MODIFIKASI METODE NEWTON DENGAN KEKONVERGENAN ORDE TIGA

Feby Satrya HP[1)], Agusni[2)], Musraini[2)]

febysatrya@ymail.com

[1)]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2)]Dosen Matematika, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

ABSTRACT

In this paper is presented a new modification of Newton's method for solving non-linear equations. Convergence analysis of the new method shows that the method has third-order convergence. The example of the new method computation shows that the new method can compete with Newton method, Newton method with trapezoidal rule, midpoint Newton and Newton method with invers function.

Keywords: *Newton method, Third-order convergence, Non-linear equations.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu persoalan matematika yang sering dijumpai adalah menyelesaikan persamaan nonlinear $f(x)=0,$ dengan $f(x)$ adalah fungsi nonlinear. Akar persamaan nonlinear dapat diperoleh dengan metode Analitik. Solusi yang dihasilkan dengan metode Analitik berupa solusi sejati (*exact solution*). Apabila akar dari persamaan nonlinier tidak dapat diselesaikan dengan metode Analitik, maka pendekatan akarnya dapat dicari dengan metode Numerik. Solusi dari penyelesaian metode numerik merupakan akar pendekatan.

Artikel ini membahas modifikasi metode Harmonic Mean Newton atau disebut juga metode Newton dengan Fungsi Invers [2], dimana metode tersebut merupakan hasil dari modifikasi metode Newton [1] yang menghasilkan metode iterasi baru yang ditulis oleh Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua [3] dalam jurnalnya yang berjudul "Third-order modification of Newton's method".

Artikel ini disusun dalam tiga bagian. Bagian I merupakan pendahuluan yang memberikan gambaran umum mengenai permasalahan yang akan dibahas. Bagian II merupakan penyelesaian yang menjelaskan proses terbentuknya metode iterasi baru dan analisa kekonvergenan dari metode iterasi baru. Bagian III merupakan komputasi numerik untuk metode iterasi baru dengan program aplikasi Maple 13, serta perbandingan metode iterasi baru dengan Newton Klasik, Newton Rata-rata Aritmatik atau disebut juga Newton dengan aturan Trapesium [6], Newton Titik Tengah [5] dan Harmonic Mean Newton.

2. MODIFIKASI METODE NEWTON

Berikut dibahas mengenai proses terbentuknya modifikasi metode Newton dengan kekonvergenan orde tiga untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Metode Newton digunakan untuk mencari akar α dari suatu persamaan $f(x)=0$ untuk kasus persamaan nonlinear yang rumus umumnya seperti pada persamaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (1)$$

Jika dilakukan perkalian terhadap kedua ruas persamaan (1) dengan $f'(x_n)$, maka diperoleh

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n),$$

selanjutnya jika kedua ruas ditambahkan dengan $f(x_n)$, maka diperoleh

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0. \qquad (2)$$

Misalkan $x_{n+1} = x$ maka persamaan (2) menjadi

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0. \qquad (3)$$

Berdasarkan definisi turunan [4: h. 84], maka $f'(x_n)$ dapat ditulis sebagai

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n},$$

jadi $f'(x_n)$ dapat ditaksir dengan

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}. \qquad (4)$$

Jika persamaan (4) disubtitusikan ke dalam persamaan (3) maka diperoleh

$$f(x_n) + (f(x) - f(x_n)) = 0. \qquad (5)$$

Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus untuk integral [4: h. 181] dengan asumsi bahwa fungsi f kontinu pada interval $[x_n, x]$ yang berbentuk

$$f(x) - f(x_n) = \int_{x_n}^{x} f'(t)dt. \qquad (6)$$

Kemudian subtitusikan persamaan (6) ke persamaan (5), maka diperoleh persamaan

$$f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)dt = 0. \qquad (7)$$

Karena $f(x) = 0$, selanjutnya subtitusikan ke persamaan (7) diperoleh persamaan

$$f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)dt = f(x). \qquad (8)$$

Kemudian (8) ditulis dalam bentuk fungsi invers diperoleh persamaan

$$w(y_n)+\int_{y_n}^{y} w'(t)dt = w(y). \tag{9}$$

Penjabaran persamaan (9) memberikan persamaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}\right). \tag{10}$$

Persamaan (10) dapat ditulis sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2\left(\left(f'(x^*_{n+1})+f'(x_n)\right)/2\right)-f'(x_n)}\right), \tag{11}$$

dengan

$$f'(x^*_{n+1}) = 2\left(\left(f'(x^*_{n+1})+f'(x_n)\right)/2\right)-f'(x_n)$$

Pada persamaan (11), rata-rata aritmatik $\left(f'(x^*_{n+1})+f'(x_n)\right)/2$ diganti dengan nilai titik tengah $f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)$ sehingga diperoleh formula iterasi berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)-f'(x_n)}\right), \tag{12}$$

dimana

$$x^*_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Persamaan (12) merupakan bentuk modifikasi metode Newton dengan kekonvergenan orde tiga.

.

Teorema 3.2.1 [3: h.2] Asumsikan fungsi $f : D \subset \Re \to \Re$ mempunyai akar sederhana $\alpha \in D$, dimana D adalah interval terbuka. Jika $f(x)$ mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval D, maka metode yang didefinisikan pada persamaan (12) memiliki kekonvergenan orde tiga dan berikut persamaan tingkat erornya

$$e_{n+1} = -\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4), \tag{13}$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_k = (1/k!)f^{(k)}(\alpha)/ f'(\alpha), k = 2,3,\ldots$.

Bukti:

Misalkan α adalah akar dari $f(x)=0$, maka $f(\alpha)=0$, karena f mempunyai akar sederhana maka $f'(\alpha)\neq 0$. Dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$.

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2$$
$$+ \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O(e_n^4). \quad (14)$$

Karena $e_n = x_n - \alpha$, dengan mesubtitusikan pada persamaan (14) diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n{}^3 + O(e_n^4). \quad (15)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, dari persamaan (15) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n{}^3 + O(e_n^4). \quad (16)$$

Selanjutnya dengan memfaktorkan $f'(\alpha)$ dari persamaan (16) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right). \quad (17)$$

Untuk menyederhanakan notasi misalkan $c_k = (1/k!)f^{(k)}(\alpha)/\,f'(\alpha)$ untuk $k = 2,3,...$. Sehingga persamaan (17) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \quad (18)$$

Dengan cara yang sama, untuk nilai $f'(x_n)$ diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \quad (19)$$

Kemudian persamaan (18) bagi persamaan (19) didapat

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (20)$$

Karena $x_{n+1}^* = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, maka dengan melakukan subtitusi terhadap $\dfrac{x_{n+1}^* + x_n}{2}$ diperoleh

$$\frac{x_{n+1}^* + x_n}{2} = \frac{x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n}{2}$$
$$= \frac{2x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{2}$$
$$= x_n - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan nilai $x_n = e_n + \alpha$ dan persamaan (20) diperoleh

$$x_n - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + \alpha - \frac{1}{2}\left[e_n - c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$
$$= e_n + \alpha - \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}c_2e_n^2 + (c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$x_n - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}c_2 e_n^2 + \left(c_3 - c_2^2\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right). \tag{21}$$

Kemudian dengan mengekspansikan $f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right)$ disekitar α dengan menggunakan persamaan (21) didapat

$$f'\left(\frac{x_{n+1}^* + x_n}{2}\right) = f'(\alpha)\left[1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right]. \tag{22}$$

Selanjutnya dari persamaan (19) dan persamaan (22) diperoleh

$$\begin{aligned} 2f'\left(\frac{x_{n+1}^* + x_n}{2}\right) - f'\left(x_n\right) &= f'(\alpha)\left[2 + 2c_2 e_n + 2c_2^2 e_n + \frac{3}{2}c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right] \\ &\quad - f'(\alpha)\left[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right] \\ &= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2 e_n - \frac{3}{2}c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right] \\ &= f'(\alpha)\left[1 + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Kemudian persamaan (18) bagi persamaan (23) didapat

$$\begin{aligned} \frac{f\left(x_n\right)}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right) - f'\left(x_n\right)} &= \frac{f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]}{f'(\alpha)\left[1 + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right]} \\ &= e_n + c_2 e_n^2 - \left(2c_2^2 - \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan $x_n = e_n + \alpha$ dan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ ke persamaan (12) diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} + \alpha &= e_n + \alpha - \frac{f\left(x_n\right)}{2}\left(\frac{1}{f'\left(x_n\right)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right) - f'\left(x_n\right)}\right) \\ e_{n+1} &= e_n + \alpha - \alpha - \frac{1}{2}\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} - \frac{1}{2}\frac{f\left(x_n\right)}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right) - f'\left(x_n\right)} \\ &= e_n - \frac{1}{2}\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} - \frac{1}{2}\frac{f\left(x_n\right)}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right) - f'\left(x_n\right)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan (20) dan (24) ke persamaan (25) diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{1}{2}\left[e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right] - \frac{1}{2}\left[e_n + c_2 e_n^2 - \left(2c_2^2 - \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right] \\ &= e_n - \frac{1}{2}\left[e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3\right] - \frac{1}{2}\left[e_n + c_2 e_n^2 - \left(2c_2^2 - \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3\right] + O\left(e_n^4\right) \\ &= -\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Persamaan (26) merupakan persamaan tingkat eror dari metode Iterasi Baru dengan kekonvergenan orde tiga.

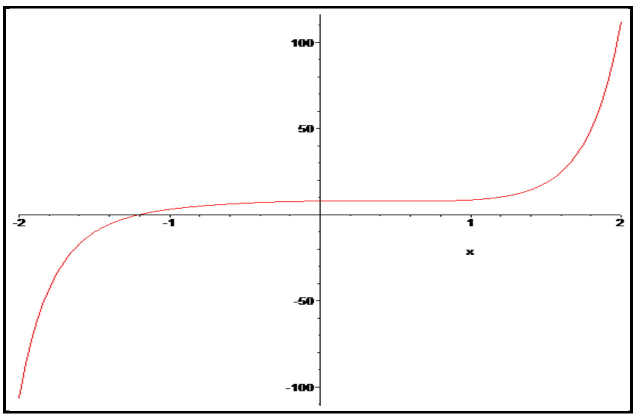
.

3. KOMPUTASI NUMERIK

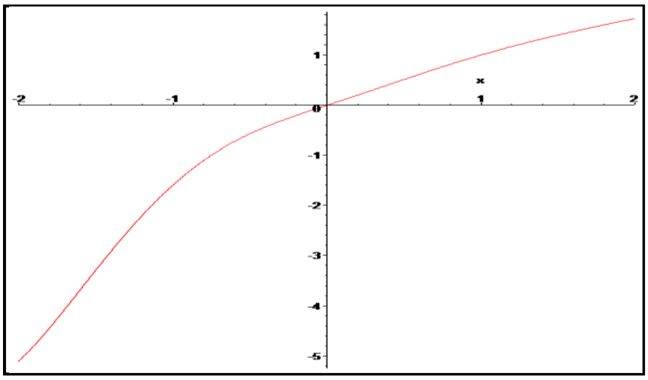
Berikut ini akan dilakukan perhitungan numerik yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi dari metode Newton serta modifikasi metode Newton dengan metode Iterasi Baru dalam menghampiri akar persamaan nonlinear. Perbandingan dilakukan dengan menggunakan pemrograman komputer Maple 13. Persamaan-persamaan nonlinear yang digunakan dalam melakukan contoh numerik adalah:

1. Fungsi eksponensial dan trigonometri : $f_1(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$
2. Fungsi eksponensial dan trigonometri : $f_2(x) = \sin(x)e^{-x} + \ln(x^2 + 1)$
3. Fungsi eksponensial : $f_3(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$

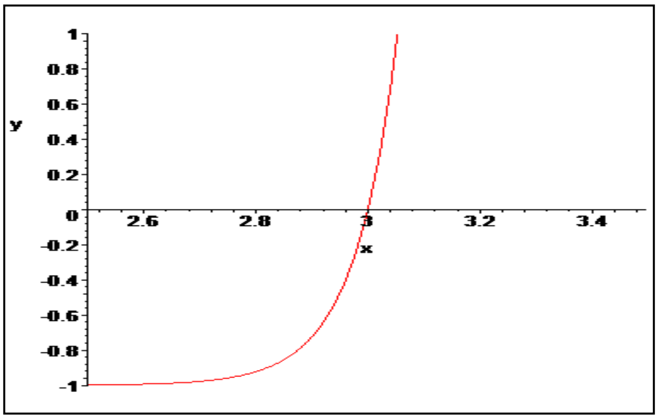
Grafik fungsi dari contoh dapat dilihat pada gambar 1-3. Grafik ini memperlihatkan perpotongan dengan sumbu x yang menunjukkan akarnya.



Gambar 1 Grafik $f_1(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$



Gambar 2 Grafik $f_2(x) = \sin(x)e^{-x} + \ln(x^2 + 1)$



Gambar 3 Grafik $f_3(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$

Dalam menentukan solusi numerik pada contoh di atas, metode Newton, modifikasi metode Newton dan metode Iterasi Baru memerlukan tebakan awal, karena tebakan awal berpengaruh terhadap keberhasilan dalam menghampiri akar dan juga terhadap jumlah iterasi yang dihasilkan.

Hasil dari perhitungan numerik terhadap contoh di atas dengan menggunakan metode Newton, modifikasi metode Newton dan metode Iterasi baru ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1 Tabel perbandingan komputasi metode Newton, Modifikasi metode Newton dan metode Iterasi Baru.

$f(x)$	x_0	Metode	n	NFE	COC	x_n	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
f_1	-3.0	CN	14	28	2.00000	-1.2076478271309	9.39e-27	1.75e-14
		AN	9	27	2.99918		7.53e-17	1.04e-06
		MN	9	27	3.00000		3.83e-44	1.02e-15

		HN	8	24	3.00002		1.64e-30	4.32e-11
		NEW	6	18	3.00000		1.40e-33	5.16e-12
		CN	8	16	2.00000		5.54e-20	4.26e-11
		AN	6	18	3.00000		6.31e-43	2.12e-15
	-2.0	MN	5	15	3.00000		4.30e-22	2.29e-08
		HN	5	15	3.00002		5.22e-31	2.95e-11
		NEW	4	12	3.00000		8.64e-27	9.47e-10
		CN	6	12	2.00040		2.92e-25	7.59e-09
		AN	5	15	3.00147	0.00000000000	7.51e-24	3.56e-08
f_2	3.0	MN	4	12	2.99921		4.50e-27	3.78e-09
		HN	4	12	3.00140		5.25e-24	3.16e-08
		NEW	3	9	2.99765		2.17e-23	6.38e-08
		CN	8	16	1.99999		8.08e-17	9.72e-10
		AN	6	18	2.99999		3.64e-36	1.69e-13
	3.25	MN	5	15	2.99902		3.22e-18	1.90e-07
		HN	5	15	3.00010		5.28e-28	1.41e-10
		NEW	4	12	3.00047		7.35e-26	9.19e-10
f_3						3.00000000000		
		CN	12	24	2.00000		5.48e-24	2.53e-13
		AN	8	24	2.99978		5.29e-24	1.92e-09
	3.5	MN	7	21	2.99816		3.14e-16	8.75e-07
		HN	7	21	3.00003		3.16e-32	5.50e-12
		NEW	5	15	3.00007		1.92e-32	5.87e-12

Tabel 1 merupakan Tabel perbandingan dari lima metode yang berbeda. $f_1 - f_3$ merupakan fungsi-fungsi yang berbeda, tebakan awal dinotasikan dengan x_0, selisih eror dinotasikan dengan $|x_n - x_{n-1}|$, nilai mutlak fungsi dinotasikan dengan $|f(x_n)|$, sedangkan COC (*computational order of convergence*) merupakan orde kekonvergenan secara komputasi. Dari Tabel 1, berdasarkan jumlah iterasi yang dihasilkan oleh lima metode dalam mendekati suatu akar persamaan nonlinear, maka dapat dilihat bahwa metode Newton dengan Aturan Trapesium, metode Newton dengan Aturan Titik Tengah, metode Newton dengan Menggunakan Fungsi Invers dan modifikasi metode Iterasi baru menghasilkan iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan metode Newton. Dari perhitungan COC dari masing-masing metode menunjukkan orde kekonvergenan dari metode-metode tersebut, yaitu metode Newton menunjukkan orde kekonvergenan kuadratik, modifikasi metode Newton dan Metode Iterasi Baru menunjukkan kekonvergenan orde tiga.

Selanjutnya dari segi NFE (*number of function evaluations*), dimana perhitungan NFE berdasarkan rumus umum dari masing-masing metode. Metode Newton memiliki satu nilai fungsi dan satu nilai turunan fungsi. Jadi untuk 1 kali iterasi, metode Newton memiliki dua nilai fungsi, sehingga untuk *n*-iterasi, metode Newton memiliki NFE yaitu $2n$. Pada modifikasi metode Newton dan metode Iterasi baru memiliki satu nilai fungsi dan dua nilai turunan fungsi. Jadi untuk 1 kali iterasi, keempat metode ini memiliki tiga nilai fungsi, sehingga untuk n-iterasi, keempat metode ini memiliki NFE yaitu $3n$ untuk n-iterasi.

Berdasarkan contoh komputasi dapat diambil kesimpulan secara umum hasil komputasi metode Iterasi Baru dengan kekonvergenan orde tiga lebih baik daripada Newton Klasik, Newton dengan aturan Trapesium, Newton Titik Tengah dan Newton dengan fungsi invers, hal ini dapat dilihat dari jumlah iterasi metode Iterasi Baru dengan kekonvergenan orde tiga lebih sedikit.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2nd Ed.* Jhon Wiley & Sons, New York.

[2]. Homeier, H. H. H. 2005. On Newton-Type Methods with Cubic Convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* **176:** 425-432.

[3]. Jisheng Kou, Yitian Li & Xiuhua Wang. 2007. Third-order modification of Newton's method. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 205: 1-5.

[4]. Martono, Koko. 1999. *Kalkulus.* Erlangga, Jakarta.

[5]. Ozban, A.Y.2004. Some New Variants of Newton's Method. *Applied Mathematics Letter.* **17:** 677-682.

[6]. Weerakon, S & T.G.I.Fernando.2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters.* **13:** 87-93.