

Aplikasi Metode Reduksi Graf pada Model Pertumbuhan Populasi Kutu Daun (*Pea Afid*)

Efendi¹, Ika Nurhayati²

^{1,2)} Jurusan Matematika, Universitas Andalas, Padang, Indonesia

¹⁾efendi@fmipa.unand.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dibahas model proyeksi populasi dan laju reproduksi pertumbuhan kutu daun (*Pea Afid*). Model populasi yang digunakan adalah model matriks proyeksi populasi. Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dengan reduksi graf lebih efektif dibandingkan dengan radius spektral matrik generasi mendatang (*next generation matrix*). Diskusi perilaku jangka panjang populasi diberikan dalam simulasi. Nilai R_0 hanya relevan untuk melihat perilaku jangka panjang, jika populasi mempunyai parameter konstan.

Kata Kunci: bilangan reproduksi dasar, model populasi, matriks proyeksi, reduksi graf, radius spektral, simulasi

1 Pendahuluan

Pada [3,4] dijelaskan bahwa esensi pertumbuhan populasi merupakan perubahan kondisi populasi terhadap waktu (perubahan dinamis). Dalam mempelajari pertumbuhan populasi ada empat variabel yang berpengaruh yaitu *natalitas* (kelahiran), *mortalitas* (kematian), *imigrasi* dan *emigrasi*. Keempat peubah tersebut menentukan apakah pertumbuhan populasi menjadi positif atau negatif. Bila pertumbuhan populasi positif, maka kepadatan populasi jelas akan meningkat. Sebaliknya, bila pertumbuhan populasi negatif maka terjadi penurunan kepadatan populasi. Selain ditentukan oleh empat peubah di atas, pertumbuhan populasi juga ditentukan oleh peubah lain yaitu distribusi umur, komposisi genetik dan pola penyebaran (*distribution pattern*).

Berkaitan dengan serangan hama yang merugikan pertanian, salah satu populasi serangga yang perlu dipelajari adalah kutu daun (*Pea Afid*). Kutu daun bisa hidup di daerah beriklim sedang seperti Indonesia [4]. Dari literatur diketahui, kutu daun dapat bermigrasi jarak jauh, terutama dengan penyebaran pasif melalui pergerakan angin. Reproduksi kutu daun melalui *parthenogenesis*, di mana betina memproduksi sel telur yang berkembang tanpa melalui proses fertilisasi [4].

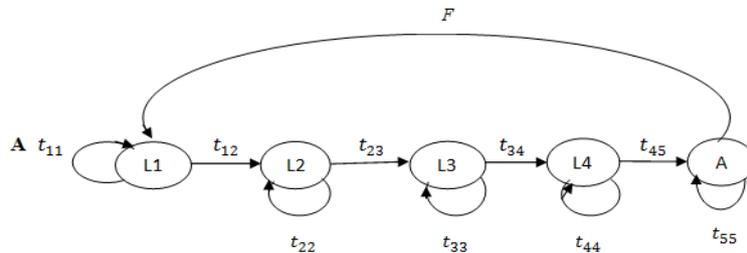
Pada makalah ini, dibahas model pertumbuhan populasi kutu daun menggunakan matrik proyeksi populasi. Populasi dianggap tertutup, sehingga pengaruh migrasi dan



emigrasi diabaikan. Perhitungan laju reproduksi atau bilangan reproduksi dasar (R_0) dilakukan dengan reduksi graf dari siklus hidup kutu daun dan diuji dengan radius spektral dari matrik generasi mendatang (*next generation matrix*) model tersebut. Simulasi dilakukan dengan menyertakan penyesuaian (*adjustment*) pada fekunditas populasi.

2 Siklus Hidup Kutu Daun (*Pea afid*)

Menurut [4], kutu daun (*Pea afid*) melewati siklus hidup atas lima fase dari larva hingga dewasa. L_1 adalah larva tahap pertama, L_2 adalah larva tahap kedua, L_3 adalah larva tahap ketiga, L_4 adalah larva tahap keempat, dan A adalah larva tahap dewasa. Kutu daun dewasa hanya menghasilkan larva instar pertamanya dan rata-rata kutu daun dewasa tunggal menghasilkan 1,7 anak setiap hari. Siklus hidup kutu daun dapat dilihat dalam gambar 1 berikut



Gambar 1. Siklus hidup kutu daun (*Pea afid*) [4] dan [6]

Pada model matriks proyeksi populasi, ukuran populasi dihitung dari waktu t ke waktu $t + 1$ dengan mengalikan matriks proyeksi A dengan vektor kelas populasi n yaitu:

$$n(t + 1) = A \times n(t) \tag{1}$$

Berdasarkan gambar 1 diperoleh $A = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & F \\ t_{12} & t_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{23} & t_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{34} & t_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{45} & t_{55} \end{bmatrix}$.

3 Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat ditemui di banyak literatur diantaranya [1,2 dan 3]. Hal ini beralasan karena salah satu hasil penting berkaitan dengan R_0 adalah: jika $R_0 < 1$, maka jumlah populasi berkurang, jika $R_0 = 1$ maka jumlah populasi tetap, dan jika $R_0 > 1$ maka jumlah populasi bertambah menuju tak hingga. Jadi dengan mengetahui R_0 , maka dapat ditentukan perilaku jangka panjang dari populasi.

Untuk menghitung (R_0) dari matriks proyeksi matrik generasi mendatang, matrik A dikomposisi menjadi: $A = T + F$, dimana: $T=[\tau_{ij}]$ dengan $\tau_{ij} \in [0,1]$ dan $\sum_j \tau_{ij} \leq 1$ dan $F=[f_{ij}]$ dengan $f_{ij} \geq 0$. T disebut disebut matriks transisi dan F matrik *fekunditas*. Selanjutnya, menggunakan radius spektral, perhitungan laju reproduksi didefinisikan sebagai berikut

$$R_0 = \rho(F(I-T)^{-1}) \quad (2)$$

dimana, I adalah matrik identitas dan ρ radius spektral dari matriks $F(I-T)^{-1}$.

Untuk menghindari kerumitan perhitungan radius spektral, maka pada [4] nilai matrik A pada Pers.1, ditentukan berdasarkan pendekatan nilai parameter populasi sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0,49 & 0 & 0 & 0 & 1,70 \\ 0,51 & 0,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,53 & 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,52 & 0,57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,41 & 0,95 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matrik transisi dan fekunditas sebagai berikut:

$$T = \begin{bmatrix} 0,49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,51 & 0,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,53 & 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,52 & 0,57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,41 & 0,95 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1,70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhitungan dibawah ini dapat ditemukan di [4], untuk kelengkapan penulisan di sini dituliskan kembali dengan ringkas. Di [4] diperoleh matrik $(I-T)^{-1}$ dan matriks $F(I-T)^{-1}$ sebagai berikut:

$$(I-T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,9608 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,8868 & 1,8868 & 0 & 0 & 0 \\ 1,8868 & 1,8868 & 1,8868 & 0 & 0 \\ 2,287 & 2,287 & 2,287 & 2,3256 & 0 \\ 18,71 & 18,71 & 18,71 & 19,07 & 20,0 \end{bmatrix}$$

$$F(I-T)^{-1} = \begin{bmatrix} 31,807 & 31,807 & 31,807 & 32,419 & 34,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



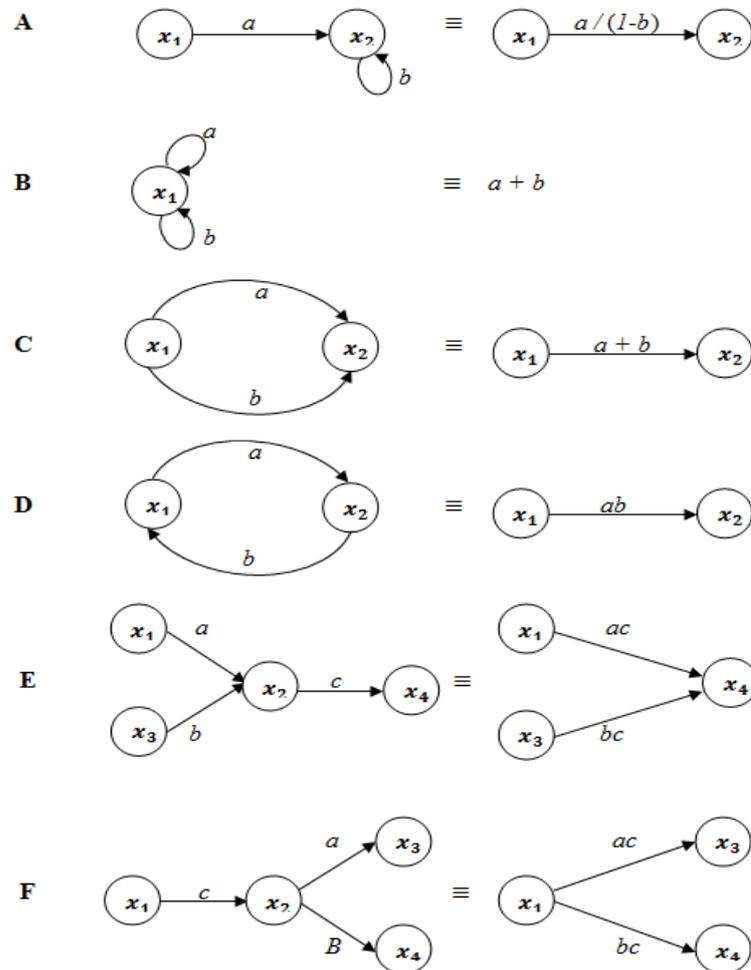
Maka dengan menggunakan Pers. (2) diperoleh nilai eigen dari matriks generasi mendatang $F(I-T)^{-1}$ sebagai berikut:

$$R_0 = \rho(F(I-T)^{-1}) = 31,807 \tag{3}$$

Jadi, bilangan reproduksi dasar (R_0) dari populasi kutu daun adalah $R_0 = 31,807$

4 Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar dengan Reduksi Graf

Bilangan reproduksi dasar dapat dihitung menggunakan aturan mason yang dikutip dari [1], bahwa ada enam aturan ekuivalensi dasar dari bentuk rangkaian graf seperti pada gambar berikut



Gambar 2. Aturan ekuivalensi reduksi graf menurut Mason [5]

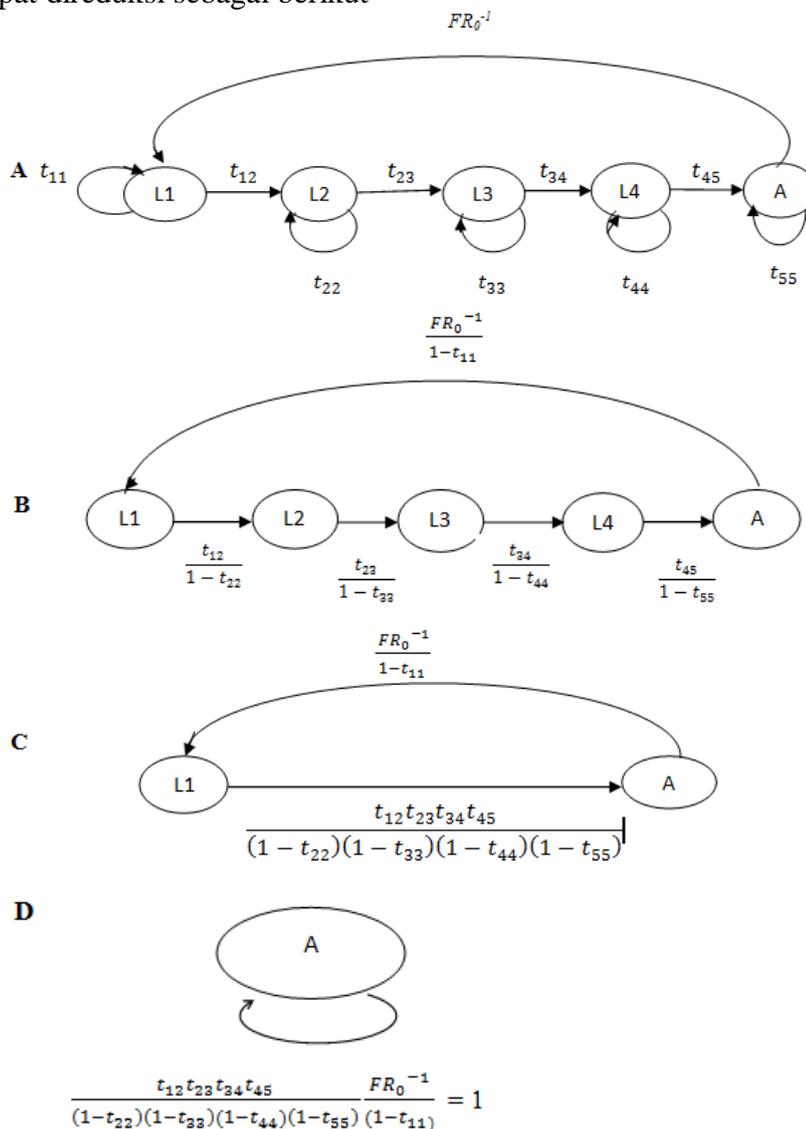
Langkah-langkah yang digunakan dalam metode reduksi graf adalah:

1. Buat graf awal siklus hidup populasi dengan mengalikan fekunditas dengan R_0^{-1} .



2. Reduksi semua loops pada tiap titik (*vertex*) dengan aturan A
3. Reduksi semua sisi (*edge*) hingga tersisa satu titik dengan aturan B-F
4. Samakan nilai sisi titik tersisa dengan 1 dan selesaikan persamaan untuk R_0 .

Berdasarkan aturan ekuivalensi reduksi graf, pada [4] siklus hidup populasi kutu daun dapat direduksi sebagai berikut



Gambar 2. Reduksi Graf (A) graf Awal, (B) reduksi *loop* pada $t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}t_{55}$, (C) reduksi titik L₂-L₃, (D) Reduksi L₁ untuk mendapatkan graf akhir titik A

Sehingga dari persamaan pada graf tereduksi diperoleh R_0 sebagai berikut

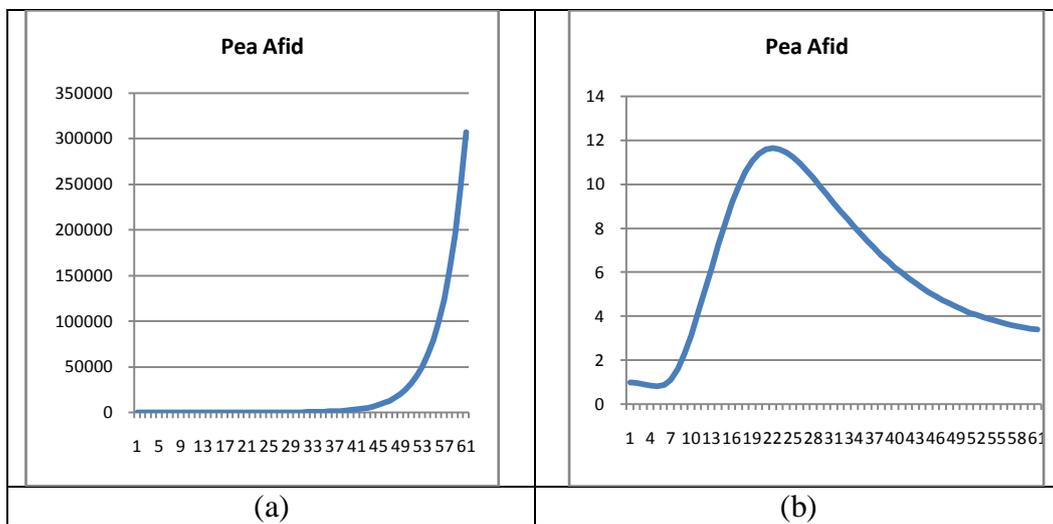


$$R_0 = \frac{t_{12}t_{23}t_{34}t_{45}F}{(1-t_{11})(1-t_{22})(1-t_{33})(1-t_{44})(1-t_{55})}$$

Dengan menggunakan parameter populasi kutu daun diperoleh R_0 : sama dengan perhitungan radius spektral pada Pers. (3).

$$R_0 = \frac{(0.51)(0.53)(0.52)(0.41)(1.70)}{(1-1.70)(1-0.47)(-0.47)(1-0.57)(1-0.95)} = 31.807$$

Karena $R_0 = 31.807 > 1$ maka jumlah populasi pada akhirnya akan meningkat seperti yang ditunjukkan pada grafik pertumbuhan populasi kutu daun (*Pea Afid*) pada gambar 3 di bawah ini:

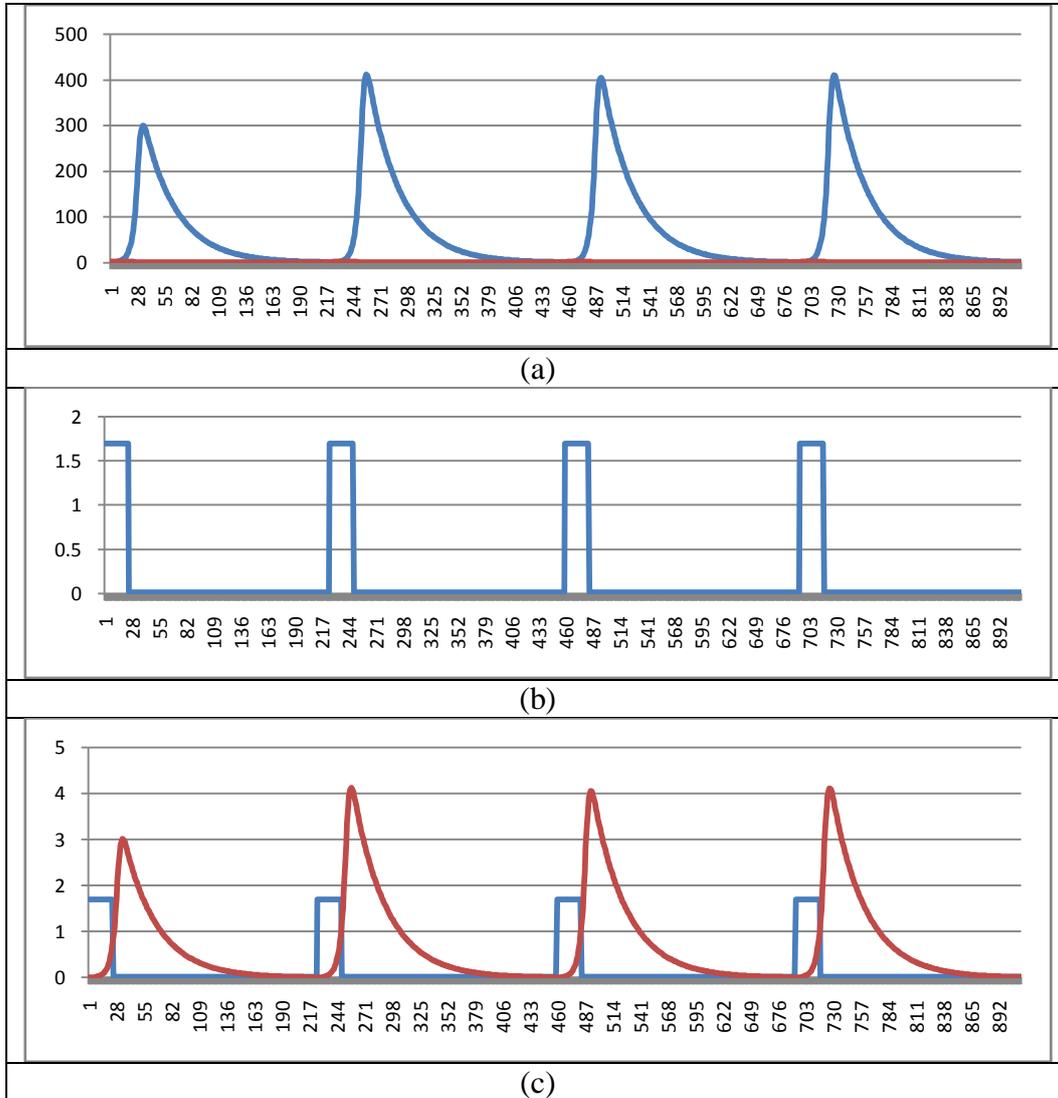


Gambar 3: Pertumbuhan Populasi Kutu Daun (*Pea Afid*)
 (a) fekunditas konstan $F=1.7$
 (b) fekunditas menurun $F=1.7exp(-0.012t)$

Kalau dibandingkan dengan fakta di lapangan, kurva pertumbuhan populasi kutu daun yang bersifat eksponensial pada Gambar 3(a). tidaklah mengikuti fenomena yang ada. Sebab pada dasarnya populasi kutu daun mempunyai fluktuasi tertentu dimana ada periode jumlah populasi meningkat dan di lain waktu jumlah populasi menurun. Salah satu penyebab model proyeksi populasi menghasilkan pertumbuhan eksponensial adalah nilai parameter populasi dalam entri matrik A bersifat konstan yang berarti tidak ada pengaruh perubahan lingkungan pada populasi. Kenyataannya, lingkungan sangat berpengaruh hampir pada semua populasi serangga.

Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan membuat penyesuaian (*adjustment*) pada fekunditas populasi. Misalnya dengan melihat fekunditas sebagai fungsi monoton turun terhadap waktu. Asumsi ini cocok dengan fakta bahwa kemampuan individu untuk menghasilkan individu baru semakin lama semakin berkurang. Namun demikian perlu penentuan parameter yang tepat untuk asumsi

tersebut. Sebagai ilustrasi dapat diasumsikan $F=1.7exp(-0.012t)$. Dengan nilai fekunditas tersebut dapat diperoleh kurva pertumbuhan populasi kutu daun seperti pada Gambar 3(b).



Gambar 4. Pertumbuhan Populasi Kutu Daun (*Pea Afid*) dengan fluktuasi fekunditas
 (a) fluktuasi populasi
 (b) fluktuasi fekunditas
 (c) gabungan fluktuasi populasi (skala 100) dengan fekunditas

Selanjutnya, menjadi menarik pula menyelidiki pengaruh fluktuasi fekunditas terhadap jumlah populasi. Fenomena yang diamati adalah apa yang terjadi ketika petani melakukan penyemprotan pestisida terhadap kutu daun. Salah satu akibat penyemprotan pestisida adalah kemampuan kutu daun untuk berkembang turun drastis. Namun

bagaimanapun, mungkin saja penyemprotan tidak membunuh kutu daun secara keseluruhan. Jika diasumsikan $F = 1.7$ sebelum penyemprotan dan $F = 0.017$ setelah penyemprotan, kemudian F menjadi 1.7 lagi setelah efek penyemprotan habis. Diasumsikan juga penyemprotan dilakukan ketika jumlah populasi kutu daun sudah banyak (sekitar 100). Dengan asumsi tersebut, pola fluktuasi jumlah populasi kutu daun dapat dilihat pada Gambar 4.

Dari Gambar 4 disimpulkan bahwa walaupun selalu dilakukan penyemprotan secara rutin ketika populasi kutu daun sudah banyak (sekitar 100), namun populasi tidak pernah, bahkan kembali menjadi sangat banyak pada periode berikutnya. Penurunan fekunditas juga tidak seketika menurunkan populasi, bahkan terjadi lonjakan jumlah populasi hingga mencapai puncak, untuk kemudian butuh waktu yang sangat lama untuk turun. Dari satu populasi awal, populasi mencapai puncak (sekitar 400 ekor) dalam waktu 34 hari. Intervensi dengan penyemprotan dilakukan pada saat populasi berjumlah sekitar 100 ekor (24 hari dari keadaan awal). Butuh waktu rata-rata 224 hari agar populasi menjadi sangat sedikit (sekitar 1 ekor). Tapi dalam waktu yang sangat pendek (34 hari) kembali terjadi ledakan populasi seperti semula. Simulasi tersebut mungkin juga bisa menjelaskan mengapa selalu ada periode melonjaknya jumlah hama pertanian walaupun penyemprotan pestisida rutin dilakukan.

Berkaitan dengan perubahan fekunditas ataupun perubahan lain pada parameter populasi, bilangan reproduksi dasar menjadi tidak relevan untuk melihat pola jangka panjang dari fluktuasi populasi. Namun demikian bilangan reproduksi dasar masih bisa digunakan untuk melihat pola fluktuasi beberapa waktu ke depan dengan terlebih dahulu melakukan pembaruan (*updating*) dari nilai parameter populasi. Artinya, harus ada pengamatan secara periodik nilai parameter populasi, baik fekunditas maupun probabilitas transisi tiap kompartemen.

5 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa, perhitungan R_0 dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu menggunakan radius spektral matrik generasi mendatang (*next generation matrices*) dan menggunakan reduksi graf. Perhitungan menggunakan reduksi graf lebih efisien, karena tidak melibatkan perhitungan nilai eigen matrik. Berdasarkan simulasi dapat dilihat bahwa untuk $R_0 = 31.807 > 1$, jumlah populasi kutu daun terus meningkat menuju tak hingga yang tidak sesuai dengan realitas di alam; dimana selalu ada batasan alam bagi populasi untuk tumbuh menuju tak hingga. Beberapa langkah yang dapat dilakukan diantaranya, asumsi bahwa elemen pada matrik proyeksi A konstan, diubah menjadi mengikuti variasi lingkungan. Disamping itu, bisa juga dengan memperhatikan faktor logistik dalam model proyeksi. Untuk keperluan penggunaan prediksi harus ada pengamatan nilai parameter populasi secara periodik.



Daftar Pustaka

- [1] Beck, T. de C dan Lewis, M.A. *A New Method for Calculating Net Reproductive Rate from Graph Reduction with Applications to the Control of Invasive Species*. Bulletin of Mathematical Biology. Universitas of Alberta, Edmonton. (2007)
- [2] Caswell, H. *Matrix population models: Construction, analysis, and interpretation*, 2nd edn. Sinauer Associates. (2001)
- [3] Nurdin, M. *Ekologi Populasi*. Padang: Universitas Andalas Press. (2003)
- [4] Nuhayati, I. Model pertumbuhan populasi kutu daun (*pea afid*) dengan menggunakan reduksi graf dan matriks proyeksi populasi, Tugas Akhir, tidak dipublikasikan, (2011)
- [5] Mason, S and H. Zimmermann. *Electronic Circuits, Signals, and System*. Wiley. (1960)
- [6] Tenhumberg, B. *Ignoring Population Structure Can Lead to Erroneous Predictions of Future Population Size*. Nature Education Knowledge 3(10):2 (2010)

