# METODE RUNGE KUTTA ORDE-4 DENGAN KONTROL GALAT

**Nurma Juita[1*], M. Imran[2], Johannes Kho[2]**

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[*]nuruaja@yahoo.co.id
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

## ABSTRACT

This paper discusses the Runge Kutta method of order-4 (RK (4,4)) with an error control, which is a combination of the Runge Kutta method of order-4 based on an Arithmetic mean (RKAM-4) and the Runge Kutta method of order-4 based on a Contraharmonic mean (RKCoM-4). Difference between approximation of RKAM-4 and RKCoM-4 is used to control the step length of the method. So the RK(4,4) is a method with a variable step length, as well as the Runge Kutta Fehlberg 4(5) (RKF4(5)). Numerical computation is also done in four cases, which are then compared with RKF4(5). The results show that the behavior of RK (4,4) is similar to that of RKF4(5).

**Key words**: *Runge Kutta method of order-4, Runge Kutta Fehlberg 4(5), Arithmetic mean, Contraharmonic mean*

## ABSTRAK

Skripsi ini membahas metode Runge Kutta orde-4 (RK(4,4)) dengan Kontol Galat, yang merupakan kombinasi dari metode Runge Kutta orde-4 berdasarkan rata-rata Aritmatik (RKAM-4) dan metode Runge Kutta orde-4 berdasarkan rata-rata Contra Harmonik (RKCoM-4). Selisih aproksimasi metode RKAM-4 dan metode RKCoM-4 digunakan untuk mengontrol panjang langkah. Sehingga metode RK(4,4) merupakan metode dengan panjang langkah bervariasi, sebagaimana halnya metode Runge Kutta Fehlberg 4(5) (RKF4(5)). Komputasi numerik juga dilakukan dalam beberapa kasus, yang kemudian dibandingkan dengan metode RKF4(5). Hasil perbandingan menunjukkan bahwa galat metode RK(4,4) mendekati galat metode RKF4(5).

**Kata kunci:** *Metode Runge Kutta Orde-4, Metode Runge Kutta Fehlberg 4(5), Rata-rata Aritmatik, Rata-rata Contra Harmonik*

## 1. PENDAHULUAN

Dalam matematika terapan sering ditemui masalah bagaimana menemukan solusi persamaan diferensial dengan nilai awal seperti berikut[1, h.2]

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

dengan $f(x, y)$ merupakan fungsi yang kontinu pada titik $(x, y)$ dalam domain $D$ dan $(x_0, y_0)$ adalah suatu titik pada $D$. Hampiran deret Taylor dapat digunakan untuk menyelesaikan sebarang persamaan diferensial, termasuk persamaan diferensial(1). Namun penerapan deret Taylor mengharuskan ditentukannya terlebih dahulu turunan-turunan dengan fungsi yang lebih tinggi. Hal ini jelas akan menjadi masalah untuk fungsi-fungsi tertentu.

Cara yang lebih efektif dibanding deret Taylor yaitu dengan menggunakan metode Runge Kutta, karena metode ini tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Salah satu metode Runge Kutta yang cukup populer adalah metode Runge Kutta Klasik yang formulanya diberikan oleh

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right], \tag{2}$$

dengan

$$\left.\begin{array}{lcl} k_1 &=& f(x_n, y_n), \\ k_2 &=& f(x_n + a_1 h, y_n + a_1 h k_1), \\ k_3 &=& f(x_n + (a_2 + a_3)h, y_n + a_2 h k_1 + a_3 h k_2), \\ k_4 &=& f(x_n + (a_4 + a_5 + a_6)h, y_n + a_4 h k_1 + a_5 h k_2 + a_6 h k_3). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Orde-4 keakuratan untuk persamaan (2) dan (3) diperoleh bila: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$ dan $a_6 = 1$[6, h.14].

Persamaan (3) dapat ditulis kembali menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left[\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right]. \tag{4}$$

Persamaan (4) bersama persamaan (3) inilah yang dinamakan metode Runge Kutta orde-4 berdasarkan rata-rata Aritmatik (RKAM-4). Galat metode RKAM-4 diberikan oleh

$$G_{AM} = \left|\frac{h^5}{2880}\left(36 f_{yy} f_y^2 f^2 + f_{yyyy} f^4 + 90 f_{yy}^2 f^3 + 2 f_y f_{yyy} f^3 - 24 f f_y^4\right)\right|, \tag{5}$$

Bila diganti rata-rata Aritmatik pada persamaan (4)[8, h.296] dengan dengan rata-rata Contra Harmonik, dan menemukan nilai $a_i, i = 1, \ldots, 6$, yang sesuai dapat ditemukan metode Runge Kutta orde-4 berdasarkan rata-rata Contra Harmonik (RKCoM-4). Selanjutnya dengan memperhatikan strategi penerapan metode Runge Kutta Fehlberg 4(5) [5, h.510], penulis tertarik untuk kombinasikan antara RKAM-4 dan RKCoM-4, yang selanjutnya dinamakan metode Runge Kutta orde-4 (RK(4,4)) dengan Kontrol Galat, yang merupakan kajian detail artikel Evans, D.J. & N. Yaacob [2].

## 2. METODE RUNGE KUTTA ORDE-4 BERDASARKAN RATA-RATA CONTRA HARMONIK

Pandanglah persamaan diferensial dengan nilai awal (1) dalam bentuk autonomous [7] berikut

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{6}$$

Selanjutnya, bila diganti rata-rata Arithmatik pada persamaan (4) dengan menjadi rata-rata Contra Harmonik, dan dengan memperhatikan persamaan diferensial dalam bentuk (6) maka persamaan (4) dan (3) menjadi

$$y_{n+1}^{CoM} = y_n + \frac{h}{3}\left[\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1+k_2} + \frac{k_2^2+k_3^2}{k_2+k_3} + \frac{k_3^2+k_4^2}{k_3+k_4}\right], \tag{7}$$

dengan

$$k_1 = f(y_n), \tag{8}$$
$$k_2 = f(y_n + a_1 h k_1), \tag{9}$$
$$k_3 = f(y_n + a_2 h k_1 + a_3 h k_2), \tag{10}$$
$$k_4 = f(y_n + a_4 h k_1 + a_5 h k_2 + a_6 h k_3). \tag{11}$$

Untuk mendapatkan keakuratan orde-4 terlebih dahulu ditentukan nilai $a_1$, $a_2$, $a_3$,$a_4$, $a_5$ dan $a_6$, dengan mengekspansikan pada persamaan (8)–(11) menggunakan ekspansi Taylor[4, h.134], kemudian disubstitusikan ke persamaan (7). Hasil yang diperoleh ini kemudian di bandingkan dengan hasil ekspansi Taylor $y_{n+1}$ disekitar $x = x_n$ sampai $h^4$. Selanjutnya dengan membandingkan koefisien $h^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ diperoleh sistem persamaan nonlinear dalam $a_1$, $a_2$, $a_3$,$a_4$, $a_5$ dan $a_6$ yang selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan bantuan program Maple 13, dan diperoleh $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{8}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{-3}{4}$ dan $a_6 = \frac{3}{2}$.

Dengan menggunakan nilai $a_i$ ini diperoleh metode RKCoM-4 sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{CoM} = y_n + \frac{h}{3}\left[\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1+k_2} + \frac{k_2^2+k_3^2}{k_2+k_3} + \frac{k_3^2+k_4^2}{k_3+k_4}\right], \tag{12}$$

dengan

$$k_1 = f(y_n), \tag{13}$$
$$k_2 = f(y_n + \frac{h}{2}k_1), \tag{14}$$
$$k_3 = f(y_n + \frac{h}{8}k_1 + \frac{3h}{8}k_2), \tag{15}$$
$$k_4 = f(y_n + \frac{h}{4}k_1 - \frac{3h}{4}k_2 + \frac{3h}{2}k_3). \tag{16}$$

Untuk mendapatkan galat metode RKCoM-4 dilakukan proses yang sama sebagaimana memperoleh metode RKCoM-4, tetapi ekspansi Taylor yang dilakukan sampai $h^5$. Dengan cara ini diperoleh galat metode RKCoM-4 sebagai berikut

$$G_{CoM} = \left|\frac{h^5}{23040}\Big( -4f^3 f_y f_{yyy} + 303 f^2 f_y^2 f_{yy} + 840 f^3 f_{yy}^2 + 8 f^4 f_{yyyy} + 378 f_y^4\Big)\right|. \tag{17}$$

## 3. METODE RUNGE KUTTA ORDE-4 DENGAN KONTROL GALAT

Metode RK(4,4) dibentuk dengan mengkombinasikan metode RKAM-4 dan metode RKCoM-4. Metode ini diberikan dalam bentuk

$$y_{n+1}^{AM} = y_n + \frac{h}{3}\left[\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_2+k_3}{2} + \frac{k_3+k_4}{2}\right], \tag{18}$$

dan

$$y_{n+1}^{CoM} = y_n + \frac{h}{3}\left[\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1+k_2} + \frac{k_2^2+k_5^2}{k_2+k_5} + \frac{k_5^2+k_6^2}{k_5+k_6}\right], \tag{19}$$

dengan

$$k_1 = f(y_n), \tag{20}$$
$$k_2 = f(y_n + \frac{h}{2}k_1), \tag{21}$$
$$k_3 = f(y_n + \frac{h}{2}k_2), \tag{22}$$
$$k_4 = f(y_n + hk_3), \tag{23}$$
$$k_5 = f(y_n + \frac{h}{8}k_1 + \frac{3h}{8}k_2), \tag{24}$$
$$k_6 = f(y_n + \frac{h}{4}k_1 - \frac{3h}{4}k_2 + \frac{3h}{2}k_5). \tag{25}$$

Dari persamaan (20)– (25) terlihat bahwa dalam penerapan metode RK(4,4) diperlukan 6 perhitungan fungsi yaitu $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ dan $k_6$. Hal ini sebanding dengan metode RKF4(5)[3, h.129]. Dengan demikian strategi yang dipakai metode RKF4(5) untuk mendapatkan langkah optimal dapat diterapkan disini.

Bila dihitung selisih pendekatan yang dilakukan dengan metode RKAM-4 dengan metode RKCoM-4 diperoleh

$$\begin{aligned}\left|y_{n+1}^{AM} - y_{n+1}^{CoM}\right| &= |y_n + G_{AM} - y_n - G_{CoM}| \\ &= |G_{AM} - G_{CoM}|\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Dengan menggunakan persamaan (5) dan (17), diperoleh

$$\begin{aligned}|G_{AM} - G_{CoM}| =& \frac{h^5}{23040}\bigg[186ff_y^4 + 16f_{yyyy}f^4 + 12f^3f_yf_{yyy} \\ &+ 912f^3f_{yy}^2 + 591f^2f_y^2f_{yy}\bigg]. \end{aligned} \tag{27}$$

Selanjutnya, dengan mengikuti cara yang disarankan Lotkin (1951) (*lihat* [2]), jika diasumsikan $f$ dan turunan parsialnya terbatas untuk $x \in [a,b]$ dan $y \in [-m,m]$ diperoleh sebagai berikut:

$$|f(x,y)| < Q, \qquad \left|\frac{\partial^{i+j}f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| < \frac{P^{i+j}}{Q^{j-1}}, \qquad i+j \le p, \tag{28}$$

dengan $P$ dan $Q$ adalah konstanta positif, dan $p$ adalah orde dari metode. Jadi untuk kasus disini $p = 4$, dari persamaan (28), didapat

$$|f_y| < P$$

$$\left.\begin{array}{r} \left|f f_y^4\right| < Q^4.P^4 \\ |f_{yyyy} f^4| < \frac{P^4}{Q^3} \cdot Q^4 \\ |f^3 f_y f_{yyy}| < Q^3.P\frac{P^3}{Q^2} \\ \left|f^3 f_{yy}^2\right| < Q^3.\left(\frac{P^2}{Q}\right)^2 \\ \left|f^2 f_y^2 f_{yy}\right| < Q^2.P^2\frac{P^2}{Q}. \end{array}\right\} < P^4 Q \tag{29}$$

Dari persamaan (27) dan persamaan (28) diperoleh

$$|G_{AM} - G_{CoM}| \leq \frac{1717}{23040} P^4 Q h^5, \tag{30}$$

sehingga dari persamaan (26) didapat,

$$\left|y_{n+1}^{AM} - y_{n+1}^{CoM}\right| \leq \frac{1717}{23040} P^4 Q h^5. \tag{31}$$

Jika diberikan toleransi $TOL$, yaitu $\epsilon < 0.00005$, maka dengan menyatakan

$$\left|y_{n+1}^{AM} - y_{n+1}^{CoM}\right| \leq TOL, \tag{32}$$

pengontrolan galat dan penentuan panjang langkah dapat ditentukan dari persamaan (30), sehingga didapat

$$\frac{1717}{23040} P^4 Q h^5 < TOL \tag{33}$$

atau

$$h < \left[\frac{13.45 \times TOL}{P^4 Q}\right]^{\frac{1}{5}}. \tag{34}$$

## 4. PERBANDINGAN NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan perbandingan komputasi numerik antara metode RK(4,4) dan RKF4(5). Sebagai kasus penguji digunakan empat kasus persamaan diferensial berikut
**Kasus 1**

$$y' = -y, \quad y(0) = 1,$$

pada interval $[0, 1]$ dengan solusi eksak $y = e^{-x}$ .
**Kasus 2**

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1,$$

pada interval $[0, 1]$ dengan solusi eksak $y = e^{-x^2}$ .

**Kasus 3**

$$y' = -3x^2y, \quad y(0) = 1,$$

pada interval $[0, 1]$ dengan solusi eksak $y = e^{-x^3}$.

**Kasus 4**

$$y' = x - y + 1, \quad y(0) = 1,$$

pada interval $[0, 1]$ dengan solusi eksak $y = x + e^{-x}$.

Dalam melakukan perbandingan komputasi numerik diperhatikan jumlah perhitungan fungsi, galat eksaks dan galat taksiran dari metode RK(4,4) dan metode RKF4(5). Semua komputasi dilakukan dengan menggunakan program Matlab 7.0.1. Hasil komputasi untuk kasus 1, kasus 2, kasus 3 dan kasus 4 disajikan dengan panjang langkah bervariasi yang panjangnya dikontrol menggunakan kontrol galat yang telah didiskusikan pada bagian 3. Hasil eksak dan galat yang terjadi disetiap langkah diperlihatkan pada Tabel 1–Tabel 8.

Dari Tabel 1–Tabel 8 dapat dilihat bahwa untuk semua kasus nilai galat yang dihasilkan metode RK(4,4) lebih besar dibandingkan nilai galat pada metode. Juga panjang langkah yang dihasilkan metode RK(4,4) lebih kecil dari panjang langkah yang digunakan metode RKF4(5). Hal ini mengakibatkan untuk mencapai $x = 1$, pada setiap kasus metode RK(4,4) membutuhkan perhitungan fungsi yang lebih banyak dari pada metode RKF4(5). Walaupun demikian Metode RK(4,4) yang dijadikan pembahasan disini dapat digunakan sebagai metode alternatif yang panjang langkahnya dapat di atur secara otomatis sebagaimana metode RKF4(5).

Tabel 1: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 1 metode RK(4,4)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $\lvert G_{AM} - G_{CoM}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ———- | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 0.99221794 | 1.00000000 | 7.7821e-003 | 7.2264e-013 |
| 12 | 0.03906250 | 0.04687500 | 0.95420667 | 0.99221794 | 3.8011e-002 | 2.2743e-009 |
| 18 | 0.19531250 | 0.24218750 | 0.78491118 | 0.95420667 | 1.6930e-001 | 7.4132e-006 |
| 24 | 0.06250000 | 0.30468750 | 0.73735582 | 0.78490899 | 4.7553e-002 | 7.4323e-006 |
| 30 | 0.06250000 | 0.36718750 | 0.69268170 | 0.73735376 | 4.4672e-002 | 7.4502e-006 |
| 36 | 0.06250000 | 0.42968750 | 0.65071424 | 0.69267976 | 4.1966e-002 | 7.4671e-006 |
| 42 | 0.06250000 | 0.49218750 | 0.61128946 | 0.65071241 | 3.9423e-002 | 7.4829e-006 |
| 48 | 0.06250000 | 0.55468750 | 0.57425331 | 0.61128774 | 3.7034e-002 | 7.4977e-006 |
| 54 | 0.06250000 | 0.61718750 | 0.53946107 | 0.57425169 | 3.4791e-002 | 7.5117e-006 |
| 60 | 0.06250000 | 0.67968750 | 0.50677678 | 0.53945954 | 3.2683e-002 | 7.5248e-006 |
| 66 | 0.06250000 | 0.74218750 | 0.47607273 | 0.50677533 | 3.0703e-002 | 7.5371e-006 |
| 72 | 0.06250000 | 0.80468750 | 0.44722894 | 0.47607137 | 2.8842e-002 | 7.5487e-006 |
| 78 | 0.06250000 | 0.86718750 | 0.42013272 | 0.44722766 | 2.7095e-002 | 7.5595e-006 |
| 84 | 0.06250000 | 0.92968750 | 0.39467816 | 0.42013151 | 2.5453e-002 | 7.5698e-006 |
| 90 | 0.06250000 | 0.99218750 | 0.37076583 | 0.39467703 | 2.3911e-002 | 7.5793e-006 |
| 96 | 0.00781250 | 1.00000000 | 0.36788050 | 0.37076476 | 2.8843e-003 | 7.5793e-006 |

Tabel 2: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 1 metode RKF4(5)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $G_{RKF}^{4,5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ———- | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 0.99221794 | 0.99221794 | 2.2204e-016 | 3.7422e-014 |
| 12 | 0.03125000 | 0.03906250 | 0.96169060 | 0.96169060 | 8.3344e-013 | 3.8355e-011 |
| 18 | 0.12500000 | 0.16406250 | 0.84868897 | 0.84868898 | 3.2419e-009 | 3.9390e-008 |
| 24 | 0.50000000 | 0.66406250 | 0.51474508 | 0.51475589 | 1.0805e-005 | 4.0377e-005 |
| 30 | 0.06250000 | 0.72656250 | 0.48356840 | 0.48356840 | 2.7485e-011 | 6.4412e-010 |
| 36 | 0.25000000 | 0.97656250 | 0.37660335 | 0.37660345 | 1.0153e-007 | 6.6219e-007 |
| 42 | 0.02343750 | 1.00000000 | 0.36787944 | 0.36787944 | 5.6399e-014 | 3.4447e-012 |

Tabel 3: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 2 metode RK(4,4)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $\|G_{AM} - G_{CoM}\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ———- | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 0.99993897 | 1.00000000 | 6.1033e-005 | 1.3563e-005 |
| 12 | 0.03906250 | 0.04687500 | 0.99780515 | 0.99993897 | 2.1338e-003 | 2.2174e-004 |
| 18 | 0.06250000 | 0.10937500 | 0.98810838 | 0.99780515 | 9.6968e-003 | 4.9063e-004 |
| 24 | 0.06250000 | 0.17187500 | 0.97089105 | 0.98810838 | 1.7217e-002 | 6.3095e-004 |
| 30 | 0.06250000 | 0.23437500 | 0.94654985 | 0.97089106 | 2.4341e-002 | 7.2192e-004 |
| 36 | 0.06250000 | 0.29687500 | 0.91563747 | 0.94654985 | 3.0912e-002 | 7.8557e-004 |
| 42 | 0.06250000 | 0.35937500 | 0.87884179 | 0.91563747 | 3.6796e-002 | 8.3134e-004 |
| 48 | 0.06250000 | 0.42187500 | 0.83696040 | 0.87884179 | 4.1881e-002 | 8.6428e-004 |
| 54 | 0.06250000 | 0.48437500 | 0.79087201 | 0.83696040 | 4.6088e-002 | 8.8750e-004 |
| 60 | 0.06250000 | 0.54687500 | 0.74150583 | 0.79087200 | 4.9366e-002 | 9.0313e-004 |
| 66 | 0.06250000 | 0.60937500 | 0.68981084 | 0.74150582 | 5.1695e-002 | 9.1275e-004 |
| 72 | 0.06250000 | 0.67187500 | 0.63672593 | 0.68981082 | 5.3085e-002 | 9.1759e-004 |
| 78 | 0.06250000 | 0.73437500 | 0.58315250 | 0.63672590 | 5.3573e-002 | 9.1867e-004 |
| 84 | 0.06250000 | 0.79687500 | 0.52993040 | 0.58315245 | 5.3222e-002 | 9.1683e-004 |
| 90 | 0.06250000 | 0.85937500 | 0.47781811 | 0.52993031 | 5.2112e-002 | 9.1278e-004 |
| 96 | 0.06250000 | 0.92187500 | 0.42747772 | 0.47781799 | 5.0340e-002 | 9.0713e-004 |
| 102 | 0.06250000 | 0.98437500 | 0.37946477 | 0.42747755 | 4.8013e-002 | 9.0041e-004 |
| 108 | 0.01562500 | 1.00000000 | 0.36787967 | 0.37946453 | 1.1585e-002 | 9.0030e-004 |

Tabel 4: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 2 metode RKF4(5)

| $i$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $G_{RKF}^{4,5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ——– | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 0.99993897 | 0.99993897 | 1.2212e-015 | 2.1858e-016 |
| 12 | 0.03125000 | 0.03906250 | 0.99847528 | 0.99847528 | 5.0465e-012 | 1.3563e-012 |
| 18 | 0.12500000 | 0.16406250 | 0.97344250 | 0.97344252 | 1.8508e-008 | 8.8782e-009 |
| 30 | 0.06250000 | 0.22656250 | 0.94996459 | 0.94996459 | 1.5767e-010 | 1.5268e-009 |
| 36 | 0.25000000 | 0.47656250 | 0.79683235 | 0.79683168 | 6.7510e-007 | 2.9078e-006 |
| 42 | 0.06250000 | 0.53906250 | 0.74782344 | 0.74782343 | 4.8184e-010 | 3.6020e-009 |
| 48 | 0.25000000 | 0.78906250 | 0.53654038 | 0.53653707 | 3.3116e-006 | 5.1505e-006 |
| 54 | 0.06250000 | 0.85156250 | 0.48424772 | 0.48424772 | 2.6157e-010 | 1.0387e-009 |
| 60 | 0.14843750 | 1.00000000 | 0.36787943 | 0.36787944 | 1.3796e-008 | 2.9259e-007 |

Tabel 5: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 3 metode RK(4,4)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $\|G_{AM} - G_{CoM}\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ——– | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 0.99999952 | 1.00000000 | 4.7684e-007 | 1.6689e-007 |
| 12 | 0.03906250 | 0.04687500 | 0.99989701 | 0.99999952 | 1.0251e-004 | 2.5489e-005 |
| 18 | 0.04442150 | 0.09129650 | 0.99923933 | 0.99989701 | 6.5768e-004 | 6.8111e-005 |
| 24 | 0.04442150 | 0.13571800 | 0.99750328 | 0.99923933 | 1.7360e-003 | 1.1140e-004 |
| 30 | 0.04442150 | 0.18013950 | 0.99417148 | 0.99750328 | 3.3318e-003 | 1.5468e-004 |
| 36 | 0.04442150 | 0.22456099 | 0.98873979 | 0.99417148 | 5.4317e-003 | 1.9765e-004 |
| 42 | 0.04442150 | 0.26898249 | 0.98072684 | 0.98873979 | 8.0130e-003 | 2.4001e-004 |
| 48 | 0.04442150 | 0.31340399 | 0.96968579 | 0.98072684 | 1.1041e-002 | 2.8148e-004 |
| 54 | 0.04442150 | 0.35782549 | 0.95521804 | 0.96968579 | 1.4468e-002 | 3.2170e-004 |
| 60 | 0.04442150 | 0.40224699 | 0.93698817 | 0.95521804 | 1.8230e-002 | 3.6031e-004 |
| 66 | 0.04442150 | 0.44666849 | 0.91473941 | 0.93698817 | 2.2249e-002 | 3.9692e-004 |
| 72 | 0.04442150 | 0.49108999 | 0.88830878 | 0.91473941 | 2.6431e-002 | 4.3115e-004 |
| 78 | 0.04442150 | 0.53551149 | 0.85764073 | 0.88830879 | 3.0668e-002 | 4.6258e-004 |
| 84 | 0.04442150 | 0.57993298 | 0.82279814 | 0.85764073 | 3.4843e-002 | 4.9086e-004 |
| 90 | 0.04442150 | 0.62435448 | 0.78396967 | 0.82279815 | 3.8828e-002 | 5.1567e-004 |
| 96 | 0.04442150 | 0.66877598 | 0.74147219 | 0.78396967 | 4.2497e-002 | 5.3673e-004 |
| 102 | 0.04442150 | 0.71319748 | 0.69574758 | 0.74147219 | 4.5725e-002 | 5.5384e-004 |
| 108 | 0.04442150 | 0.75761898 | 0.64735331 | 0.69574758 | 4.8394e-002 | 5.6692e-004 |
| 114 | 0.04442150 | 0.80204048 | 0.59694657 | 0.64735330 | 5.0407e-002 | 5.7594e-004 |
| 120 | 0.04442150 | 0.84646198 | 0.54526241 | 0.59694654 | 5.1684e-002 | 5.8103e-004 |
| 126 | 0.04442150 | 0.89088347 | 0.49308667 | 0.54526236 | 5.2176e-002 | 5.8238e-004 |
| 132 | 0.04442150 | 0.93530497 | 0.44122507 | 0.49308659 | 5.1862e-002 | 5.8031e-004 |
| 138 | 0.04442150 | 0.97972647 | 0.39047022 | 0.44122493 | 5.0755e-002 | 5.7523e-004 |
| 144 | 0.02027353 | 1.00000000 | 0.36787965 | 0.39047000 | 2.2590e-002 | 5.7453e-004 |

Tabel 6: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 3 metode RKF4(5)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $G^{4,5}_{RKF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ———- | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 0.99999952 | 0.99999952 | 1.6653e-015 | 9.1761e-016 |
| 12 | 0.03125000 | 0.03906250 | 0.99994040 | 0.99994040 | 6.9454e-012 | 5.4392e-012 |
| 18 | 0.12500000 | 0.16406250 | 0.99559372 | 0.99559375 | 3.0118e-008 | 2.4490e-008 |
| 30 | 0.06250000 | 0.22656250 | 0.98843778 | 0.98843778 | 5.4701e-010 | 1.2960e-009 |
| 36 | 0.25000000 | 0.47656250 | 0.89741371 | 0.89741850 | 4.7830e-006 | 2.9994e-006 |
| 42 | 0.06250000 | 0.53906250 | 0.85500728 | 0.85500728 | 6.7923e-010 | 2.8064e-009 |
| 48 | 0.25000000 | 0.78906250 | 0.61184282 | 0.61183918 | 3.6348e-006 | 1.1200e-005 |
| 54 | 0.06250000 | 0.85156250 | 0.53928131 | 0.53928130 | 4.5276e-009 | 1.6684e-008 |
| 60 | 0.14843750 | 1.00000000 | 0.36788049 | 0.36787944 | 1.0440e-006 | 9.4383e-007 |

Tabel 7: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 4 metode RK(4,4)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $\|G_{AM} - G_{CoM}\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ———- | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 1.00003044 | 1.00000000 | 3.0438e-005 | 6.7967e-006 |
| 12 | 0.03906250 | 0.04687500 | 1.00108167 | 1.00003044 | 1.0512e-003 | 1.1189e-004 |
| 18 | 0.19531250 | 0.24218750 | 1.02709868 | 1.00108167 | 2.6017e-002 | 2.6714e-003 |
| 24 | 0.06250000 | 0.30468750 | 1.04204332 | 1.02709649 | 1.4947e-002 | 2.7052e-003 |
| 30 | 0.06250000 | 0.36718750 | 1.05986920 | 1.04204126 | 1.7828e-002 | 2.7317e-003 |
| 36 | 0.06250000 | 0.42968750 | 1.08040174 | 1.05986726 | 2.0534e-002 | 2.7534e-003 |
| 42 | 0.06250000 | 0.49218750 | 1.10347696 | 1.08039991 | 2.3077e-002 | 2.7715e-003 |
| 48 | 0.06250000 | 0.55468750 | 1.12894081 | 1.10347524 | 2.5466e-002 | 2.7869e-003 |
| 54 | 0.06250000 | 0.61718750 | 1.15664857 | 1.12893919 | 2.7709e-002 | 2.8002e-003 |
| 60 | 0.06250000 | 0.67968750 | 1.18646428 | 1.15664704 | 2.9817e-002 | 2.8118e-003 |
| 66 | 0.06250000 | 0.74218750 | 1.21826023 | 1.18646283 | 3.1797e-002 | 2.8221e-003 |
| 72 | 0.06250000 | 0.80468750 | 1.25191644 | 1.21825887 | 3.3658e-002 | 2.8311e-003 |
| 78 | 0.06250000 | 0.86718750 | 1.28732022 | 1.25191516 | 3.5405e-002 | 2.8393e-003 |
| 84 | 0.06250000 | 0.92968750 | 1.32436566 | 1.28731901 | 3.7047e-002 | 2.8465e-003 |
| 90 | 0.06250000 | 0.99218750 | 1.36295333 | 1.32436453 | 3.8589e-002 | 2.8531e-003 |
| 96 | 0.00781250 | 1.00000000 | 1.36788050 | 1.36295226 | 4.9282e-003 | 2.8531e-003 |

Tabel 8: Galat Hasil Perhitungan untuk Kasus 4 metode RKF4(5)

| $n$ | $h$ | $x_i$ | $y_i$ | $y_{eksak}$ | $G_{eksak}$ | $G^{4,5}_{RKF}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ———- | 0.00000000 | 1.00000000 | | | |
| 6 | 0.00781250 | 0.00781250 | 1.00003044 | 1.00003044 | 0.0000e+000 | 3.7422e-014 |
| 12 | 0.03125000 | 0.03906250 | 1.00075310 | 1.00075310 | 8.3378e-013 | 3.8355e-011 |
| 18 | 0.12500000 | 0.16406250 | 1.01275147 | 1.01275148 | 3.2419e-009 | 3.9390e-008 |
| 24 | 0.50000000 | 0.66406250 | 1.17880758 | 1.17881839 | 1.0805e-005 | 4.0377e-005 |
| 30 | 0.06250000 | 0.72656250 | 1.21013090 | 1.21013090 | 2.7485e-011 | 6.4412e-010 |
| 36 | 0.25000000 | 0.97656250 | 1.35316585 | 1.35316595 | 1.0153e-007 | 6.6219e-007 |
| 42 | 0.02343750 | 1.00000000 | 1.36787944 | 1.36787944 | 5.6399e-014 | 3.4447e-012 |

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Butcher, J.C. 2003. *Numerical Methods For Ordinary Differential Equetions.* Willey, New Zealand.

[2] Evans, D.J. & N. Yaacob. 1996. A Fourth Order Runge Kutta RK(4,4) Method With Error Cotrol. *Intern. J. Computer Math*, **58**: 383-411.

[3] Forsythe, G.E & Michael.A.M. 1977. *Computer Methods For Mathematical Computations.* Prentice & Hall, New Jersey.

[4] Martono, K. 1999. *Kalkulus.* Erlangga, Bandung.

[5] Passos, W. D. 2010. *Numerical Methods, Algorithms and Tools in.* CRC Press, New York.

[6] Rahmila, E. 2010. Metode Runge-Kutta Orde-4 berdasarkan rata-rata Geometri dan rata-rata. *Skripsi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau*, Pekanbaru.

[7] Shampine, L. P. 1994. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equation.* Chapman & Hall, New York.

[8] Wood, A. 1999. *Introduction to Numerical Analysis.* Addison-Wesley, England.