ISBN: 978-979-792-552-9

Persamaan Diferensial Stokastik Model Pertumbuhan Populasi Proses Kelahiran Murni

Granita

Prodi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiah dan Keguruan
UIN Suska Riau

Syamsudhuha

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Riau, Pekanbaru 28293

Abstrak

Pada makalah ini dibahas model stokastik pertumbuhan populasi proses kelahiran murni. Model stokastik yang digunakan adalah Rantai Markov Waktu Kontinu(RMWK) dan Persamaan Diferensial Stokastik(PDS). Penghubung RMWK dan PDS adalah Persamaan Fokker-Planck (PFP) yang pada RMWK merupakan persamaan Kolmogorov maju yang dirubah kedalam bentuk pendekatan perbedaan-pusat. Ada empat model proses kelahiran murni yang akan didiskusikan dan ditemukan PDS dan solusi eksaknya, keakuratan PDS yang ditemukan akan diketahui dari samanya mean dan variansi untuk kedua model stokastik tersebut.

Kata kunci: Rantai Markov waktu kontinu, persamaan diferensial stokastik, proses kelahiran murni

1 Pendahuluan

Suatu proses Markov dapat diklasifikasikan menurut secara alami berdasarkaan parameter waktu dan ruang keadaaan. Dengan respek ke ruang keadaan , suatu proses Markov dapat menjadi proses Markov keadaan diskrit atau proses Markov keadaaan kontinu. Suatu proses Markov keadaan diskrit biasanya disebut rantai Markov. Selajutnya berdasarkan parameter waktu proses Markov dapat menjadi proses Markov waktu diskrit dan proses Markov waktu kontinu. Sehingga dapat diperoleh empat tipe dasar dari proses Markov yaitu; 1. Rantai Markov Waktu Diskrit (RMWD) untuk proses

ISBN: 978-979-792-552-9

Markov yang parameter waktu dan ruang keadaannya diskrit. 2. Rantai Markov Waktu Kontinu (RMWK) untuk proses Markov yang waktu kontinu tetapi ruang keadaan diskrit. 3. Proses Markov Waktu Diskrit (PMWD) bila waktu diskrit tetapi ruang keadaan kontinu dan 4. Proses Markov Waktu Kontinu (PMWK) bila keduanya parameter waktu dan ruang keadaaan kontinu. Pada PMWK termuat didalamnya gerak Brown dan proses diffusi.

Dalam makalah ini kita akan menggunakan dua Proses Markov yaitu Rantai Markov Waktu Kontinu (RMWK) dan proses diffusi atau Persamaan Diferensial Stokastik (PDS). Pembahasan kedua model ini dilakukan karena pesatnya pembahasan tentang hal ini baik yang termuat dibuku [1-3] maupun di jurnal. Tiga model stokastik secara umum dibahas dalam [4] dimana hanya variabilitas demografis termuat. Lanjutan penelitian ini [5] membahas perkiraan *persistence time* untuk ketiga model stokastik dengan penambahan variabilitas lingkungan. Pembahasan pertumbuhan populasi yang diasumsikan adanya kelahiran, kematian dan imigrasi untuk model ketiga model telah dilakukan Ekanayake dkk [6], mereka membahas secara umum tentang model stokastik RMWK dan PDS dengan menggunakan moment tingkat.

Untuk menghubungkan RMWK dan PDS pada makalah ini metode yang dilakukan berbasis pada Allen ([1], h.37) yang menggunakan persamaan Fokker Planck yang bersesuaian sebagai penghubung. Adapun Model yang dibahas adalah model pertumbuhan populasi untuk proses kelahiran Murni. Model ini sudah banyak dibahas didalam literature tentang pemodelan stokastik dalam bentuk RMKW tapi dalam bentuk PDS masih sangat sedikit atau bahkan belum kita temukan bentuknya.

Tujuan dari peneltian ini adalah menemukan empat model PDS proses kelahiran murni serta solusi eksaknya dan melihat hubungannya dengan RMWK.

2 Pembahasan

Misalkan $\{ X(t), t \geq 0 \}$ adalah rantai Markov waktu kontinu, dimana $X(t)$ menunjukkan banyaknya populasi pada waktu t. Untuk setiap $n = 0, 1, 2, ...$ peluang transisi untuk proses kelahiran murni sebagai berikut;

$$p_{n,k}(t) = \begin{cases} \lambda_n \Delta t & ,\text{untuk } k = n+1 \\ 1 - \lambda_n \Delta t & ,\text{untuk } k = n \\ 0 & ,\text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Misal $p_n(t)$ adalah peluang yang banyaknya populasi n pada waktu t. Distribusi peluang dalam waktu kontinu (misalkan $h \to 0$) memenuhi persamaan Kolmogorov maju

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t)$$

Empat kasus berikut (Proses kelahiran murni), sudah dikenal dengan baik dan digunakan dalam pemodelan biologi,

1. $\lambda_n = \lambda$

2. $\lambda_n = n\lambda$
3. $\lambda_n = n\lambda + \alpha$
4. $\lambda_n = \lambda(k - n)$

untuk setiap n, k di $\mathbb{N}$, dimana λ, adalah rata-rata kelahiran dan α adalah rata-rata imigrasi merupakanbilangan real positip dan k biasa disebut dengan "*carrying capacity*" dari lingkungan.

***Kasus* 1**

Persamaan Kolmogorov maju untuk $\lambda_n = \lambda$ adalah

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \qquad (1)$$

Untuk menemukan $p_n(t)$ dari persamaan Kolmogorov maju, fungsi mean $m(t)$ dan fungsi variansi $var(t)$ dengan menggunakan fungsi pembangkit peluang (fpp) $P(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)s^n$ dan sifat-sifatnya.

Dengan menggunakan fungsi pembangkit peluang diperoleh persamaan diferensial dari persamaan (1) sebagai berikut

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = \lambda(s-1)P(t,s)$$

Misalkan jumlah populasi awal $n = N$, solusi dari persamaan diferensial ini adalah

$$P(s,t) = s^N e^{\lambda t(s-1)}$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-N} e^{-\lambda t}}{(n-N)!}$$

dan $m(t) = P'(s,t)|_{s=1}$. Diperoleh

$$P'(s,t) = Ns^{N-1}e^{\lambda t(s-1)} + s^N \lambda t e^{\lambda t(s-1)}$$

dan

$$m(t) = N + \lambda t \qquad (2)$$

Sedangkan $var(t) = P''(s,t)|_{s=1} + P'(s,t)|_{s=1} - (P'(s,t)|_{s=1})^2$. Diperoleh

$$P''(s,t) = N(N-1)s^{N-2}e^{\lambda t(s-1)} + 2Ns^{N-1}\lambda t e^{\lambda t(s-1)} + s^N\lambda^2 t^2 e^{\lambda t(s-1)}$$

sehingga

$$var(t) = \lambda t \qquad (3)$$

Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk pendekatan perbedaan pusat yang memenuhi Persamaan Fokker Planck (PFP) berikut

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial(\lambda p(t,x))}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\lambda p(t,x))}{\partial x^2}$$

Distribusi peluang $p(t,x)$ adalah distribusi peluang dari solusi untuk persamaan diferensial stokastik

$$dX(t) = \lambda\, dt + \sqrt{\lambda}\, dW(t), \qquad X(0) = N$$

Solusi untuk PDS ini adalah

$$X(t) = N + \lambda t + \sqrt{\lambda}\int_0^t dW(u)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat dari Ito integral ([7], h.33), diperoleh mean dan variansi berikut yang sama dengan pada persamaan (2) dan (3)

***Kasus* 2**

Kasus 2: $\lambda_n = n\lambda$ biasa disebut dengan Proses Yule, pembahasan tentang hal ini banyak kita temui di buku-buku stokastik maupun pemodelan stokastik. diantaranya ([8], h.60-63] dan ([3], h. 254) untuk RMWK.

Persamaan Kolmogorov maju : $p'_n(t) = -\lambda n p_n(t) + \lambda(n-1)p_{n-1}(t)$ (4)

Misalkan nilai awal $n = N$ dengan menggunakan fpp diperoleh

$$p_n(t) = \binom{n-1}{n-N} e^{-\lambda N t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-N}$$

Fungsi mean dan variansi: $m(t) = Ne^{\lambda t}$ dan $var(t) = Ne^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$

Selanjutnya akan ditemukan PDS dengan mengubah persamaan (4) ke bentuk pendekatan perbedaan pusat sehingga diperoleh PFP berikut

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial\big(\lambda x p(t,x)\big)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\big(\lambda x p(t,x)\big)}{\partial x^2}$$

yang menghubungkan ke suatu proses diffusi yang mempunyai PDS

$$dX(t) = \lambda X(t)\, dt + \sqrt{\lambda X(t)}\, dW(t), \qquad X(0) = N$$

Aplikasikan rumus Ito ([7], h.38) dengan memilih $f(t,x) = xe^{-\lambda t}$ diperoleh solusi dari PDS ini yaitu

$$X(t) = Ne^{\lambda t} + e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda u}\sqrt{\lambda X(u)}\, dW(u)$$

dengan menggunakan sifat Ito diperoleh

$$m(t) = E[X(t)] = E\left[Ne^{\lambda t} + e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda u}\sqrt{\lambda X(u)}\, dW(u)\right] = Ne^{\lambda t}$$

dan

$$var(t) = var\big(X(t)\big) = var\left(Ne^{\lambda t} + e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda u}\sqrt{\lambda X(u)}\, dW(u)\right)$$

$$= e^{2\lambda t}\int_0^t e^{-2\lambda s}\,\lambda\, E[X(s)]ds = Ne^{2\lambda t}\big(e^{-\lambda u} - 1\big)$$

$$= Ne^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$$

***Kasus* 3**

Untuk RMWK $\lambda_n = \lambda(k-n)$ sudah diperoleh pada ([8], h.68-69) sebagai berikut:

Persamaan Kolmogorov maju :

$$p'_n(t) = -\lambda(k-n)p_n(t) + \lambda\big(k-(n-1)\big)p_{n-1}(t)$$

untuk nilai awal $n = N$ diperoleh

$$p_n(t) = \binom{k-n}{n-N}(1 - e^{-\lambda t})^{n-N} e^{-\lambda(k-n)t}$$

Fungsi mean dan variansi:

$$m(t) = N + (k-N)(1 - e^{-\lambda t})$$

ISBN: 978-979-792-552-9

dan

$$var(t) = (k-N)e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t}).$$

Selanjutnya untuk model PDS didapat
Persamaan Fokker Planck :

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial\big(\lambda(k-x)p(t,x)\big)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\big(\lambda(k-x)p(t,x)\big)}{\partial x^2}$$

dan persamaan diferensial stokastik

$$dX(t) = \lambda\big(k-X(t)\big)\,dt + \sqrt{\lambda\big(k-X(t)\big)}\,dW(t), \qquad X(0)=N$$

dengan solusi dari PDS ini adalah

$$X(t) = Ne^{-\lambda t} + k(1-e^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda u}\sqrt{\lambda\big(k-X(u)\big)}\,dW(u)$$

dengan menggunakan sifat Ito diperoleh

$$m(t) = Ne^{-\lambda t} + k\big(1-e^{-\lambda t}\big) = N + (k-N)(1-e^{-\lambda t})$$

dan
Variansi:

$$var(t) = e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda s}\,\big(\lambda(k-E[X(u)])\big)ds = e^{-2\lambda t}\lambda(k-N)\int_0^t e^{\lambda s}\,ds$$
$$= (k-N)e^{-2\lambda t}(e^{\lambda t}-1) = (k-N)e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})$$

Kesimpulan

Keempat kasus proses kelahiran murni telah ditemukan model persamaan diferensial stokastik dan solusi eksaknya dan dapat diketahui bahwa model yang diperoleh adalah benar dengan ditemukan fungsi mean dan fungsi variansi yang sama untuk kedua model stokastik tersebut.

Kelebihan model Persamaan Diferensial Stokastik(PDS) ketika solusi eksak ditemukan adalah lebih sederhana/mudah untuk mendapatkan nilai fungsi mean dan variansinya dibandingkan Rantai Markov Waktu Kontinu(RMWK). Untuk proses kelahiran Murni Model PDS yang ditemukan merujuk lansung kependefinisian λ_n baik untuk koefisien drift maupun diffusinya.

Untuk studi lanjutan kasus model kelahiran murni yang tidak linier seperti model pertumbuhan logistik $\lambda_n = \lambda n(\frac{k-n}{k})$ walaupun ditemukan model PDSnya

$$dX(t) = \lambda X(t)\left(\frac{k-X(t)}{k}\right)dt + \sqrt{\lambda X(t)\left(\frac{k-X(t)}{k}\right)}\,dW(t), \quad X(0)=N$$

namun solusi eksaknya tidak ditemukan sehingga untuk menemukan solusinya dapat dilakukan secara numerik.

ISBN: 978-979-792-552-9

Daftar Pustaka

[1] Allen, E. J.. *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*, Springer, The Nadtherland, 2007.
[2] Ibe, O. C., *Markov Processes for Stochastic Modeling*, ElsevierAcademic Press, United State of America, 2009.
[3] Allen, L. J. S., *An Introduction to Stochastic Processes with Application to Biology*, second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2011.
[4] Allen, L. J. S. & Allen, E. J.. A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. *Theoretical Population Biology*, 64 (2003), 439–449.
[5] Allen, E. J., Allen, L. J. S. and Schurz H.(2005). A comparison of persistence-time estimation for descret an continuous stochastic population model that include demographic and environmental variability. *Mathematical Biosciences*, 196 (2005), 14-38
[6] Ekanayake. A. J. and Allen. L. J. S.. Comparison of Maarkov Chain and Stochastic Dfferential Equation Population Model Under Higher-Order Moment Closure Approximations. *Stochastic Analysis and Applications*, 28 (2010), 907-927.
[7] Iacus, S. M., *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equation*, New York: Springer, 2008.
[8] Roberts, H. M. and Thompson, M. *Life science Models*, Springer-Verlag, New York, 1976.