

# **MEAN SQUARE ERROR TERKECIL DARI PENAKSIR RASIO DAN PRODUK UNTUK RATA-RATA POPULASI TERBATAS PADA SAMPLING GANDA**

**Novrita. N<sup>1\*</sup>, Sigit. S<sup>2</sup>, Haposan. S<sup>2</sup>**

\*novritanainggolan@gmail.com

<sup>1</sup> Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

<sup>2</sup> Dosen Matematika Statitika

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau  
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

## **ABSTRACT**

Two types estimator for finite population mean in double sampling are ratio and product. These types are both proposed by Sukhatme and Srivastava so that four estimators are obtained. Four this estimator usually bias estimator. The efficient estimator is one with the least Mean Square Error (MSE), determined by comparing each type of estimator.

**Keywords:** Double Sampling, Bias, Mean Square Error (MSE), Estimator Ratio, Estimator Product.

## **1. PENDAHULUAN**

Sampling multiphase yang merupakan sampling acak adalah pengambilan sampel berdasarkan informasi yang diperoleh pada fase pertama yang digunakan sebagai informasi tambahan untuk memperoleh estimasi yang akurat pada fase berikutnya. Sampling multiphase yang biasa digunakan adalah sampling ganda. Sampling ganda mencakup pemilihan sampel berukuran  $n'$  dari populasi berukuran  $N$  pada pengambilan sampel tahap pertama dan kemudian diambil sub sampel berukuran  $n$  dari sampel berukuran  $n'$  pada pengambilan sampel tahap kedua. Informasi yang diperoleh dari  $n'$  digunakan untuk meningkatkan keakuratan estimasi sampel akhir [4].

Pada kertas kerja ini, dibahas sampling ganda. Pada sampling ganda dilakukan pengambilan sampel sebanyak dua kali, yaitu sampel pertama berukuran  $n'$  dan sampel kedua berukuran  $n$ . Pengambilan sampel sebanyak dua kali dilakukan untuk memperkecil sampel yang dibutuhkan dan untuk lebih menghemat biaya dan waktu.

Penaksir yang baik apabila rata-rata perkiraan sama dengan parameter sebenarnya, dinamakan penaksir bias. Penaksir yang memiliki variansi minimum merupakan penaksir yang baik untuk penaksir tak bias tetapi apabila rata-rata perkiraan tidak sama dengan parameter sebenarnya dinamakan penaksir bias, maka penaksir bias yang efisien untuk penaksir bias yang memiliki *Mean Square Error (MSE)* minimum [1].

Misalkan suatu populasi berkarakter  $Y$  akan diteliti, dengan memanfaatkan informasi yang sudah ada yang merupakan variabel bantu berkarakter  $X$  maka digunakan metode penaksir rasio dan produk untuk meningkatkan ketelitian. Pada penaksir rasio, dimana populasi  $X$  setara dengan populasi  $Y$  dan pada penaksir produk, populasi  $X$  berbanding terbalik dengan populasi  $Y$  karena tujuan dari metode penaksir rasio dan produk adalah untuk meningkatkan ketelitian dengan memanfaatkan hubungan antara  $Y$  dan  $X$ ,

Secara umum ada dua penaksir yaitu penaksir rasio dan penaksir produk. Kedua penaksir ini merupakan penaksir bias. Maka akan ditentukan  $MSE$  dari masing-masing penaksir. Pada kertas kerja ini,  $MSE$  penaksir rasio ( $\bar{y}_{Rd}$ ) dan produk ( $\bar{y}_{Pd}$ ) sederhana oleh Sukhatme akan dibandingkan  $MSE$  penaksir rasio ( $\hat{Y}_{ReMd}$ ) dan produk ( $\hat{Y}_{ReMd}$ ) yang dimodifikasi oleh Srivastava pada sampling ganda untuk menentukan penaksir yang paling efisien atau penaksir yang mempunyai  $MSE$  terkecil [3].

## 2. PENAKSIR PADA SAMPLING ACAK

Dalam bagian ini dibahas beberapa penaksir pada sampling acak, antara lain penaksir pada sampling acak sederhana, penaksir pada sampling ganda, bias penaksir rasio dan produk yang merupakan teori pendukung dalam menyelesaikan permasalahan.

Misalkan suatu populasi berukuran  $N$  dengan nilai variabel  $y_i$  untuk masing-masing unit,  $i=1,2,3,\dots, N$ , maka rata-rata dari populasi didefinisikan dengan  $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ . Akan diambil sampel berukuran  $n$  unit dengan nilai variabel  $y_i$  untuk masing-masing unit,  $i=1,2,3,\dots, n$ , maka rata-rata dan sampel didefinisikan dengan  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  [1].

### 1. Sampling Sederhana

Penarikan sampel acak sederhana adalah suatu metode untuk mengambil  $n$  unit dari populasi berukuran  $N$ , dimana setiap elemen mempunyai kesempatan yang sama untuk diambil menjadi anggota sampel. Pengambilan sampel dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian.

Ekspektasi dari  $\bar{y}$  akan sama dengan  $\bar{Y}$ , pernyataan ini dapat ditunjukkan sebagai berikut

$$E(y_i) = \sum_{i=1}^N P(y_i)y_i$$

Dengan  $P(\bar{y}_i)$  adalah probabilitas terpilihnya  $y_i$  menjadi anggota sampel. Apabila probabilitas  $y_i$  terpilih menjadi anggota sampel adalah  $\frac{1}{N}$ , terbukti  $E(y_i) = \bar{Y}$ . Dengan demikian diperoleh  $E(\bar{y}) = \bar{Y}$ . Dapat dinyatakan bahwa  $\bar{y}$  adalah penaksir tak bias dari  $\bar{Y}$

**Teorema 1** [1, hal: 27] Variansi dari rata-rata ( $\bar{y}$ ) pada sampel acak sederhana adalah

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{S_y^2}{n} (1-f)$$

dengan  $f = \frac{n}{N}$  adalah fraksi penarikan sampel dan  $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$  adalah variansi  $y_i$  dalam sebuah populasi.

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [1, hal: 27].

## 2. Sampling Ganda

Misalkan terdapat suatu populasi berukuran  $N$ , diperlukan sampel berukuran  $n'$  untuk diteliti, pengambilan sampel berukuran  $n'$  tersebut dilakukan dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian, ini merupakan cara penarikan sampel tahap pertama yang disebut sebagai sampel pertama pada sampling ganda, kemudian diperlukan lagi subsampel yaitu sampel tahap kedua disebut juga sampel kedua yang berukuran  $n$  dari sampel berukuran  $n'$ , pengambilan subsampel berukuran  $n$  tersebut juga dilakukan dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Informasi yang diperoleh dari  $n'$  digunakan untuk meningkatkan keakuratan estimasi sampel akhir.

**Teorema 2** [1, h.375] Untuk rata-rata populasi per unit, perkiraan yang digunakan dalam penarikan sampling ganda adalah  $\bar{y}_{ds_j}$  ( $ds_j$  singkatan dari double sampling). Jika dalam perkiraan sampel  $\bar{y}_i$  adalah tak bias, maka  $\bar{y}_{ds_j}$  adalah tak bias dari rata-rata populasi  $\bar{Y}$ .

### Bukti

Karena  $\bar{y}_{ds_j}$  adalah rata-rata pengambilan sub sampel acak sederhana dari sampel. Dengan  $C_n^{n'}$  merupakan peluang terambilnya sampel pada tahap kedua maka diperoleh,

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_{ds_j}) &= \sum_{i=1}^{C_n^{n'}} P(\bar{y}_{ds_j}) \bar{y}_{ds_j} \\ &= \sum_{i=1}^{C_n^{n'}} P(\bar{y}_{ds_j}) E(\bar{y}_{ds_j} | i) \\ &= \frac{1}{C_n^{n'}} \sum_{i=1}^{C_n^{n'}} \bar{y}_{ss_i} \\ E(\bar{y}_{ds_j}) &= \bar{Y} \end{aligned}$$

**Teorema 3** [2, h.141] Jika sampel pertama adalah acak dan berukuran  $n'$ , sampel kedua adalah sub sampel dari sampel pertama berukuran  $n$ . Maka rata-rata  $\bar{y}_{ds}$  pada sampling ganda adalah

$$V(\bar{y}_{ds}) = \left( \frac{1}{n'} - \frac{1}{N} \right) S_y^2 + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) S_d^2$$

dengan  $S_d^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^{n'} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n'-1}$ .

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [2, h.141].

## 3. Bias Penaksir Rasio dan Produk untuk Rata-Rata pada Sampling Ganda

Dalam metode rasio dan produk, suatu variabel pendukung  $X$  dengan unit populasi  $x_i$  yang berhubungan dengan  $y_i$  diperoleh untuk setiap unit di dalam sampel,

jumlah populasi  $X$  dari  $x_i$  harus diketahui. Kedua metode ini merupakan cara dari penaksir untuk membuat penaksir yang efisien dan meningkatkan ketelitian dengan mengambil manfaat hubungan antara  $y_i$  dan  $x_i$ . Ketika rata-rata populasi  $\bar{X}$  untuk setiap variabel tambahan  $x$  tidak diketahui, maka pada sampel tahap pertama berukuran  $n'$  merupakan gambaran populasi dimana yang diteliti hanya variabel tambahan  $x$  dengan  $\bar{x}' = \sum_{i=1}^{n'} x_i/n'$ . Dan pada sampel tahap kedua berukuran  $n$  yang merupakan dengan variabel yang diteliti  $y$  dan variabel tambahan  $x$  yang akan diteliti dengan rata-rata sampel  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i/n$  dan  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ . Pada sampling ganda penaksir rasio ( $\bar{y}_{Rd}$ ) dan penaksir produk ( $\bar{y}_{Pd}$ ) merupakan rata-rata populasi  $\bar{Y}$  dengan

$$(\bar{y}_{Rd}) = \bar{y} \frac{\bar{x}'}{\bar{x}} \quad \text{dan} \quad (\bar{y}_{Pd}) = \bar{y} \frac{\bar{x}}{\bar{x}'}$$

a. Bias Penaksir Rasio

$$\bar{y}_{Rd} = \hat{R}\bar{x}' \quad , \text{ dengan } \hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

$$B(\bar{y}_{Rd}) \approx \frac{1}{\bar{X}} \left( \frac{n' - n}{n'n} \right) (RS_x^2 - S_{yx})$$

b. Bias Penaksir Produk

$$\bar{y}_{Pd} = \frac{\hat{P}}{\bar{x}'} \quad , \text{ dengan } \hat{P} = \bar{y}\bar{x}$$

$$B(\bar{y}_{Pd}) \approx \frac{1}{\bar{X}} \left( \frac{n' - n}{n'n} \right) (PS_x^2 - S_{yx})$$

### 3. PENAKSIR RASIO DAN PRODUK YANG LEBIH EFISIEN PADA SAMPLING GANDA

Tipe penaksir rasio dan produk yang dibahas adalah penaksir penaksir yang diajukan oleh Sukhatme dan penaksir rasio dan produk eksponensial yang diajukan oleh Srivastava pada sampling ganda. Untuk menentukan penaksir yang lebih efisien dari penaksir tersebut, akan dibandingkan  $MSE$  dari masing-masing penaksir.  $MSE$  yang lebih kecil merupakan penaksir yang lebih efisien.

**Definisi 4** [1, hal: 272] Misalkan  $\hat{\theta}_1$  dan  $\hat{\theta}_2$  adalah dua penaksir dari  $\hat{\theta}$ . Dan  $MSE$  dari  $\hat{\theta}_1$  dan  $\hat{\theta}_2$  adalah  $MSE(\hat{\theta}_1)$  dan  $MSE(\hat{\theta}_2)$ , maka relatif efisien dari  $\hat{\theta}_1$  ke  $\hat{\theta}_2$  dinotasikan dengan  $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  didefinisikan

$$RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)}$$

Bahwa  $\hat{\theta}_1$  relatif lebih efisien terhadap  $\hat{\theta}_2$  jika  $RE(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) < 1$  atau dengan kata lain  $MSE(\hat{\theta}_1) - MSE(\hat{\theta}_2) < 0$ .  $MSE$  dari masing-masing penaksir dapat diperoleh dengan syarat bahwa  $\bar{y} = \bar{Y}(1 + e_0)$ ,  $\bar{x} = \bar{X}(1 + e_1)$ , dan  $\bar{x}' = \bar{X}(1 + e'_1)$ . Maka

$$\begin{aligned} E(e_0) &= E(e_1) = E(e'_1) = 0 \\ E(e_0^2) &= \lambda C_y^2, \quad E(e_1^2) = \lambda C_x^2, \quad E(e'_1{}^2) = \lambda' C_x^2 \\ E(e_0 e_1) &= \lambda \rho C_y C_x, \quad E(e_1 e'_1) = \lambda' C_x^2, \quad E(e_0 e'_1) = \lambda' \rho C_y C_x. \end{aligned}$$

Dimana  $\lambda = 1/n - 1/N$ ,  $\lambda' = 1/n' - 1/N$ ,  $\lambda^* = \lambda - \lambda'$ ,  $C_y = S_y/\bar{Y}$ ,  $C_x = S_x/\bar{X}$ , dan  $\rho = S_{yx}/S_y S_x$  merupakan koefisien korelasi antara  $y$  dan  $x$ ,  $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N - 1)$ ,  $S_x^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 / (N - 1)$  dan  $S_{yx} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}) / (N - 1)$ .

1.  $MSE$  dari Penaksir Rasio untuk Rata-Rata Populasi pada Sampling Ganda  
Bentuk penaksir rasio untuk rata-rata populasi  $Y$  yang diajukan oleh Sukhatme pada sampling ganda [3, hal: 220].

$$\bar{y}_{Rd} = \bar{y} \frac{\bar{x}'}{\bar{x}}$$

Karena persamaan penaksir rasio di atas merupakan penaksir bias,  $MSE$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}_{Rd}) &= E(\bar{y}_{Rd} - \bar{Y})^2 \\ &= E(\bar{Y}(1 + e_0 + e'_1 - 1 - e_1))^2 \\ &= \bar{Y}^2 E(e_0^2 + 2e'_1 e_0 + e_1^2 + e_1'^2 - 2e_1 e_0 - 2e'_1 e_1) \\ &= \bar{Y}^2 (\lambda C_y^2 - \lambda' \rho C_y C_x + \lambda' C_x^2 + \lambda C_x^2 - 2\lambda \rho C_y C_x - 2\lambda' C_x^2) \\ MSE(\bar{y}_{Rd}) &= S_y^2 (\lambda + (\lambda - \lambda') \alpha (\alpha - 2\rho)) \end{aligned}$$

Maka

$$MSE(\bar{y}_{Rd}) = S_y^2 (\lambda + \alpha \lambda^* (\alpha - 2\rho)) \quad (1)$$

2.  $MSE$  dari Penaksir Produk untuk Rata-Rata Populasi pada Sampling Ganda  
Bentuk penaksir produk untuk rata-rata populasi  $Y$  yang diajukan oleh Sukhatme pada sampling ganda [3, hal: 220].

$$\bar{y}_{Pd} = \bar{y} \frac{\bar{x}}{\bar{x}'}$$

Penaksir produk di atas merupakan penaksir bias, sehingga dapat diperoleh  $MSE$  dari penaksir produk

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}_{Pd}) &= E(\bar{y}_{Pd} - \bar{Y})^2 \\ &= E(\bar{Y}(1 + e_0 + e_1 - 1 - e'_1))^2 \\ &= \bar{Y}^2 E(e_0^2 + 2e_1 e_0 + e_1'^2 + e_1^2 - 2e'_1 e_0 - 2e'_1 e_1) \\ &= \bar{Y}^2 (\lambda C_y^2 + \lambda \rho C_y C_x + \lambda' C_x^2 + \lambda C_x^2 - 2\lambda' \rho C_y C_x - 2\lambda' C_x^2) \\ MSE(\bar{y}_{Pd}) &= S_y^2 (\lambda + (\lambda - \lambda') \alpha (\alpha + 2\rho)). \end{aligned}$$

Maka

$$MSE(\bar{y}_{Pd}) = S_y^2 (\lambda + \alpha \lambda^* (\alpha + 2\rho)) \quad (2)$$

3. *MSE* dari Penaksir Rasio Eksponensial untuk Rata-Rata Populasi pada Sampling ganda.

Bentuk penaksir rasio untuk rata-rata populasi  $Y$  yang diajukan oleh Srivastava pada sampling ganda [3, hal: 220].

$$\hat{Y}_{ReMd} = \bar{y} \exp \left( \frac{\bar{x}' - \bar{x}}{\bar{x}' + \bar{x}} \right)$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{ReMd} &= \bar{Y} (1 + e_0) \exp \left( \frac{\bar{X} (1 + e_1) - \bar{X} (1 + e_1')}{\bar{X} (1 + e_1) + \bar{X} (1 + e_1')} \right) \\ \hat{Y}_{ReMd} &= \bar{Y} (1 + e_0) \exp \left( \frac{e_1' - e_1}{2} \right) \end{aligned}$$

Misalkan  $u = \left( \frac{e_1' - e_1}{2} \right)$ , maka  $\exp \left( \frac{e_1' - e_1}{2} \right) = e^u$

Sebagai pendekatan  $e^u$  digunakan pendekatan Maclaurin sampai derajat dua, diperoleh

$$e^u \approx 1 + u + \frac{u^2}{2} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{ReMd} &= \bar{Y} \left[ 1 + e_0 + \frac{e_1'}{2} - \frac{e_1}{2} + \frac{e_1'^2}{8} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1 e_1'}{4} + \frac{e_0 e_1'}{2} - \frac{e_0 e_1}{2} \right] \\ \hat{Y}_{ReMd} &= \bar{Y} \left[ 1 + e_0 + \frac{e_1'^2}{8} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1 e_1'}{4} + \frac{e_0 e_1'}{2} - \frac{e_0 e_1}{2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Dengan menggunakan persamaan (4), maka bias  $\hat{Y}_{ReMd}$  diperoleh

$$\begin{aligned} B \left( \hat{Y}_{ReMd} \right) &= E \left( \hat{Y}_{ReMd} - \bar{Y} \right) \\ &= \bar{Y} E \left[ 1 + e_0 + \frac{e_1'^2}{8} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1 e_1'}{4} + \frac{e_0 e_1'}{2} - \frac{e_0 e_1}{2} - \bar{Y} \right] \\ &= \bar{Y} \left( \frac{\lambda' C_x^2}{8} + \frac{\lambda C_x^2}{8} - \frac{\lambda' C_x^2}{4} - \frac{\lambda' \rho C_y C_x}{2} + \frac{\lambda \rho C_y C_x}{2} \right) \\ B \left( \hat{Y}_{ReMd} \right) &= \bar{Y} (\lambda - \lambda') \left( \frac{C_x^2}{8} - \frac{C_y C_x}{2} \right), \end{aligned}$$

dengan  $\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$  dan  $\lambda' = \frac{1}{n'} - \frac{1}{N}$ , maka

$$B \left( \hat{Y}_{ReMd} \right) = \bar{Y} \left( \frac{n' - n}{nn'} \right) (C_x^2 - 4\rho C_y C_x)$$

Penaksir rasio eksponensial merupakan penaksir bias, diperoleh *MSE* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
MSE\left(\hat{Y}_{ReMd}\right) &= E\left(\hat{Y}_{ReMd} - \bar{Y}\right)^2 \\
&= E\left(\bar{Y}(1 + e_0) \exp\left(\frac{e'_1 - e_1}{2}\right) - \bar{Y}\right)^2 \\
&= \bar{Y}^2 \left( \lambda C_y^2 + \frac{1}{4} (\lambda' C_x^2 - 2\lambda' C_x^2 + \lambda C_x^2) + \lambda' \rho C_y C_x - \lambda \rho C_y C_x \right) \\
MSE\left(\hat{Y}_{ReMd}\right) &= S_y^2 \left( \lambda + \frac{\alpha}{4} (\lambda - \lambda') (\alpha - 4\rho) \right)
\end{aligned}$$

Maka

$$MSE\left(\hat{Y}_{ReMd}\right) = S_y^2 \left( \lambda + \frac{\alpha}{4} \lambda^* (\alpha - 4\rho) \right) \quad (5)$$

4. *MSE* Penaksir Produk Eksponensial untuk Rata-Rata Populasi pada Sampling ganda

Bentuk penaksir produk untuk rata-rata populasi  $Y$  yang diajukan oleh Srivastava pada sampling ganda [3, hal: 220].

$$\hat{Y}_{PeMd} = \bar{y} \exp\left(\frac{\bar{x} - \bar{x}'}{\bar{x} + \bar{x}'}\right)$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{PeMd} &= \bar{Y}(1 + e_0) \exp\left(\frac{\bar{X}(1 + e_1) - \bar{X}(1 + e'_1)}{\bar{X}(1 + e_1) + \bar{X}(1 + e'_1)}\right) \\
\hat{Y}_{PeMd} &= \bar{Y}(1 + e_0) \exp\left(\frac{e_1 - e'_1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3) dari pendekatan Maclaurin sebagai pendekatan  $e^u$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{PeMd} &= \bar{Y} \left[ 1 + e_0 + \frac{e'_1}{2} - \frac{e_1}{2} + \frac{e_1'^2}{8} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1 e'_1}{4} - \frac{e_0 e'_1}{2} + \frac{e_0 e_1}{2} \right] \\
\hat{Y}_{PeMd} &= \bar{Y} \left[ 1 + e_0 + \frac{e_1'^2}{8} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1 e'_1}{4} - \frac{e_0 e'_1}{2} + \frac{e_0 e_1}{2} \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (6), maka bias  $\hat{Y}_{PeMd}$  diperoleh

$$\begin{aligned}
B\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) &= E\left(\hat{Y}_{PeMd} - \bar{Y}\right) \\
&= \bar{Y} E \left[ 1 + e_0 + \frac{e_1'^2}{8} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1 e'_1}{4} - \frac{e_0 e'_1}{2} + \frac{e_0 e_1}{2} - \bar{Y} \right] \\
&= \bar{Y} \left( \frac{\lambda' C_x^2}{8} + \frac{\lambda C_x^2}{8} - \frac{\lambda' C_x^2}{4} - \frac{\lambda' \rho C_y C_x}{2} + \frac{\lambda \rho C_y C_x}{2} \right) \\
B\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) &= \bar{Y} (\lambda - \lambda') \left( \frac{C_x^2}{8} + \frac{C_y C_x}{2} \right),
\end{aligned}$$

dengan  $\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$  dan  $\lambda' = \frac{1}{n'} - \frac{1}{N}$ , maka

$$B\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) = \bar{Y} \left( \frac{n' - n}{nn'} \right) (C_x^2 + 4\rho C_y C_x)$$

*MSE* dari penaksir produk eksponensial dapat diperoleh karena merupakan penaksir bias, sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} MSE\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) &= E\left(\hat{Y}_{PeMd} - \bar{Y}\right)^2 \\ &= E\left(\bar{Y} (1 + e_0) \exp\left(\frac{e_1 - e_1'}{2}\right) - \bar{Y}\right)^2 \\ &= \bar{Y}^2 \left( \lambda C_y^2 + \frac{1}{4} (\lambda C_x^2 - 2\lambda' C_x^2 + \lambda' C_x^2) + \lambda \rho C_y C_x - \lambda' \rho C_y C_x \right) \\ MSE\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) &= S_y^2 \left( \lambda + \frac{\alpha}{4} (\lambda - \lambda') (\alpha + 4\rho) \right) \end{aligned}$$

Maka

$$MSE\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) = S_y^2 \left( \lambda + \frac{\alpha}{4} \lambda^* (\alpha + 4\rho) \right) \quad (7)$$

Selanjutnya ditentukan penaksir rasio dan produk untuk rata-rata populasi yang efisien dari persamaan (1), (2), (5) dan (7) dengan menggunakan Defenisi (4). Sehubungan keempat penaksir yang dibahas merupakan penaksir bias, maka untuk mengetahui penaksir rasio yang efisien yaitu dengan membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir.

1. Dibandingkan antara  $(\bar{y}_{Rd})$  dengan  $(\hat{Y}_{ReMd})$  dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}_{Rd}) - MSE\left(\hat{Y}_{ReMd}\right) &= S_y^2 (\lambda + \alpha \lambda^* (\alpha - 2\rho)) - S_y^2 \left( \lambda + \frac{\alpha}{4} \lambda^* (\alpha - 4\rho) \right) \\ &= S_y^2 \left( \frac{3\alpha^2}{4} \lambda^* - \lambda^* \alpha \rho \right) \\ MSE(\bar{y}_{Rd}) - MSE\left(\hat{Y}_{ReMd}\right) &= S_y^2 \lambda^* \frac{\alpha}{4} (3\alpha - 4\rho) \end{aligned} \quad (8)$$

Dari persamaan (8) diketahui jika  $(3\alpha - 4\rho) > 0$  Maka

$$\rho/\alpha < 3/4$$

2. Dibandingkan antara  $(\bar{y}_{Pd})$  dengan  $(\hat{Y}_{PeMd})$  dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}_{Pd}) - MSE\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) &= S_y^2 (\lambda + \alpha \lambda^* (\alpha + 2\rho)) - S_y^2 \left( \lambda + \frac{\alpha}{4} \lambda^* (\alpha + 4\rho) \right) \\ &= S_y^2 \left( \frac{3\alpha^2}{4} \lambda^* - \lambda^* \alpha \rho \right) \\ MSE(\bar{y}_{Pd}) - MSE\left(\hat{Y}_{PeMd}\right) &= S_y^2 \lambda^* \frac{\alpha}{4} (3\alpha + 4\rho) \end{aligned} \quad (9)$$

Dari persamaan (9) diketahui jika  $(3\alpha + 4\rho) > 0$  Maka

$$-3/4 < \rho/\alpha$$



Dari penjabaran matematis di atas dapat di simpulkan bahwa, penaksir rasio eksponensial  $(\hat{Y}_{ReMd})$  yang diajukan oleh Srivastava lebih efisien dari penaksir rasio sederhana  $(\bar{y}_{Rd})$  oleh Sukhatme dan penaksir produk eksponensial oleh Srivastava  $(\hat{Y}_{PeMd})$  lebih efisien dari penaksir produk sederhana  $(\bar{y}_{Pd})$  oleh Sukhatme.

**Acknowledgements** This research was supported by Laboratorium Research Program funded by DIPA Universitas Riau under contract number: 222/UN.19.2/PL/2012.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Radiansyah & E. R Osman. Universitas Indonesia, Jakarta.
- [2] Raj, D. 1971. *Sampling Theory, T M H Edition*. United Nations Program of Technical Assistance, New Delhi.
- [3] Singh, H. P. & Vishwakarma, G. K .2007. Modified Exponential Ratio and Product Estimators for Finite Population Mean in Double Sampling. *Austrian Journal of Statistic*, 3, 217-225. Vikram University.
- [4] Sugiarto,dkk. 2001. *Teknik Sampling*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.