PEMBENTUKAN DIAGRAM SEMIGRUP

Siska Maya Sari[1*], Sri Gemawati[2], Rolan Pane[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293 Indonesia

[*]siskamayasari@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper, we discuss the properties of the semigroups diagram formed by a semigroup presentation. The discussion begins by giving an illustration of the semigroup diagram from a semigroup presentation $P = \left[a, b \middle| ab = ba\right]$. Then, a diagram, an atomic picture and a graph are formed by defining union operation on the diagram and addition operation on the graph. All the properties of the semigroups diagram are stated in the form of theorems, as a review of the semigroup diagram section in *Diagram groups* written by Guba, V and Sapir, M (1996).

Keywords: *word, semigrup, semigrup presentations, graph.*

ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas sifat-sifat diagram semigrup yang terbentuk dari suatu presentasi semigrup. Pembahasan dimulai dengan memberikan ilustrasi diagram semigrup dari suatu presentasi semigrup $P = \left[a, b \middle| ab = ba\right]$.Kemudian dibentuk suatu diagram, gambar atom dan graf dengan mendefinisikan operasi gabungan pada diagram dan operasi penjumlahan pada graf.Semua sifat-sifat diagram semigrup dinyatakan dalam bentuk teorema, yang merupakan review dari pokok bahasan diagram semigrup pada Guba,V dan Sapir,M. (1996) *Diagram groups.*

Kata Kunci: *word, semigrup, presentasi semigrup, graf.*

1. PENDAHULUAN

Gagasan fundamental dari himpunan, pemetaan, operasi biner, dan relasi biner sangat diperlukan untuk mempelajari struktur aljabar.Suatu struktur aljabar (*structure of algebra*) adalah himpunan tak kosong dimana terdapat sedikitnya satu relasi ekuivalensi dan satu atau lebih operasi biner dapat didefinisikan di dalamnya.Salah satu kasus struktur aljabar adalah semigrup.

Semigrup adalah suatu struktur aljabar dengan operasi biner yang bersifat asosiatif.Operasi biner pada semigrup

sering dinotasikan dengan

, yang memetakan tiap pasangan berurutan ke suatu elemen □,□□□

.Misalkan X adalah himpunan kosong yang elemen-elemennya disebut huruf, *word* W adalah barisan huruf-huruf yang berhingga dari X. Selanjutnya di definisikan presentasi semigrup P sebagai pasangan $[X, \Re]$, dengan $\Re$ adalah relasi dari *word-word*. Pada operasi permulaan *word*, dua atau beberapa *word* bisa dikatakan ekivalen terhadap presentasi semigrup.

Dalam karya tulis ini akan diperkenalkan sifat-sifat diagram semigrup membentuk sebuah diagram, gambar atom dan graf, yang di ambil dari buku berjudul "*Diagram Groups*" karangan Guba,V dan Sapir, M pada pokok bahasan Diagram Semigrup (*Semigroup Diagram*).

2. SEMIGRUP DAN GRAF

Konsep-konsep yang dibahas dalam karya tulis ini merupakan materi-materi pendukung yang di ambil dari beberapa referensi yaitu [1] [2] [3] [4].

Definisi 1 (*word*): Misalkan X himpunan tak kosong dan $X \cap X^{-1} = \phi$ dengan bijeksi $X \to X^{1}$. Maka huruf pada X adalah anggota dari $X \cup X^{-1}$ dan *word* W dalam X merupakan suatu pernyataan

$$W = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_i^{\varepsilon_i} \cdots x_n^{\varepsilon_n},$$

Definisi 2 (Perkalian *word*): Misalkan

$$U = u_1^{\varepsilon_1} u_2^{\varepsilon_2} \cdots u_n^{\varepsilon_n} \text{ dan } V = v_1^{\partial_1} v_2^{\partial_2} \cdots v_n^{\partial_n},$$

Dua *word* dalam himpunan X. Hasil kali U dan V didefinisikan sebagai:

$$UV = u_1^{\varepsilon_1} u_2^{\varepsilon_2} \cdots u_n^{\varepsilon_n} v_1^{\partial_1} v_2^{\partial_2} \cdots v_n^{\partial_n}.$$

Dengan $(UV)W = U(VW)$ dan $U1 = U = 1U$ untuk sebarang U, V dan W. Jika $W = u_1, u_2, u_3$, (u_1, u_2, u_3 *word* dalam W) maka u disebut *subword* dari W.

Definisi 3 (Semigrup): Suatu himpunan tak kosong S dikatakan Semigrup terhadap operasi $*$ yang dinotasikan dengan $(S,*)$ jika memenuhi:

a. Sifat tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in S$ maka $x * y \in S$.
b. Sifat asosiatif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Definisi 4 (Presentasi semigrup): Presentasi Semigrup P adalah pasangan $[X, \Re]$ dengan X suatu himpunan yang elemen-elemennya huruf, sedangkan himpunan $\Re$ dinamakan himpunan relasi. Setiap $R \in \Re$ adalah pasangan (R_{+1}, R_{-1}) dengan $R_{+1} \equiv R_{-1}$ merupakan *word* positif dalam X biasanya ditulis $R_{+1} = R_{-1}$.

Definisi 5 (Subword): Misalkan $P = [X, \Re]$ presentasi semigrup dan W *word* positif dalam X. Definisikan operasi permulaan bagi *word* W, apabila W merupakan *subword* dari R_ε dengan $\varepsilon = \pm 1, R_{+1} = R_{-1} \in R$, maka ganti R_ε dengan $R_{-\varepsilon}$.

Definisi 6 (Ekuivalen Word): Dua *word* U dan V dalam X disebut ekivalen (relative terhadap presentasi semigrup P) jika terdapat suatu barisan hingga *word*

$$U \equiv U_0, U_1, \cdots, U_m \equiv V,$$

sehingga mengahasilkan V dari U yang dinyatakan dengan $U =_P V$.

Definisi 7 (Graf): Graf G adalah sebuah himpunan yang memiliki verteks (V) dan sisi (E), ditulis dengan $G(V, E)$.

Definisi 8 (Sisi Graf): Misalkan $e = \{u, v\}$ adalah sebuah sisi dalam G, yaitu u dan v adalah titik-titik ujung dari e. Maka verteks u dikatakan adjacent (berelasi) terhadap verteks v dan sisi e dikatakan incident (terhubung) pada u dan pada v.

Selanjutnya akan diberikan definisi subgraf, sebelumnya diberikan notasi yang akan digunakan. Dimana $V(H)$ adalah himpunan verteks-verteks dari graf $G, E(H)$ adalah himpunan sisi-sisi dari graf H. Sedangkan $H(V, E)$ adalah himpunan verteks dan sisi dari graf H dan $G(V, E)$ adalah himpunan verteks dan sisi dari graf G.

Definisi 9 (Subgraf): Misalkan G adalah sebuah graf maka H adalah subgraf dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$, yaitu jika verteks-verteks dari H juga verteks-verteks dari G, dan $E(H) \subseteq E(G)$, yaitu jika sisi-sisi dari H juga sisi-sisi dari G. Dengan kata lain, $H(V', E')$ adalah sebuah subgraf dari $G(V, E)$ jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

Definisi 10(Graf berarah): Sebuah graf G dikatakan graf berarah adalah jika graf tersebut memiliki verteks terurut.

Definisi 11(Graf tak berarah): Sebuah graf G dikatakan graf berarah adalah jika graf tersebut memiliki verteks tak terurut.

Definisi 12(Relasi Graf): Misalkan G adalah sebuah graf berarah. Sebuah sisi berarah $e = [u, v]$ dikatakan mulai pada titik awal u dan berakhir dititik akhir v, dan u dan v dikatakan berelasi.

Definisi 13(Lintasan): Misalkan v_0 dan v_n adalah verteks-verteks dalam sebuah graf. Sebuah lintasan dari v_0 ke v_n dengan panjang n adalah sebuah barisan berselang-seling dari $n+1$ verteks dan n sisi yang berawal dengan verteks v_0 dan berakhir dengan verteks v_n,

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, e_n, v_n),$$

dengan sisi e_1 insiden pada verteks v_{i-1} dan v_i untuk $i-1,...,n$.

Definisi 14(Orientasi Graf): Sebuah graf berorientasi berlabel adalah graf orientasi yang dilengkapi dengan sebuah label fungsi φ yang memetakan sisi positif ke E dan sisi negatif ke $E^{-1} = \{s^{-1} | s \in E\}$ dari E. Selalu di asumsikan bahwa $\varphi(e^{-1}) = \varphi(e)^{-1} \in E^{-1}$ untuk setiap sisi positif e.

3. PEMBENTUKAN DIAGRAM SEMIGRUP

Misalkan $P = [a, b | ab = ba]$ adalah suatu presentasi semigrup dan diperoleh uraian sebagai berikut:

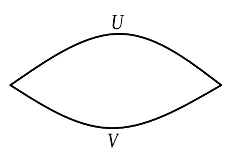
$$aabb \equiv a \cdot ab \cdot b \to a \cdot ba \cdot b \equiv ab \cdot ab \to ba \cdot ab \to ba \cdot ba \equiv baba$$

secara umum setelah dilakukan relasi diperoleh uraian:

$$U = W_0, W_1, ..., W_n = V$$

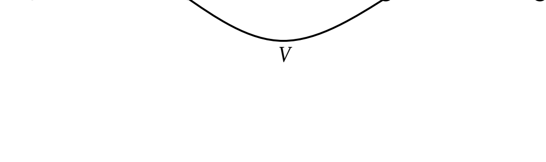
Misalkan suatu diagram dinotasikan dengan Δ ,dimana Δ mempunyai dua lintasan. Lintasan atas $(top(\Delta))$ dinotasikan dengan $\iota(\Delta)$ dan lintasan bawah $(bot(\Delta))$dinotasikan dengan $\tau(\Delta)$. Misalkan himpunan diagram hingga dari diagram-diagram Δ. Selanjutnya dapat didefinisikan operasi gabungan pada Δ, dimana $\Delta_1, \Delta_2 \in \Box$ dengan $\Delta_1 \circ \Delta_2$ adalah Δ_1 yang diikuti Δ_2 jika $\iota(\Delta_1) = \tau(\Delta_2)$ maka $\Delta_1 \circ \Delta_2$ terdefinisi.

Definisi 15: Misalkan $[X | \Re]$ sebuah presentasi semigrup, U dan V adalah dua word dalam X dengan relasi $R_\varepsilon = R_{-\varepsilon}$, maka didefinisikan diagram semigrup adalah diagram (U, V). Dapat dilihat pada Gambar 1:



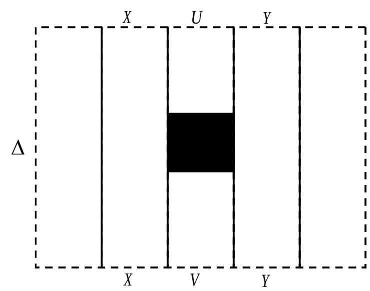
Gambar 1: Diagram (U, V)

Gambar 1 adalah diagram (U, V) dengan relasi $R_\varepsilon = R_{-\varepsilon}$ pada suatu presentasi semigrup.Selanjutnya misalkan relasi $R_\varepsilon = R_{-\varepsilon}$ dan $(X, R_\varepsilon \to R_{-\varepsilon}, Y)$ dari suatu *word*, maka dapat dibentuk suatu diagram dengan mengambil $U = V$ adalah sel yang berelasi. Lintasan atas dilambangkan dengan $top(\Delta)$ dan lintasan bawah dilambangkan dengan $bot(\Delta)$, seperti pada Gambar 2:



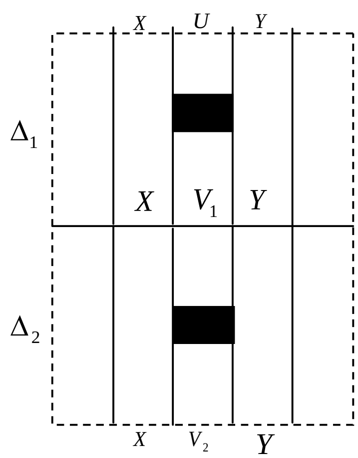
Gambar 2: Diagram Atom (XUY, XVY)

Kemudian diagram pada Gambar 2 dapat dilukiskan sebuah Gambar atom $(X, U \rightarrow V, Y)$. Suatu sel yang berelasi pada diagram sama dengan satu atom pada Gambar atom, dimana atom yang berelasi dihitamkan seperti Gambar 3:



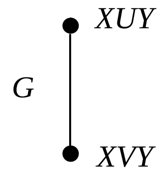
Gambar 3: Gambar Atom (XUY, XVY).

Sama seperti pada diagram didefinisikan juga operasi pada gambar atom. Misalkan Δ_1 dan Δ_2 adalah dua buah gambar atom, maka $\Delta_1 \circ \Delta_2$ terdefinisi jika $top(\Delta_2) = bot(\Delta_1)$. Selanjutnya, misalkan Δ adalah sebuah diagram dan □ adalah himpunan dari semua diagram Δ, maka dapat didefinisikan operasi gabungan pada □ sehingga diproleh $top(\Delta) = bot(\Delta) = \Delta$, dimana $top(\Delta) = XUY$ lintasan atas dan $bot(\Delta) = XVY$ adalah lintasan bawah pada Δ. Dapat dilihat pada Gambar 4:



Gambar 4: Gambar atom $\Delta_1 \circ \Delta_2$.

Selanjutnya dari gambar atom dapat dilukiskan menjadi graf. Lintasan atas $(top(\Delta))$ pada diagram adalah verteks awal $(\iota(G))$ pada graf dan lintasan bawah $(bot(\Delta))$ pada diagramadalah verteks akhir $(\tau(G))$ pada graf. Pada Gambar 3 dapat dibentuk suatu graf dengan Δ pada diagram disimbolkan G pada graf seperti pada Gambar 5:



Gambar 5: Graf G

Di dalam sifat-sifat Diagram semigrup pada buku Guba,V dan Sapir, M [3] akan dibentuk graf semigrup. Sifat-sifat diagram semigrup yang diberikan disini dinyatakan dalam bentuk diagram dan graf. Seperti halnya diagram, misalkan G suatu graf dan $\hat{G}$ adalah himpunan dari graf G. Dapat didefinisikan G pada operasi penjumlahan, sehingga diperoleh $\tau(G_1) = \iota(G_2)$. Jadi $\hat{G} = G_1 + G_2$.

Teorema 1 [3,h.18] Misalkan $P = [X \mid \Re]$ suatu presentasi semigrup, maka dua *word* U dan V dalam X adalah sama atas P jika terdapat diagram (U,V) atas P.

Bukti.

Misalkan U dan V dua word dalam X atas P, berarti berdasarkan definisi 3.2.1 dapat diperoleh diagram (U,V). Yaitu terdapat diagram $\Delta_1, \Delta_2 ... \Delta_n$ sehingga:

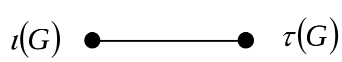
$$U = \Delta_1, \Delta_2 ... \Delta_n = V .$$

Berdasarkan definisi 2.4 maka U dan V dalam X adalah sama atas P. ■

Teorema 2 [3,h.18]a). setiap verteks V pada graf $\hat{G}$ terdapat sisi dari $\iota(\hat{G})$ ke $\tau(\hat{G})$ melewati V. b). Setiap graf $\hat{G}$memiliki verteks awal $\iota(\hat{G})$ dan verteks akhir $\tau(\hat{G})$.

Bukti.

a. Ambil sebarang verteks V pada graf $\hat{G}$, misalkan $V = \iota(\hat{G})$ atau $V = \tau(\hat{G})$. Jika $V = \iota(\hat{G})$, sehingga dapat dibuat sisi $\iota(\hat{G})$ ke $\tau(\hat{G})$ melewati V. Dengan cara yang sama, jika $V = \tau(\hat{G})$, maka dapat dibuat $V = \iota(\hat{G})$, sehingga setiap verteks V pada graf $\hat{G}$ terdapat sisi dari $\iota(\hat{G})$ ke $\tau(\hat{G})$ melewati V.
b. Ambil sebarang graf $\hat{G}$, karena graf $\hat{G}$ dibentuk dari diagram atom yang mempunyai lintasan atas $(top(\Delta))$ dan lintasan bawah $(bot(\Delta))$. Maka graf $\hat{G}$ juga mempunyai verteks awal dan verteks akhir yang dilambangkan dengan $\iota(\hat{G})$ dan $\tau(\hat{G})$ seperti Gambar 6 berikut:



Gambar 6: Graf G ■

Teorema3 [3,h.18] Setiap sisi pada graf $\hat{G}$ dari $\iota(\hat{G})$ ke $\tau(\hat{G})$ membagi $\hat{G}$ menjadi dua graf G_1 dan G_2 sehingga $\tau(G_1) = \iota(G_2)$ dalam P dan $\hat{G} = G_1 \circ G_2$.

Bukti.

Misalkan $\hat{G}$ suatu graf, jika $\hat{G}$ hanya mempunyai satu sisi e_1, maka $\hat{G}$ hanya memuat satu graf G_1, sehingga e_1 adalah sisi dari $\iota(G_1)$ ke $\tau(G_1)$. Sebaliknya jika $\hat{G}$

mempunyai sisi e_2 maka Ĝ hanya memuat satu graf G_2, sehingga e_2 adalah sisi dari $\iota(G_2)$ ke $\tau(G_2)$. Jadi dengan $\iota(G_1) = \tau(G_2)$ dan $\tau(G_2) = \iota(G_1)$, Ĝ membagi dua graf G_1 dan G_2, sehingga $\hat{G} = G_1 \circ G_2$.

■

Selanjutnya setelah diberikan uraian graf dari diagram, untuk lebih memahami diagram, gambar atom, dan graf akan diberikan beberapa teorema secara umum.

Teorema 4 [3,h.19] Graf semigrup Ĝ tertutup terhadap operasi gabungan.

Bukti.

Ambil sebarang graf G_1 dan G_2 pada Ĝ, dengan $\tau(G_1) = \iota(G_2)$. Sehingga pada G_1 terdapat $\{\iota(G_1), e_1, \tau(G_1)\}$ dan pada G_2 terdapat $\{\iota(G_2), e_2, \tau(G_2)\}$.

Maka, diperoleh $G_3 = G_1 \circ G_2$ dan G_3 berada pada Ĝ, jadi kelas dari graf semigrup Ĝ tertutup terhadap operasi gabungan. ■

Teorema 5 [3,h.19] a). Misalkan $P = [X | \Re]$ sebuah presentasi semigrup. Maka untuk setiap diagram Δ atas P dan setiap *word* $X, Y \in A^+$ pada graf (X, G, Y) adalah sebuah diagram.b). Jika $G \in \hat{G}$ dan (X, G, Y) adalah diagram semigrup untuk suatu *word* X dan Y maka G adalah sebuah diagram semigrup.

Bukti.

a. Jika Δ adalah gabungan dari diagram $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, maka $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n$.
   Sehingga pada garaf :
   $$G = (\iota(G_1), G_1, \tau(G_1)) + (\iota(G_2), G_2, \tau(G_2)) + ... + (\iota(G_n), G_n, \tau(G_n)).$$
   Jadi G juga sebuah diagram.
b. Misalkan Ĝ adalah gabungan dari graf $G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_n$ maka $X, \hat{G}, Y$ adalah sama dengan gabungan dari graf:
   $$(X, G_1, Y) \circ (X, G_2, Y) \circ \cdots \circ (X, G_n, Y).$$
   Sehingga graf G adalah sebuah diagram semigrup. ■

Selanjutnya diagram semgrup boleh dinyatakan dalam diagram, gambar atom, dan graf. Sehingga untuk menyatakan sebagai diagram, gambar atom, dan graf digunakan notasi yang sama seperti pada diagram.

Teorema 6 [3,h.19] Kelas dari diagram tertutup dibawah penjumlahan

Bukti.

Jika Δ_1 adalah diagram (s, t) dan Δ_2 adalah diagram (u, v) maka diagram Δ_1 memuat (s, Δ_1, t) dan diagram Δ_2 memuat (u, Δ_2, v), sehingga:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = (\Delta_1 + (u)) \circ ((t) + \Delta_2).$$ ■

Selanjutnya misalkan Δ sebuah diagram dan p dan q lintasan dengan titik ι dan τ sama. Dengan Teorema 2 terdapat lintasan s dan t mnghubungkan titik awal dan titik akhir Δ dengan ι dan τ. Dengan Teorema 3 lintasan spt membagi Δ manjadi gabungan dua diagram $\Delta_1 \circ \Delta_2$. Sehingga q lintasan bawah dan p lintasan atas. Lintasan sqt membagi Δ_2 menjadi gabungan dari dua diagram $\Delta_3 \circ \Delta_4$,maka $\Delta_3 \equiv X, \Delta', Y$ dimana $X = \varphi(s), Y = \varphi(t)$ dan Δ' subgraf dari Δ terletak antara p dan q. Kemudian dengan Teorema 5 b) Jika Δ' adalah sebuah diagram, maka setiap diagram Δ' yang dibentuk dengan cara ini disebut sub diagram dari Δ terletak antara p dan q, seperti pada Teorema 7 berikut ini.

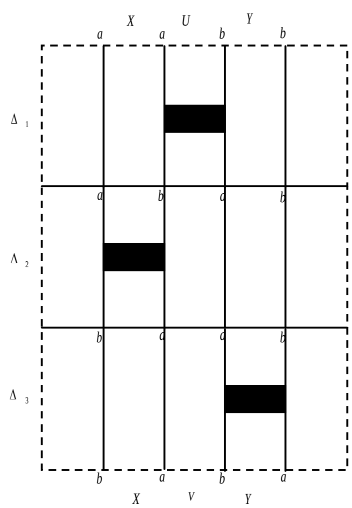
Teorema7 [3,h.20] Misalkan Δ sebuah diagram atas presentasi semigrup $P = [X|R]$ dan misalkan p dan q dua lintasan pada Δ dengan $top(p) = top(q)$ dan $bot(p) = bot(q)$. Maka label $\varphi(p)$ dan $\varphi(q)$ adalah sama dalam P.

Bukti.

Pada kasus ini p dan q hanya mempunyai dua titik umum (jika $u = v$ dan $s = t$ adalah modulo P maka $us = vt$ dalam P). Asumsikan bahwa q adalah lintasan bawah dan p adalah lintasan atas. Misalkan Δ' sub diagram antara p dan q. Sehingga Δ' adalah diagram atau gabungan diagram atom $\Delta_1 \circ \Delta_2 \circ \cdots \circ \Delta_n$ atas P. Misalkan Δ_i sebuah diagram, $i = 1, \cdots, n$. Maka $s_1 \equiv \varphi(p), s_{n+1} \equiv \varphi(q)$ dan barisan $s_1, \cdots, s_{n+1}$ adalah derivasi atas P, sehingga $\varphi(p) = \varphi(q)$ adalah sama dengan P. ■

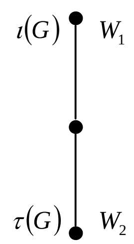
4. CONTOH

Dari uraian pada Gambar 1 dengan relasi $ab = ba$. Misalkan Δ adalah sebuah diagram dimana $top(\Delta_1) = XUY$ dan $bot(\Delta_2) = XVY$. Sehingga $\Delta_1 \circ \Delta_2 = \Delta$ adalah diagram atom yang dapat dilukiskan pada Gambar 7 berikut:



Gambar 7: Gambar Atom $(aabb, baba)$.

Selanjutnya dari Gambar 7 dapat didefinisikan operasi penjumlahan pada graf. Misalkan G_1 dan G_2 suatu graf, maka $G_1 + G_2$ terdefinisi jika $\iota(G_2) = \tau(G_1)$. Contoh 6 dapat dilukiskan sebagai graf dengan $\iota(G_1) = XUY$ adalah verteks awal yang dilambangkan dengan W_1 dan $\tau(G) = XVY$ adalah verteks akhir yang dilambangkan dengan W_2 seperti pada Gambar 8:



Gambar 8: Graf $G_1 + G_2$.

Jadi Gambar 8 adalah sebuah graf yang diperoleh dari sebuah diagram dengan operasi penjumlahan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ahmad, A.G. & Sri Gemawati. 2004. Graf Kumpulan Gambar Rajah daripada Semikumpulan □,□ | □□=□□ , *Prosd. Simposium Kebangsaan ke XIII. UIA*, Malaysia.

[2] Gilbert, W. J. & Nicholson, W. K. . 2004. *Modern Algebra With Applications.* Jhon Wiley & Sons, Inc.

[3] Guba, V.& Sapir, M. 1996. *Diagram Groups*, S.Orlov St, Russia.

[4] Lipschutz, S. & Lipson, M. L. 2002. *Matematika Diskrit, jilid 2.* Salemba Teknika, Jakarta.