

MODEL PREDATOR-PREY DENGAN POPULASI TERINFEKSI DAN PENYEBARAN INFEKSI MELALUI PREDASI

Khozin Mu'tamar

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Riau
email: khozin.mutamar@unri.ac.id

ABSTRACT

Predator –prey model is used to analize behaviour of interaction two population which are predator and prey. Basically, this model assume both of predator and prey are healthy. In this article, we develop alternative approach to describe predator-prey model with infected population. Infected population will conduct behaviour between predator and prey population. Stability analysis is done locally using Routh-Hurwitz criterion. In the end of this article, simulation is given to show comparison between numerical solution of nonlinear system with linearized.

Keywords: *Predator-prey model, Routh-Hurwitz criterion, Infected Population*

PENDAHULUAN

Hubungan antar individu merupakan hal alamiah yang selalu terjadi di dunia. Beberapa individu melakukan interaksi untuk mendukung kelangsungan hidup mereka. Interaksi yang dilakukan merupakan wujud mempertahankan kelangsungan hidup berupa memangsa individu dari jenis lain. Beberapa interaksi yang lain dilakukan sebagai wujud penguasaan terhadap suatu wilayah. Hal ini biasanya dilakukan oleh populasi yang memiliki kekuatan lebih dibandingkan populasi lainnya.

Salah satu wilayah, kadangkala, terdapat dua atau lebih populasi yang saling berinteraksi. Salah satu populasi merupakan pemangsa bagi populasi lainnya. Contoh dalam kehidupan nyata adalah kehidupan ikan Gabus dan ikan Nila dalam suatu kolam. Ikan Gabus yang memangsa ikan predator akan berburu dan memangsa ikan Nila untuk bertahan hidup. Selain itu, kehidupan Kelinci dan Serigala dalam suatu wilayah juga bersifat mangsa-pemangsa. Serigala membutuhkan Kelinci untuk dapat bertahan hidup karena sifat Serigala yang karnivora.

Perilaku hubungan populasi yang bersifat mangsa-pemangsa dapat dianalisa secara matematis. Dalam matematika, perilaku ini dianalisa dengan model yang dikenal dengan Model Predator-Prey. Model ini menganalisa dua buah populasi yang hidup dalam suatu wilayah, dimana satu populasi bersifat pemangsa dan yang lainnya sebagai mangsa. Model yang digunakan berupa sistem persamaan diferensial biasa, yang berfungsi mengamati perubahan jumlah individu di masing-masing populasi setiap waktunya.

Model yang sudah terbentuk terdiri atas dua buah persamaan diferensial biasa nonlinear yang masing-masingnya menggambarkan laju perubahan jumlah populasi mangsa dan pemangsa. Pada pembentukan model ini, diasumsikan bahwa kedua populasi dalam kondisi sehat. Halikatkanya, asumsi ini tidak sepenuhnya benar karena dalam sebuah populasi, ada kemungkinan beberapa individu dalam kondisi sakit. Kondisi individu yang sakit akan mengakibatkan menurunnya kemampuan bertahan hidup alaminya. Selain itu, individu yang sakit lebih mudah untuk diserang oleh pemangsa dan bagi pemangsa akan membuatnya sukar



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan buku, dan lain-lain;
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
Dilarang memperjualbelikan atau menyebarkan secara komersial atau seluruh atau sebagian dari isi atau gambar yang terdapat dalam karya tulis ini dalam bentuk apa pun.

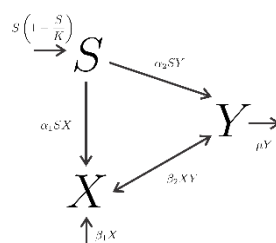
untuk berburu. Mangsa yang terinfeksi penyakit juga secara langsung akan mempengaruhi kondisi pemangsa karena beberapa penyakit dapat ditularkan melalui makanan.

Beberapa penelitian mengenai model predator-prey dengan melibatkan populasi yang terinfeksi telah dilakukan. Model predator-prey dengan infeksi hanya pada mangsa telah diteliti ada [1,8,11,12,14,15, 17,19,20,21]. Khusus untuk infeksi pada predator telah diteliti pada [4,6,18], sedangkan untuk infeksi yang terjadi di kedua populasi mangsa dan pemangsa telah dikaji dalam [2,3,5,7,9,10,13,16]. Pada [11], model predator prey diterapkan pada pertumbuhan virus pada jaringan komputer. Model infeksi pada mangsa dengan batasan bahwa mangsa tidak bisa berkembang biak dan tumbuh dianalisis pada [1]. [12] meneliti model dengan mempertimbangkan penyebaran infeksi pada mangsa secara bilinear. Konsep susceptible-infectible-susceptible diterapkan pada infeksi mangsa pada [8,14,17] dan pada [8] mengkaji bahwa mangsa yang terinfeksi secara SIS lebih memiliki tingkat kerawanan untuk dipredasi lebih besar. Kombinasi penyebaran infeksi dengan Gower Holling pada pertumbuhan populasi pemangsa dikaji pada [19,21].

Berdasarkan penjabaran di atas, pada paper ini akan dikaji model predator-prey dengan infeksi pada populasi prey. Selanjutnya, populasi prey akan memberi efek kematian bagi predator yang memangsanya. Selanjutnya, paper ini disusun berdasarkan sistematika berikut ini. Perumusan model diberikan setelah bab ini. Analisis kualitatif kestabilan model secara lokal di sekitar titik ekuilibrium diberikan pada bagian tiga. Simulasi numerik diberikan pada bagian empat. Akhirnya, kesimpulan dari paper ini diberikan pada bagian akhir paper ini.

PERUMUSAN MODEL PREDATOR-PREY DENGAN INFEKSI PADA PREY

Misalkan didefinisikan $S(t), X(t), Y(t)$ sebagai jumlah populasi yaitu pemangsa, mangsa sehat, dan mangsa sakit pada suatu wilayah pada waktu t yang diasumsikan membaur secara merata. Hubungan antara keduanya diberikan pada Gambar (1).



Gambar 1. Skema ubungan antara ketiga populasi di wilayah tertutup

- Asumsi yang digunakan dalam perumusan model ini adalah
- Pemangsa akan tumbuh secara logistik dengan *carrying capacity* K
 - Pemangsa akan sakit dan mati ketika berinteraksi dengan mangsa yang sakit, dengan laju sebesar α_2 .
 - Mangsa saling berinteraksi dengan proporsi intensitas penyebaran infeksi sebesar β_2 .
 - Hanya mangsa sehat yang bisa tumbuh, dengan laju pertumbuhan proporsional sebesar α_1 .
 - Mangsa sakit akan mati dengan laju proporsional sebesar μ dan akan berkurang sebesar α_2 .

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, rumusan masalah untuk model predator-prey dengan infeksi di populasi dengan skema



$$\begin{aligned} S' &= S \left(1 - \frac{S}{K} \right) + \alpha_1 SX - \alpha_2 SY \\ X' &= \beta_1 X - \alpha_1 SX - \beta_2 XY \\ Y' &= \beta_2 XY - \alpha_2 SY - \mu Y \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^+$ untuk $i = 1, 2$.

Analisis Kualitatif Kestabilan Model

Pertama, sistem ini memiliki enam (6) titik ekuilibrium. Terdapat beberapa titik ekuilibrium yang tidak bergantung pada nilai parameter dari model ini, diantaranya adalah titik ekuilibrium trivial $E_0(0,0,0)$ dan titik ekuilibrium bebas mangsa $E_1(K,0,0)$. Selanjutnya, titik ekuilibrium lain yang bergantung nilai parameter adalah

$$E_2\left(0, \frac{\mu}{\beta_2}, \frac{\beta_1}{\beta_2}\right), E_3(S^*, X^*, Y^*)$$

dengan S^*, X^*, Y^* diberikan oleh

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{K(\mu\alpha_1 - \alpha_2\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2} \\ X^* &= \frac{K\mu\alpha_1\alpha_2 - K\alpha_2^2\beta_1 + K\alpha_2\beta_2 + \mu\beta_2}{\beta_2^2} \\ Y^* &= \frac{K\mu\alpha_1^2 - K\alpha_1\alpha_2\beta_1 + K\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2}{\beta_2^2} \end{aligned}$$

Proposisi 1. Titik ekuilibrium trivial E_0 dan bebas mangsa E_1 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Bukti: Matriks Jacobian dari sistem Persamaan (1) dapat dituliskan dengan

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 X - \alpha_2 X & \alpha_1 S & -\alpha_2 S \\ \alpha_1 X & \alpha_1 S - \beta_2 Y + \beta_1 & -\beta_2 X \\ \alpha_2 X & \beta_2 Y & -\alpha_2 S + \beta_2 X - \mu \end{pmatrix}$$

Substitusikan titik ekuilibrium E_0 akan menghasilkan persamaan karakteristik

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \beta_1)\lambda^2 - (\mu\beta_1 + \mu - \beta_1)\lambda + \mu\beta_1 = 0$$

yang dipenuhi oleh nilai eigen $\lambda_0 = \{1, \beta_1, -\mu\}$. Titik ekuilibrium E_0 tidak stabil karena

Untuk E_1 dengan proses yang sama, diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - (\alpha_2 K - \mu + \beta_1 - 1)\lambda^2 \\ &+ (K\alpha_1\alpha_2 - K\mu\alpha_1 + K\alpha_2\beta_1 + \alpha_1 K - \alpha_2 K + \mu\beta_1 - \mu + \beta_1)\lambda \\ &- (\alpha_1 K + \beta_1)) = 0 \end{aligned}$$

yang dipenuhi oleh nilai eigen $\lambda_1 = \{-1, K\alpha_1 + \beta_1, -K\alpha_2 - \mu\}$. Jelas bahwa $K\alpha_1 + \beta_1 > 0$

sehingga titik ekuilibrium E_1 juga tidak stabil.

Selanjutnya, oleh karena model melibatkan enam (6) parameter, akan dilakukan penyederhanaan dengan menentukan nilai beberapa parameter. Jika diinginkan untuk menganalisis hubungan antara pemangsa dan mangsa sakit, maka parameter selain α_2, β_2

ditentukan nilainya secara spesifik. Misalkan dipilih $K = 1, \mu = 0.01, \beta_1 = 0.8$ dan $\alpha_1 = 0.05$.

5. Titik ekuilibrium E_2 selanjutnya dapat dituliskan menjadi





Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip atau menjiplak seluruh atau sebagian isi dari karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber.

a. Pengutipan harus mencantumkan sumber, penulisan, penelitian, dan penyusunan laporan, penulisan karya tulis ini.

b. Pengutipan tidak boleh menimbulkan kesalahan atau kesalahpahaman.

2. Dilarang mengutip atau menjiplak seluruh atau sebagian isi dari karya tulis ini dan menggunakannya untuk tujuan yang merugikan atau melanggar hukum.

Daftar Pustaka

(1) = {0.001, 0.21, 16.01}.

Bidang fase ditunjukkan pada Gambar (5).

Gambar 5. Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_2 .

Gambar 3.

Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_0 .

Gambar 3) menunjukkan bahwa populasi akan menjauhi titik $E_1(0)$ walaupun komposisi awal populasi berada di sekitar titik ekuilibrium E_0 .

Nilai awal kedua dipilih di sekitar titik ekuilibrium E_1 yaitu $E(0) = \{1, 0.001, 0.001\}$ dan bidang fase dari nilai awal ini ditunjukkan pada Gambar (4).

Gambar 4.

Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_1 .

awal ketiga dipilih di sekitar titik ekuilibrium $E_2 = \{0, 0.2, 16\}$ yaitu $E(0) = \{0.001, 0.21, 16.01\}$.

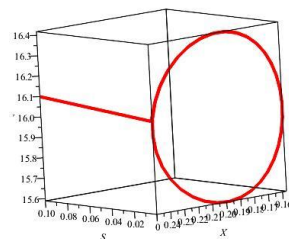
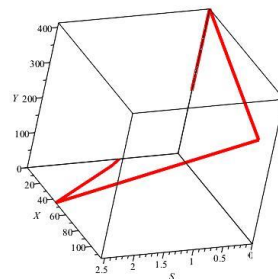
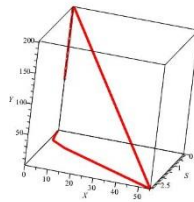
Bidang fase ditunjukkan pada Gambar (5).

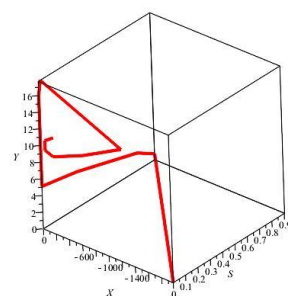
Gambar 5.

Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_2 .

Gambar 5) menunjukkan bahwa dari nilai awal $E_2(0)$ sistem bergerak menuju titik E_2 . Ketika populasi akan berkembang secara stabil. Terlihat dari gambar populasi membentuk

Berikutnya, dipilih parameter pada daerah yang mengakibatkan ketidak stabilan pada titik ekuilibrium E_2 . Misalkan dipilih nilai parameter $\alpha_2 = 0.1, \beta_2 = 0.1$. Menggunakan parameter yang baru, diperoleh titik ekuilibrium $E_2 = \{0, 0.1, 8\}$ dan dipilih nilai awal di sekitar E_2 yaitu $E_2(0) = \{0.1, 0.5, 10\}$. Ruang fase untuk model ditunjukkan pada Gambar (6). Gambar (6) terlihat bahwa dari populasi awal, sistem bergerak menjauhi titik ekuilibrium E_2 dan tidak pernah mencapai E_2 sepanjang waktu t .





Gambar 6. Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_2 dengan parameter yang dipilih sedemikian sehingga sistem tidak stabil.

KESIMPULAN

Model predator-prey dengan infeksi pada prey yang mengakibatkan kematian pada predator telah dikaji dalam paper ini. Secara kualitatif, terdapat empat titik kesetimbangan pada model dimana tiga diantaranya bersifat tidak stabil sedangkan yang lain, kestabilannya sangat tergantung kepada nilai parameter yang dipilih. Hasil numerik juga menunjukkan bahwasanya, perilaku model di sekitar titik kesetimbangan tidak stabil. Hal ini dapat ditunjukkan dari menjauhnya sistem dari titik kesetimbangan dengan pemilihan nilai awal yang cukup dekat.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Riau atas bantuannya sehingga penelitian ini dapat terlaksana.

REFERENSI

1. A El abdllaoui, J Mikram and J Chattopadhyay, Infection in prey population may act as a biological control in ratio-dependent predator-prey models, *Nonlinearity* 17 (2004) 1101–1116
2. A El abdllaoui dan Frank M. Hilker, Predator-prey oscillations can shift when diseases become endemic, *Journal of Theoretical Biology*, 316 (2013) pp. 1–8
3. A. Maiti, G. P. Samanta, A Prey-predator Model with Infection in Both Prey and Predator, *Filomat* 29:8 (2015), 1753–1767
4. A mathematical study of a predator-prey dynamics with disease in predator, *ISRN Applied mathematics* Vol. 2011 Article ID 807486
5. B. D. Saini, H. Saini, T.C. Panda, A. Mishra, Predator-Prey Model for Infectious Virtual Machines in IaaS Cloud Environment Based on Lotka-Volterra Equation, *Asian Journal of Information Technology*, 14(3):84-91, 2015
6. H. Saini, A.I.B. MD. Ismail dan N.M. Ali, Effect of Predators on the Spread of Hantavirus Infection, *Sains Malaysiana* 43(7)(2014): 1045–1051
7. Z. Ma, Four Predator Prey Models with Infectious Diseases, *Mathematical and Computer Modelling* 34 (2001) 849-858
8. W. Wang, L. Han, Zhien Ma, A predator-prey model with infected prey, *Theoretical Population Biology* 66 (2004) 259 – 268



- Y.H. Hsieh, C.K. Hsiao, Predator-prey model with disease infection in both populations, *Mathematical Medicine and Biology* (2008) 25, 247 -266, doi:10.1093/imammb/dqn017
- A. Hugo, E.S. Massawe and O.D. Makinde, An eco-epidemiological mathematical model with treatment and disease infection in both prey and predator population, *Journal of Ecology and the Natural Environment*, Vol. 4(10), pp. 266-279, July 2012.
- M. Kumar, Bimal Kumar Mishra and T. C. Panda, Predator-Prey Models on Interaction between Computer Worms, Trojan Horse and Antivirus Software Inside a Computer System, *International Journal of Security and Its Applications*, Vol. 10, No. 1 (2016), pp.1 73-1 90
- Md. S. Rahman, Santabrata Chakravarty, A predator-prey model with disease in prey, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2013, Vol. 18, No. 2, 191–209
- S.Z. Ridat, M. Khalil, H.A. Hosham, S. Gadellah, predator-prey fractional-order dynamical system with both the populations affected by diseases, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 5(3S) No. 13, pp. 1-11.
- A. E. Cahyono, Mukhsar, G.A. Rahman, Y.T. Hewindati, F.A.A. Faeldog, F.A. Abdullah, Dynamics of Disease Spread in a Predator-Prey System, *Advanced Studies in Biology*, vol. 6, 2014, no. 4, 169 – 179
- O.P. Misra a, J. Dhar, Modelling a predator-prey system with infected prey in polluted environment, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (2010) 1861–1872
- B. Bhatt, DMG Comission. A modifid predator-prey model for the interaction of police and gangs. *R. Soc. open sci.* 3: 160083. <http://dx.doi.org/10.1098/rsos.160083>
- M. Gunasekaran, Dynamics in a Harvested Prey-Predator Model with Susceptible-Infected-Susceptible (SIS) Epidemic Disease in the Prey, *Advances in Applied Mathematical Biosciences*. ISSN 2248-9983 Volume 7, Number 1 (2016), pp. 23-31
- R.D. Demasse and S. Bowong, Predator-Prey Model with Prey Harvesting, Holling Response Function of Type III and SIS Disease, *Biomath 1* (2012), 1210231, 1–7.
- Zhihui Ma, Analysis of an Ecoepidemiological model with prey refuges, *Journal of applied mathematics* vol. 2012.
- Y. Abu Hasan, A predator-infected prey model with harvesting of infected prey, *ScienceAsia* 39S (2013): 37–41
- Jingan Cui, Xiangyun Shi, Xinyu Song, A modified Leslie-Gower predator-prey model with prey infection, *J Appl Math Comput* (2010) 33: 471–487

