# ANUITAS DUE PADA STATUS HIDUP PERORANGAN BERDASARKAN FORMULA WOOLHOUSE

**Sri Purwanti[1], Johannes Kho[2], Aziskhan[2]**

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika FMIPA Universitas Riau
email : srii_purwantii@yahoo.co.id
[2]Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau

## ABSTRACT

A formula called Woolhouse formula that obtained based on approach the Euler Maclaurin formula are discussed. Then Woolhouse formula is used to calculate present value of an annuity with payable $m$ times a year. Here, $n$ year temporary of an annuity-due is used. This study is a review of the work done by David C.M. Dickson, Mary R Hardy and Howard R. Waters *Actuarial Mathematics for Life Contingencies Risk*. 3: 132-136 (2009).

**Keywords:** *Annuity-due, Present Value, Euler Maclaurin Formula, Woolhouse Formula.*

## 1. PENDAHULUAN

Anuitas adalah suatu rangkaian pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan setiap selang waktu dan lama tertentu. Pada mulanya istilah anuitas hanya digunakan untuk pembayaran yang dilakukan tiap tahun, akan tetapi dengan seiring berjalannya waktu, anuitas juga mencakup pembayaran yang dilakukan tiap bulan, kuartal, semester ataupun interval waktu lainnya. Menurut sistem pembayarannya, anuitas dibagi menjadi dua yaitu anuitas due dan anuitas immediate. Orang yang melakukan aktifitas anuitas disebut dengan anuitan.

Formula Woolhouse merupakan formula yang digunakan untuk menghitung anuitas yang dibayarkan secara tahunan atau selang waktu lainnya berdasarkan pendekatan formula Euler Maclaurin. Dengan menggunakan formula Woolhouse akan ditentukan nilai sekarang dari anuitas due dengan melakukan $m$ kali pembayaran dari anuitan yang berusia $x$ tahun sampai usia maksimum $n$ tahun. Dalam artikel ini penulis mempelajari ulang dari buku yang ditulis oleh David C.M. Dickson, Mary R Hardy, and Howard R. Waters yang berjudul "*Actuarial Mathematics for Life Contingencies Risk"*.

## 2. ANUITAS DUE BERDASARKAN FORMULA WOOLHOUSE

Berdasarkan pendekatan formula Euler Maclaurin yang secara umum ditulis dalam bentuk

$$\int_a^b g(x)dx = h\left(\sum_{i=0}^{N} g(a+ih) - \frac{1}{2}\big(g(a)+g(b)\big)\right) + \frac{h^2}{12}\big(g'(a)-g'(b)\big) \qquad (1)$$

dengan $h = \frac{b-a}{N}$ dan $N$ adalah integer, akan ditunjukkan formula Woolhouse yang ditulis dalam teorema sebagai berikut.

**Teorema 1** Misalkan terdapat fungsi $g(t)$, dimana $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, maka

$$\int_0^\infty g(t)dt = h\sum_{k=0}^{\infty} g(kh) - \frac{h}{2}g(0) + \frac{h^2}{12}g'(0) \qquad (2)$$

dengan $g(t) = v^t\,{}_tp_x$ dan $h$ merupakan banyaknya pembayaran yang dilakukan setiap tahun dengan $h > 0$.

**Bukti:**

Misalkan $a = 0$, $b = n = N = \infty$, dan $h = h$, maka persamaan (1) menjadi

$$\int_0^\infty g(x)dx = h\left(\sum_{i=0}^{\infty} g(ih) - \frac{1}{2}g(0) - \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} g(t)\right) + \frac{h^2}{12}g'(0) - \frac{h^2}{12}\lim_{t\to\infty} g'(t) \qquad (3)$$

Karena $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, maka persamaan (3) menjadi

$$\int_0^\infty g(x)dx = h\sum_{i=0}^{\infty} g(ih) - \frac{h}{2}g(0) + \frac{h^2}{12}g'(0)$$

Karena $i = k$, maka terbukti

$$\int_0^\infty g(x)dx = h\sum_{i=0}^{\infty} g(kh) - \frac{h}{2}g(0) + \frac{h^2}{12}g'(0) \qquad \blacksquare$$

Kemudian, dengan menggunakan formula Woolhuse akan ditunjukkan nilai sekarang dari anuitas due dengan *m* kali pembayaran setahun.

**Teorema 2** Misalkan *x* menyatakan usia, *m* adalah banyaknya pembayaran yang dilakukan, $\delta$ adalah kekuatan bunga, dan $\mu_x$ adalah percepatan mortalita maka anuitas due anuitan yang berusia *x* dengan *m* kali pembayaran berdasarkan formula Woolhouse adalah

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x) \tag{4}$$

**Bukti :**

Dengan menurunkan fungsi $g(t) = v^t\,{}_tp_x$ diperoleh

$$g'(t) = {}_tp_x \frac{d}{dt} v^t + v^t \frac{d}{dt}\,{}_tp_x \tag{5}$$

Karena $v^{-\delta}$, persamaan (5) menjadi

$$g'(t) = -{}_tp_x\,\delta e^{-\delta t} - v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t} \tag{6}$$

Untuk $g'(0)$, maka persamaan (6) menjadi

$$g'(0) = -(\delta + \mu_x) \tag{7}$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (2) dengan mengambil $h = 1$ dan $g(0) = 1$ dan diperoleh

$$\int_0^\infty g(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x) \tag{8}$$

Karena $g(t) = v^t\,{}_tp_x$, persamaan (8) menjadi

$$\int_0^\infty g(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x)$$

Karena $v^k {}_k p_x = \ddot{a}_x$, maka diperoleh

$$\int_0^\infty g(t)dt = \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x) \tag{9}$$

Untuk pembayaran anuitas yang dilakukan *m* kali pembayaran setahun, maka nilai $h$ menjadi $\frac{1}{m}$. Sehingga persamaan (2) menjadi

$$\int_0^\infty g(t)dt = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x - \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$

karena $\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x$ , maka diperoleh

$$\int_0^\infty g(t)dt = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\delta + \mu_x) \tag{10}$$

Karena persamaan (9) dan persamaan (10) mempunyai pendekatan yang sama, maka terbukti

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$ ■

Kemudian berikut ini akan diberikan teorema yang menunjukkan nilai sekarang dari anuitas due berjangka *n* tahun berdasarkan formula Woolhouse, sebelumnya diberikan beberapa bentuk umum dari anuitas due berdasarkan jenisnya dengan *m* kali pembayaran.

i. Anuitas due seumur hidup

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{m} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x \tag{11}$$

ii. Anuitas due berjangka

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{t=0}^{mn-1} \frac{1}{m} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x \tag{12}$$

iii. Anuitas due yang ditunda

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x} - v^{n}\,{}_{n}p_{x}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+n} \tag{13}$$

**Teorema 3** Misalkan anuitas due berjangka *n* tahun adalah $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dan melakukan *m* kali pembayaran mempunyai faktor diskon $v^{n}$, peluang hidup sampai *n* tahun ${}_{n}p_{x}$, percepatan mortalita $\mu_x$, dan percepatan pembungaannya $\delta$ maka nilai sekarang anuitas due berjangka dengan *m* kali pembayaran berdasarkan formula Woolhouse adalah

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - v^{n}\,{}_{n}p_{x}\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\delta + \mu_x - v^{n}\,{}_{n}p_{x}(\delta + \mu_{x+n})\right) \tag{14}$$

dengan pendekatan $\mu_x \approx -\frac{1}{2}\left(log(p_{x-1}) + log(p_x)\right)$

**Bukti :**
Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (13) diperoleh

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x) - v^{n}\,{}_{n}p_{x}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+n} \tag{15}$$

Untuk anuitan yang berusia $x+n$ tahun, persamaan (4) dapat ditulis menjadi

$$\ddot{a}^{(m)}_{x+n} = \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_{x+n}) \tag{16}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (16) ke persamaan (15), diperoleh

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx\ & \ddot{a}_x - v^{n}\,{}_{n}p_{x}\,\ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - v^{n}\,{}_{n}p_{x}\right) \\ & - \frac{m^2-1}{12m^2}\left((\delta + \mu_x) - v^{n}\,{}_{n}p_{x}(\delta + \mu_{x+n})\right)\end{aligned} \tag{17}$$

Berdasarkan persamaan (13), maka terbukti

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx\ & \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - v^{n}\,{}_{n}p_{x}\right) \\ & - \frac{m^2-1}{12m^2}\left((\delta + \mu_x) - v^{n}\,{}_{n}p_{x}(\delta + \mu_{x+n})\right)\end{aligned} \quad \blacksquare$$

Tabel berikut ini merupakan aplikasi dari persamaan (14). Dimana data yang digunakan berdasarkan tabel mortalita.

**Tabel 1** Nilai Sekarang Anuitas Due untuk Anuitas Berjangka dengan usia Anuitan 60 Tahun

| $n$ | $v^{\frac{n}{4}}$ | ${}_{\frac{n}{4}}p_{60}$ | $\ddot{a}^{(4)}_{60:\overline{n}\vert}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 1,000000 | 1,00000 |
| 1 | 0,97645 | 1,000000 | 0,97645 |
| 2 | 0,95346 | 0,715328 | 0,68204 |
| 3 | 0,93101 | 0,715328 | 0,66598 |
| 5 | 0,88769 | 0,715328 | 0,63499 |
| 6 | 0,86678 | 0,489051 | 0,42390 |
| 7 | 0,84637 | 0,489051 | 0,41392 |
| 8 | 0,82645 | 0,489051 | 0,40417 |
| 9 | 0,80699 | 0,489051 | 0,39466 |
| 10 | 0,78799 | 0,350365 | 0,27608 |
| 11 | 0,76943 | 0,350365 | 0,26958 |
| 12 | 0,75131 | 0,350365 | 0,26323 |
| $n$ | $v^{\frac{n}{4}}$ | ${}_{\frac{n}{4}}p_{60}$ | $\ddot{a}^{(4)}_{60:\overline{n}\vert}$ |
| 14 | 0,71635 | 0,284672 | 0,20392 |
| 15 | 0,69948 | 0,284672 | 0,19912 |
| 16 | 0,68301 | 0,284672 | 0,19443 |
| 17 | 0,66693 | 0,284672 | 0,18986 |
| 18 | 0,65123 | 0,262774 | 0,17113 |
| 19 | 0,63589 | 0,262774 | 0,16710 |
| 20 | 0,62092 | 0,262774 | 0,16316 |
| 21 | 0,60630 | 0,262774 | 0,15932 |
| 22 | 0,59203 | 0,248175 | 0,14693 |
| 23 | 0,57809 | 0,248175 | 0,14347 |
| 24 | 0,56447 | 0,248175 | 0,14009 |
| 25 | 0,55118 | 0,248175 | 0,13679 |
| 26 | 0,53820 | 0,226277 | 0,12178 |
| 27 | 0,52553 | 0,226277 | 0,11892 |
| 28 | 0,51316 | 0,226277 | 0,11612 |
| 29 | 0,50108 | 0,226277 | 0,11338 |
| 30 | 0,48928 | 0,189781 | 0,09286 |
| 31 | 0,47776 | 0,189781 | 0,09067 |
| 32 | 0,46651 | 0,189781 | 0,08853 |
| 33 | 0,45552 | 0,189781 | 0,08645 |
| 34 | 0,44480 | 0,160584 | 0,07143 |
| 35 | 0,43432 | 0,160584 | 0,06975 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 0,42410 | 0,160584 | 0,06810 |
| 37 | 0,41411 | 0,160584 | 0,06650 |
| 38 | 0,40436 | 0,138686 | 0,05608 |
| 39 | 0,39484 | 0,138686 | 0,05476 |

**Tabel 2** Nilai Sekarang Anuitas Due untuk Anuitas Berjangka dengan usia Anuitan 60 Tahun

| $n$ | $v^n$ | ${}_np_{60}$ | $\ddot{a}_{60:\overline{n}\vert}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| 1 | 0,90909 | 0,98978 | 0,89980 |
| 2 | 0,82645 | 0,97889 | 0,80900 |
| 3 | 0,75131 | 0,96710 | 0,72660 |
| 4 | 0,68301 | 0,95435 | 0,65183 |
| 5 | 0,62092 | 0,94052 | 0,58399 |
| 6 | 0,56447 | 0,92552 | 0,52243 |
| 7 | 0,51316 | 0,90926 | 0,46659 |
| 8 | 0,46651 | 0,89162 | 0,41595 |
| 9 | 0,42410 | 0,87249 | 0,37002 |

Tabel 1 merupakan nilai sekarang dari anuitas due secara umum dengan nilai sekarang 2,63575, sedangkan Tabel 2 merupakan nilai sekarang dari anuitas due berdasarkan formula Woolhouse dengan nilai sekarang sebesar 6,44622.

## 3. DAFTAR PUSTAKA

[1]Bain, Lee J. & Engelhardt, Max.(1991). *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*, University of Idaho. Belmont, California.

[2]Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1997).*Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, IL.

[3]Dickson, David C. M, Hardy, Mary R, & Waters, Howard R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingencies Risk*. United Kingdom at The University Pers. Cambridge.

[4]Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi, Bagian I*. Terj. Dari Seimei Hoken Sugaku, Jokan (“92 Revision), Incorporated Foundation Orental life Insurance Development Center. Tokyo. Jepang.

[5]Kellison, Stephen G. 1970.*The Theory of Interest*. Fellow of Actuaries University of Nebrasks.