$B_{n-1} = T_n - U_n A_n^{-1} R_n. \tag{2}$$

Keempat turunkan nilai n dengan 1 dan ulangi proses yang sama sehingga proses reduksi berakhir ketika $n = r$, sehingga diperoleh $A^{-1} = B_r$.

Untuk melihat proses metode yang didiskusikan, pandanglah matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

yang akan ditentukan inversnya. Maka dari tahapan yang didiskusikan di atas diperoleh

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Langkah 1

$$B_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_4 & R_4 \\ U_4 & T_4 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = T_4 - U_4 A_4^{-1} R_4.$$

Langkah 2

$$B_3 = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}} & \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 1 \\ \hline \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_3 & R_3 \\ U_3 & T_3 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = T_3 - U_3 A_3^{-1} R_3$$

atau

$$B_2 = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Perhatikan bahwa untuk sebuah matriks A berukuran 2×2, diperlukan dua kali pengulangan dari matriks reduksi untuk menghasilkan komplemen *Schur* $B_2 = A^{-1}$. Maka untuk sebuah matriks A berukuran $r \times r$, diperlukan r pengulangan dari matriks reduksi menghasilkan komplemen *Schur* $B_r = A^{-1}$.

3. *COST* KOMPUTASI PADA ALGORITMA

Pada bagian ini ditunjukkan bahwa matriks augmentasi dan reduksi ekivalen dengan eliminasi Gauss-Jordan dalam *cost* komputasi. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

untuk menentukan invers (3) dengan eliminasi Gauss-Jordan perlu membentuk matriks *augmented*

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]. \tag{4}$$

Pada langkah pertama dilakukan OBE sehingga kolom pertama hanya mempunyai angka satu pada baris pertama dan nol pada baris lainnya. Dari (4) bentuk matriks *augmented* menjadi

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & a_{1,n+1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]. \tag{5}$$

Elemen-elemen pada (5) diperoleh dengan perhitungan

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(2)} &= \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad \text{untuk} \quad j = 2, \ldots, n \\ a_{1,n+1}^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}} \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(2)} \quad \text{untuk} \quad i, j = 2, \ldots, n \\ a_{i,n+1}^{(2)} &= -a_{i1}a_{1,n+1}^{(2)} \quad \text{untuk} \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Jadi untuk melakukan langkah pertama (5) diperlukan $n(n-1)$ perkalian, n pembagian, dan $(n-1)^2$ pengurangan. Karena ada sebanyak n langkah maka *cost* komputasinya menjadi $2n^3 - 2n^2 + n$. Jika hanya perkalian dan pembagian yang dihitung, maka diperlukan *cost* komputasi sebanyak n^3.

Untuk menginverskan (3) dengan menggunakan matriks augmentasi dan reduksi, bentuk matriks *augmented* seperti berikut

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A & I \\ -I & 0 \end{array}\right].$$

Langkah 1: Jadi

$$B_{2n} = \left[\begin{array}{c|ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A_{2n} & R_{2n} \\ U_{2n} & T_{2n} \end{array}\right]$$

Dengan menggunakan formula (2) didapat

$$B_{2n-1} = T_{2n} - U_{2n} A_{2n}^{-1} R_{2n}.$$

atau

$$
B_{2n-1} = \begin{bmatrix}
a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2(n+1)}^{(2)} & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n(n+1)}^{(2)} & 0 & \cdots & 1 \\
a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & a_{1(n+1)}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}. \tag{6}
$$

Elemen-elemen pada (6) diperoleh dengan perhitungan

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{(2)} &= \frac{a_{ij} - a_{i,j-1}a_{i-1,j}}{a_{11}} \quad \text{untuk} \quad i, j = 2, \ldots, n \\
a_{i(n+1)}^{(2)} &= \frac{-a_{i1}}{a_{11}} \quad \text{untuk} \quad i = 2, \ldots, n \\
a_{1j}^{(2)} &= \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad \text{untuk} \quad j = 2, \ldots, n \\
a_{1(n+1)}^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}}.
\end{aligned}
$$

Untuk melakukan langkah pertama (6) dari matriks augmentasi dan reduksi diperlukan $(n-1)^2$ perkalian, n^2 pembagian, dan $(n-1)^2$ pengurangan. Karena ada sebanyak n langkah maka *cost* komputasinya menjadi $3n^3 - 4n^2 + 2n$. Jika hanya perkalian dan pembagian yang dihitung, maka diperlukan *cost* komputasi sebanyak n^3. Jadi jika hanya perkalian dan pembagian yang diperhatikan *cost* komputasi yang diperoleh sama dengan *cost* komputasi eliminasi Gauss-Jordan.

Contoh:
Diketahui matriks [4]

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dengan} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Tentukan invers dari matriks A dengan menggunakan metode augmentasi dan reduksi.

Solusi:
Dari soal diketahui A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

dan dengan mengikuti bentuk B pada persamaan (1), didapat

$$B = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & O \end{bmatrix}.$$

Kemudian dengan mengikuti prosedur pada Bagian 2 secara berulang diperoleh
Langkah 1

$$B_6 = \left[\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_6 & R_6 \\ U_6 & T_6 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = T_6 - U_6 A_6^{-1} R_6.$$

Langkah 2

$$B_5 = \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B_4 = T_5 - U_5 A_5^{-1} R_5.$$

Langkah 3

$$B_4 = \left[\begin{array}{r|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$B_3 = T_4 - U_4 A_4^{-1} R_4$$

atau

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi invers dari matriks A yang berukuran 3×3, diperoleh sesudah langkah ketiga.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Allaire, G., & S. M. Kaber. 2008. *Numerical Linear Algebra.* Springer, New York.

[2] Carlson, D. 1986. What are Schur Complements, Anyway ?. *Linear Algebra And Its Applications* **74**: 257-275.

[3] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra.* W. H. Freeman And Company, New York.

[4] Meyer, C. D. 2000. *Matrix Analysis And Applied Linear Algebra.* SIAM, Philadelpia.

[5] Sheskin, T. J. 1991. Matrix Inversion by Augmentation and Reduction. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **22**(1): 103-110.

[6] Strang, G. 1993. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, U.S.A.