

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang menguraikan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



ANALISIS METRIK FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER DALAM MENENTUKAN MODEL-MODEL KOSMOLOGI

Mhd Yasir¹, Erwin Amirudin²

¹Mahasiswa Program S1 Fisika

²Dosen Bidang Instrumentasi dan Kemagnetan Jurusan Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Kampus Bina Widya Pekanbaru, 28293, Indonesia
mhdyasir46@gmail.com

Abstrack

In this paper, the Friedmann-Robertson-Walker metric for spherical coordinates and addition time coordinates has been explored. The method used in this research was driving the equations obtained from Einstein's equations by ignoring the pressure and cosmological constant known as the Friedmann model. Then determine the final solution of the equation obtained from the Friedmann model by reviewing each case, for case $k = 1$, case $k = 0$, and case $k = -1$. The final solution obtained from each case is simulated in graphical form.

Keywords: *Friedmann-Robertson-Walker metric, Einstein equation, Friedmann model.*

Abstrak

Dalam makalah ini, ditinjau metrik Friedman-Robertson-Walker untuk koordinat bola ditambah koordinat waktu. Metode yang digunakan adalah metode analisis dengan memecahkan persamaan yang diperoleh dari persamaan Einstein dengan cara mengabaikan tekanan dan konstanta kosmologi yang dikenal sebagai model Friedmann. Kemudian menentukan solusi akhir persamaan yang diperoleh dari model Friedmann dengan meninjau masing-masing kasus, untuk kasus $k = 1$, kasus $k = 0$, kasus $k = -1$. Solusi akhir yang diperoleh dari masing-masing kasus disimulasikan dalam bentuk grafik.

Kata kunci : *Metrik Friedmann-Robertson-Walker, persamaan Einstein, model Friedmann.*

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang menggunakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa ijin Universitas Riau.

PENDAHULUAN

Persamaan gravitasi Einstein berguna untuk menentukan persamaan ruang-waktu alam semesta. Solusi persamaan Einstein menggambarkan seluruh alam semesta karena menggambarkan seluruh ruang-waktu (**Cheng Ta-Pei, 2005**). Metrik dapat digunakan dalam menafsirkan geometri alam semesta secara benar dan sepenuhnya dalam memahami gagasan luminositas dan jarak dalam kosmologi (**Liddle, 2003, Ryden, 2006**). Menurut prinsip kosmologi alam semesta bersifat homogen dan isotropik (**Hamilton, 2014, Lambourne, 2010**).

Pernyataan bahwa alam semesta merupakan homogen dan isotropik bukan berarti metrik juga homogen dan isotropik, namun maksudnya bahwa memungkinkan untuk menentukan kerangka acuan seperti metrik, yang merupakan fungsi koordinat, tidak bergantung pada lokasi asal dan orientasi sumbu (**Blote, 2016**). Jadi tugasnya memilih kondisi koordinat yang sesuai. Wajar bahwa memilih koordinat sedemikian rupa sehingga pada

setiap posisi di alam semesta, misalnya (pada skala yang cukup besar) secara lokal pada keadaan diam.

Einstein mempostulatkan bahwa alam semesta merupakan homogen dan isotropik pada setiap saat evolusinya (**Kachelrieb, 2015**). Sifat homogen dan isotropik alam semesta dapat didekati menggunakan metrik. Akhirnya diperkenalkan metrik Friedmann-Robertson-Walker untuk alam semesta homogen dan isotropik (**Kachelrieb, 2015**).

Metrik FRW (Friedmann-Robertson-Walker) dalam penelitian ini digunakan untuk mengkonstruksi persamaan evolusi dalam memodelkan kosmologi. Kemudian, menggunakan persamaan Euler-Lagrangian untuk menghasilkan persamaan masing-masing koordinat bola (r, θ, ϕ) ditambah koordinat waktu (t) pada elemen garis metrik FRW.

Alam semesta dimodelkan sebagai model Friedman dalam menganalisis metrik FRW, di dalam metrik FRW terdapat konstanta k yang dikenal sebagai parameter kelengkungan ruang-waktu. Nilai k



- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

terbagi menjadi tiga kategori, yaitu nilai $k > 0$, $k = 0$, dan $k < 0$. Agar perhitungan lebih sederhana, maka nilai $k > 0$ dipilih $k = 1$, sedangkan $k < 0$ dipilih $k = -1$. Ketiga nilai k yang ditetapkan ini nantinya akan dihasilkan fungsi persamaan dan bentuk grafik yang berbeda-beda, dari fungsi persamaan dan bentuk grafik inilah akan diperoleh gambaran model-model alam semesta.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode teoritis untuk menentukan model-model kosmologi melalui metrik Friedmann-Robertson-Walker.

Referensi dalam penelitian diperoleh dari buku-buku-buku dan jurnal-jurnal yang berkaitan dengan Teori Relativitas Umum (TRU).

Penelitian ini menggunakan persamaan Einstein untuk memperoleh solusi akhir perhitungan, serta memodelkan alam semesta sebagai model alam semesta Friedmann, model dimana tekanan dan konstanta kosmologi diabaikan. Sehingga yang paling berperan

dalam penelitian ini adalah parameter kelengkungan (k).

Model-model kosmologi diperoleh dari pembuatan program grafik dengan menggunakan *software* matlab R2014a. Program yang ditulis yaitu program utama dan program menu, program utama digunakan untuk menginput data yang dihasilkan dari perhitungan dan program menu berguna untuk menampilkan grafik model-model kosmologi.

METRIK FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

Metrik Friedmann-Robertson-Walker merupakan kuantitas fundamental di dalam model kosmologi standar. Metrik Friedmann-Robertson-Walker dibangun menggunakan pendekatan pemikiran. Tinjau metrik pada selembar kertas datar yang dispesifikasi oleh dua koordinat x_1 dan x_2 . Jarak Δs dua titik pada kertas diberikan oleh teorema Pythagoras.

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \quad (1)$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang memperbanyak atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



Ganti lembaran kertas dengan lembaran karet yang dapat berkembang. Lembaran karet dengan koordinat $x_1 - x_2$ meluas maka jarak antara titik juga berubah membesar dengan waktu, dan apabila perluasan serba sama (tidak bergantung pada posisi) jarak Δs dua titik dapat diungkapkan.

$$\Delta s^2 = a^2(t) (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2) \quad (2)$$

disini $a(t)$ merupakan ukuran laju perluasan atau ekspansi.

Δs hanya merujuk pada jarak spasial antar titik. Didalam relativitas umum hal menarik terletak pada jarak titik-titik dalam ruang waktu empat dimensi. Selain itu, juga harus mengantisipasi kemungkinan ruang waktu yang melengkung. Elemen garis relativistik empat dimensional mempunyai bentuk umum:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + a^2(x) (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2) \quad (3)$$

Secara umum metrik Friedmann-Robertson-Walker dalam koordinat bola dan waktu dapat ditulis sebagai berikut:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (4)$$

Prinsip kosmologi dapat membantu dan menentukan perumusan metrik tersebut.

HASIL ANALISIS METRIK FRIEDMANN –ROBERTSON-WALKER

Berikut metrik atau elemen garis sederhana

$$d\tau^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (5)$$

mengacu pada metrik Friedmann-Robertson-Walker yang mempunyai bentuk:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (6)$$

dimana $R(t) = R$ merupakan kelengkungan skalar/ skalar Ricci.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau

Persamaan Einstein yang digunakan dalam menentukan solusi akhir dari metrik Friedmann-Robertson-Walker sebagai berikut:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00} \tag{7}$$

$$-\frac{3}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{1}{2} (-6) \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{k}{R^2} \right) = 8\pi G T_{00} \tag{8}$$

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} T_{00} \tag{9}$$

Evolusi $R(t)$ harus (dan juga konstanta kosmologi diabaikan) yang dikenal sebagai model Friedmann (alam semesta) dan persamaan dalam kasus ini menjadi:

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \tag{11}$$

disini dipelajari tiga kasus secara terpisah yaitu: $k = 1$, $k = 0$, dan $k = -1$

Kasus Kelengkungan Positif ($k = 1$)

Variasi densitas materi secara berlawanan (invers) sebagai volume sehingga dapat kita tulis (faktor tak-familiar dalam volume berasal dari metrik *nontrivial*)

$$\rho = \frac{M}{2\pi^2 R^3} \tag{12}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang menguraikan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

dimana M adalah massa total alam semesta. Persamaan evolusi dalam kasus ini memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{1}{R^2} = \frac{4GM}{3\pi R^3} \quad (13)$$

dimana didefinisikan,

$$dt = Rd\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{R} \quad (14)$$

diperoleh hasil untuk konstanta kelengkungan $k=1$, solusi akhir persamaan model kosmologinya sebagai berikut:

$$R = (1 - \cos(6t))^{1/3} \quad (15)$$

Kasus Kelengkungan Nol ($k=0$)

Persamaan evolusi dalam

kasus ini dapat ditulis menjadi:

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{4GM}{3\pi R^3} \quad (16)$$

diperoleh hasil untuk konstanta kelengkungan $k=0$, solusi akhir persamaan model kosmologinya sebagai berikut:

$$R = 3t^{2/3} \quad (17)$$

Kasus Kelengkungan Negatif

($k=-1$)

Persamaan evolusi dalam kasus ini diambil dalam bentuk berikut:

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{1}{R^2} = \frac{4GM}{3\pi R^3} \quad (18)$$

diperoleh hasil untuk konstanta kelengkungan $k=-1$, solusi akhir persamaan model kosmologinya sebagai berikut:

$$R = \cosh(6t)^{1/3} - 1 \quad (19)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas model-model kosmologi dengan tiga kasus parameter kelengkungan, yaitu kasus $k=1$, kasus $k=0$, dan kasus $k=-1$. Parameter kelengkungan merupakan parameter ruang-waktu, yang mana dalam metrik Friedmann-Robertson-Walker menyatakan konstanta. Tiga kasus parameter kelengkungan tersebut dinyatakan sebagai berikut:

Grafik Kelengkungan Positif

($k=1$)

Grafik yang dihasilkan dari solusi akhir model kosmologi R fungsi waktu t cosinus, dengan

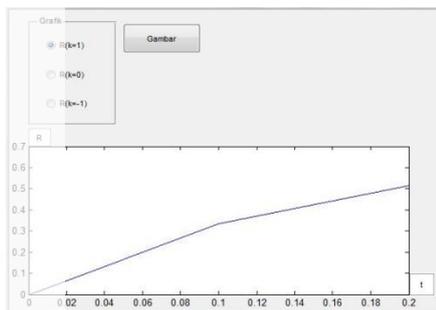


Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

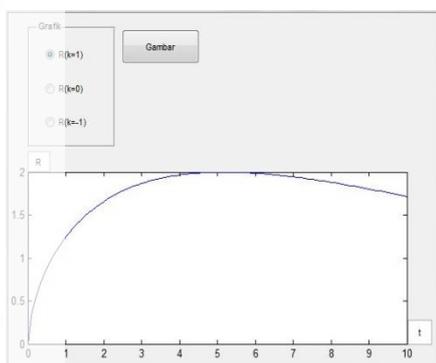
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

persamaan $R = (1 - \cos(6t))^{1/3}$,

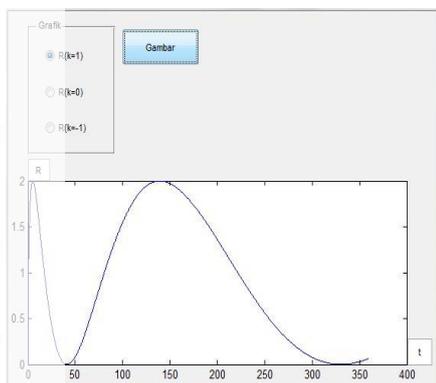
diperoleh sebagai berikut :



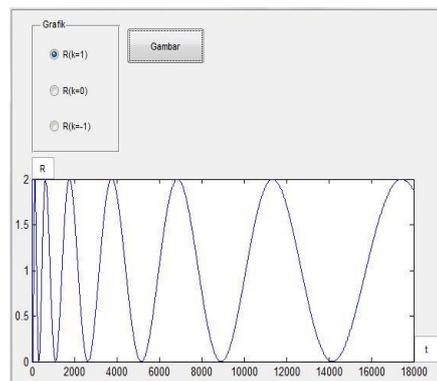
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 4.1 Keluaran Simulasi Komputer Untuk Kelengkungan Positif ($k=1$) dari Alam Semesta Tertutup dan Berevolusi Secara Periodik. (a) Nilai $t = 0$ hingga $t = 0.2$ dengan range 0.1. (b) Nilai $t = 0$ hingga $t = 10$ dengan range 0.1. (c) Nilai $t = 0$ hingga $t = 360$ dengan range 0.1. (d) Nilai $t = 0$ hingga $t = 18000$ dengan range 0.1

Bentuk grafik yang dihasilkan berosilasi, terlihat jelas pada gambar 4.1 bagian (c) dan (d) untuk nilai batas t masing-masing 360 dan 18000, sedangkan pada gambar bagian (a) dan (b) memperlihatkan bahwa pada waktu awal terbentuknya alam semesta mulai mengembang untuk nilai batas t masing-masing 0.2 dan 10 dengan nilai range yang sama untuk semua grafik, yaitu 0.1. Osilasi dari grafik



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

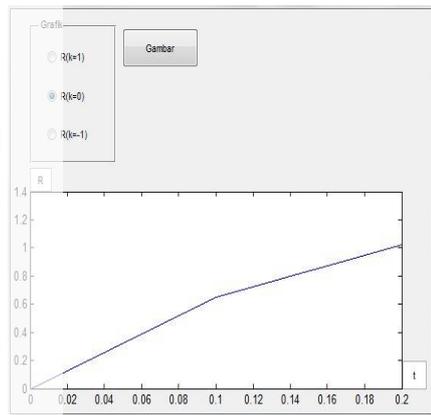
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

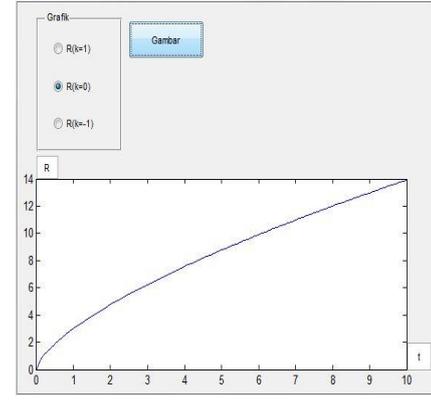
tersebut menunjukkan alam semesta tertutup dan berevolusi secara periodik. Terlihat dari grafik bahwa usia alam semesta yang dihasilkan tidak tetap setiap evolusinya, pada grafik dimulai dari $t=0$ hingga $t=18000$ lama evolusinya selalu bertambah besar hingga nilai t semakin meningkat (dalam skala waktu kosmik).

Grafik Kelengkungan Nol ($k=0$)

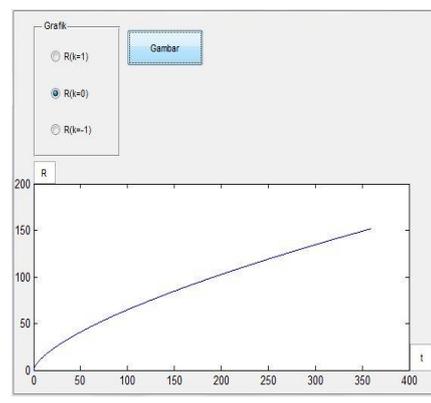
Grafik yang dihasilkan dari solusi akhir persamaan model kosmologi R fungsi waktu t , dengan persamaan $R = 3t^{2/3}$, diperoleh sebagai berikut :



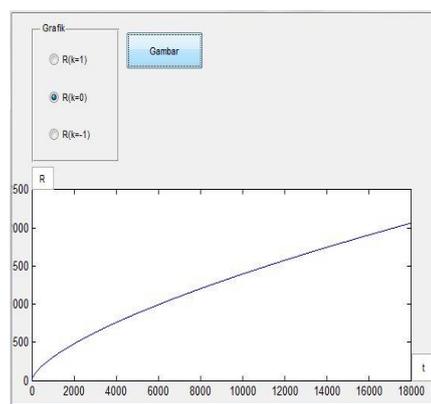
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 4.2 Keluaran Simulasi Komputer untuk Kelengkungan Nol ($k=0$) dari Alam Semesta Datar dan Terbuka. (a) Nilai $t = 0$ hingga $t = 0.2$ dengan range 0.1. (b) Nilai $t = 0$ hingga $t = 10$ dengan range 0.1. (c)



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Nilai $t = 0$ hingga $t = 360$ dengan range 0.1. (d) Nilai $t = 0$ hingga $t = 8000$ dengan range 0.1

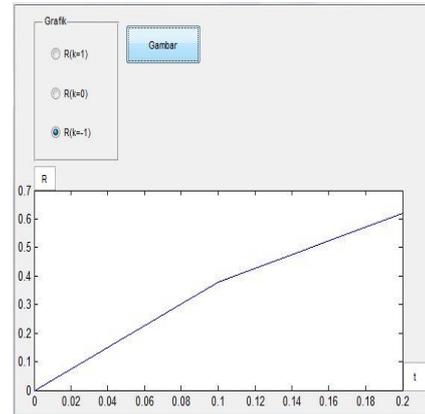
Bentuk grafik yang dihasilkan yaitu mengembang dimulai dari $t=0$ hingga mencapai waktu tertentu (dalam gambar pada kisaran 1 detik skala kosmik) grafiknya mulai mendatar dan terbuka untuk nilai t yang semakin besar, terlihat pada gambar 4.1 bagian (a), (b), (c), dan (d). Jadi, bentuk grafik ini menggambarkan alam semesta datar dan terbuka.

Grafik diatas sesuai dengan yang didapatkan oleh Einstein dan de-Sitter pada tahun 1932. Hasil dari perhitungan mereka yaitu $R \propto t^{2/3}$, bentuk alam semesta yang didominasi oleh materi (Djorgovski, 2017).

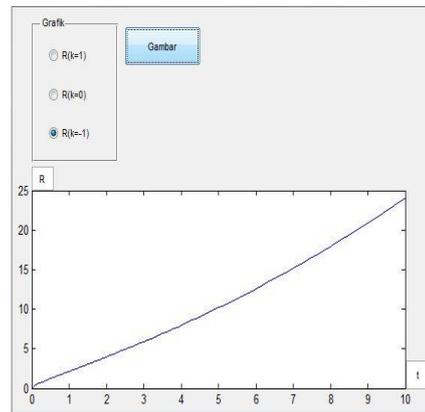
Grafik Kelengkungan Negatif

($k = -1$)

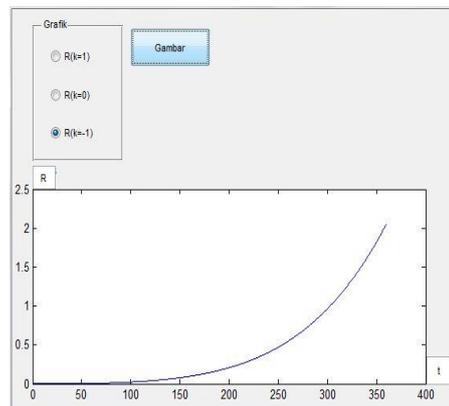
Grafik yang dihasilkan dari solusi akhir persamaan model kosmologi R fungsi waktu t cosinus hiperbolik, dengan persamaan $R = \cosh(6t)^{1/3} - 1$, sebagai berikut :



(a)



(b)



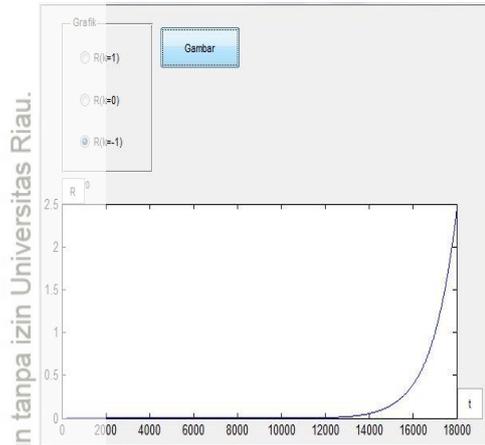
(c)



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.



(d)

Gambar 4.3 Keluaran Simulasi Komputer untuk Kelengkungan Negatif ($k = -1$) dari Alam Semesta terbuka. (a) Nilai $t = 0$ hingga $t = 0.2$ dengan range 0.1. (b) Nilai $t = 0$ hingga $t = 10$ dengan range 0.1. (c) Nilai $t = 0$ hingga $t = 360$ dengan range 0.1. (d) Nilai $t = 0$ hingga $t = 8000$ dengan range 0.1

Bentuk grafik yang dihasilkan yaitu mengembang pada waktu awal terbentuknya alam semesta, terlihat pada gambar 4.3 bagian (a), hingga mencapai waktu tertentu grafiknya langsung terbuka bentuk waktu yang semakin besar, terlihat pada bagian 4.3 bagian (b), (c), dan (d). Bentuk grafik terbuka disebabkan oleh fungsi cosinus hiperbolik, sedangkan bentuk

mengembang disebabkan oleh pangkat $1/3$ pada fungsinya. Jadi, bentuk grafik ini menggambarkan alam semesta terbuka.

Model alam semesta terbuka, akan memuai selamanya. Laju pemuain tidak akan pernah mendekati nol dan apabila $t \rightarrow \infty$, alam semesta menjadi datar (Das, 2011).

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh 3 (tiga) model kosmologi dari parameter kelengkungan (k) yang dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai $k = 1$ menyatakan alam semesta yang memiliki kelengkungan positif. Bentuk alam semesta yang dihasilkan tertutup dan berevolusi secara periodik.
2. Nilai $k = 0$ menyatakan alam semesta yang memiliki kelengkungan nol. Bentuk alam



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

semesta yang dihasilkan datar dan terbuka.

Nilai $k = -1$ menyatakan alam semesta yang memiliki kelengkungan negatif. Bentuk alam semesta yang dihasilkan terbuka.

DAFTAR PUSTAKA

Blote, H. 2016. *Introduction to General Relativity*. Lorentz Institute for Theoretical Physics: Netherlands.

Cheng Ta-Pei. 2005. *Relativity, Gravitation and Cosmology A Basic Introduction*. Oxford University Press: United Kingdom.

Das, A. 2011. *Lectures on Gravitation*. World Scientific Co. Pte. Ltd: USA.

Djorgovski. 2017. *Relativistic Cosmology and Cosmological Model*. California Institute of Technology: United States.

Hamilton, A. 2014-15. *General Relativity, Black Holes, and Cosmology*. University of Colorado: United States.

Liddle, A. 2003. *An Introduction To Modern Cosmology 2th Edition*. University of Sussex: United Kingdom.

Kachelrieb. 2015. *Lecture Notes for FY3452 Gravitation and Cosmology*. Institut for fysikk NTNU: Trondheim Norway.

Lambourne, R. 2010. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge: United Kingdom.

Ryden, B. 2006. *Introduction to Cosmology*. Department of Astronomy The Ohio State University: United States.

