ISBN: 978-979-792-552-9

Keserupaan antara Matriks C*ompanion* dengan Matriks Pentadiagonal

Muhafzan

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Andalas
Kampus UNAND Limau Manis, Padang, 25163

muhafzan@fmipa.unand.ac.id

Abstrak

Tujuan utama dari makalah ini adalah untuk menunjukkan bahwa setiap matriks *companion* adalah serupa dengan suatu matriks pentadiagonal. Untuk mencapai tujuan yang dimaksud, matriks *companion* difaktorkan atas perkalian beberapa matriks yang sesuai. Selanjutnya dengan mengunakan suatu transformasi keserupaan, diperoleh suatu matriks pentadiagonal yang serupa dengan matriks *companion* semula.

Kata kunci: matriks *companion*, matriks pentadiagonal, keserupaan matriks

1 Pendahuluan

Diberikan suatu polinomial derajat $n, n \in \mathbb{N}$, berikut

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_1, \qquad (1)$$

dengan $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dengan bentuk

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

disebut sebagai matriks *companion* yang terkait dengan polinomial (1). Dapat ditunjukkan bahwa polinomial karakteristik dari matriks A adalah

$$p(r) = \det(rI - A).$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Suatu matriks $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$ dikatakan sebagai matriks pentadiagonal jika matriks P berbentuk sebagai berikut:

$$P = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & \ddots & & \vdots \\ \alpha_1 & \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon_{n-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta_{n-2} & \varepsilon_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-3} & \beta_{n-2} & \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix}$$

dimana $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i \in \mathbb{R}$.

Dalam makalah ini dipelajari kondisi-kondisi yang menjamin keserupaan matriks A dengan matriks pentadiagonal P.

2 Hasil Utama

Lema 3.1 dan Teorema 3.2 berikut ini digunakan untuk membuktikan hasil utama.

Lema 1 [1,2] *Diberikan matriks companion* (1.2) *dan misalkan* A_k *adalah suatu matriks dengan bentuk sebagai berikut:*

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & O & O \\ O & C_k & O \\ O & O & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \; k = 1,2,\dots,n-1 \qquad (2)$$

dengan

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; dan \;\; A_n = diag(1,1,\dots,-a_n),$$

maka $A = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$.

Teorema 2 [1] *Semua matriks yang diperoleh sebagai hasil kali dari matriks* $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ *untuk suatu permutasi* $(i_1, \dots, i_n)$ *dari* $\{1, \dots, n\}$ *memiliki spektrum yang sama dan multiplisitas aljabar yang sama sehingga semua matriks tersebut adalah similar.*
Hasil utama dari makalah ini diberikan dalam teorema berikut ini.

ISBN: 978-979-792-552-9

Teorema 3 *Semua perkalian matriks $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk sebarang permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ adalah matriks companion dari $p(r)$ dan similar dengan matriks A. Khususnya, matrik $\hat{A} = BC$ adalah matriks companion dari $p(r)$ dan similar dengan matriks A, dimana $B = A_1 A_3 \dots A_k$ dengan k adalah bilangan ganjil terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$ dan $C = A_2 A_4 \dots A_m$ dengan m adalah bilangan genap terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$. Selanjutnya, $B = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots \oplus C_k$, dimana k adalah bilangan ganjil terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$ dan $C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus C_m$ dimana m adalah bilangan genap terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$. Untuk n genap, komponen diagonal terakhir dari matriks C adalah $(-a_n)$, untuk n ganjil, komponen diagonal terakhir dari matriks B adalah $(-a_n)$. Matriks $\hat{A}$ adalah pentadiagonal dan memiliki entri-entri yang sama dengan matriks companion A.*

Bukti.

Pernyataan pertama dan kedua dari Teorema 3 dapat dibuktikan dengan menggunakan Lema 1 dan Teorema 2. Telah diketahui sebelumnya, faktor-faktor matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$, \dots, A_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{pmatrix}$$

Selanjutnya $B = A_1 A_3 \dots$. Untuk n genap matriks B adalah

ISBN: 978-979-792-552-9

$$B = A_1 A_3 \ldots A_{n-1} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{n-1} \end{pmatrix} = C_1 \oplus C_3 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}\ , \qquad (3)$$

dan matriks B untuk n ganjil adalah

$$B = A_1 A_3 \ldots A_n = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 & & & & \\ & C_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_{n-2} & \\ & & & & -a_n \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \oplus C_2 \oplus \quad \cdots \oplus C_{n-2} \oplus (-a_n). \qquad (4)$$

C adalah matriks dari perkalian $A_2\ A_4$ .... Untuk n genap matriks C adalah

ISBN: 978-979-792-552-9

$$C = A_2 A_4 \dots A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & C_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_{n-2} & \\ & & & & -a_n \end{pmatrix}$$

$$= I_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{n-2} \oplus (-a_n). \qquad (5)$$

dan matriks C untuk n ganjil adalah

$$C = A_2 A_4 \dots A_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & C_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_{n-2} & \\ & & & & C_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= I_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}. \qquad (6)$$

Dari (3) dan (4), dapat dibuktikan bahwa matriks

$$B = C_1 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus \dots \oplus C_k ,$$

dengan k bilangan ganjil terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$, dan dari (5) dan (6) diperoleh

$$C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus \ C_k \ \ ,$$

dengan k bilangan genap terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$. Selain itu, juga dapat dibuktikan bahwa komponen diagonal terakhir matriks C adalah $(-a_n)$ untuk n genap, dan komponen diagonal terakhir untuk matriks B adalah $(-a_n)$ untuk n ganjil. Untuk n genap,

$$\hat{A} = BC$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & & -a_2 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \mathbf{0} & \\ 0 & & -a_3 & 0 & -a_4 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \\ & & & 0 & -a_5 & 0 & \ddots & 0 & & \\ & & & & 1 & 0 & \ddots & -a_{n-2} & 1 & \\ & & & & & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{0} & & & & \ddots & -a_{n-1} & 0 & -a_n \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

adalah matriks kompanion dari $p(r)$ dan serupa dengan matriks A. Untuk n ganjil,

$$\hat{A} = BC$$

$$
= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \text{\Large 0} & \\ 0 & -a_3 & 0 & -a_4 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & \\ & & 0 & -a_5 & 0 & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 & \ddots & -a_{n-1} & 1 \\ & & & & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ & \text{\Large 0} & & & & & -a_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (8)
$$

adalah matriks kompanion untuk polinomial $p(r)$ dan similar dengan matriks A. Matriks (7) dan (8) merupakan matriks pentadiagonal yang entri-entrinya serupa dengan entri-entri matriks kompanion A. ■

Kesimpulan

Dari kajian ini diperoleh kesimpulan bahwa untuk mendapatkan suatu matriks pentadiagonal yang serupa dengan suatu matriks kompanion A, perlu ditunjukkan bahwa

1. semua perkalian matriks faktor $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk sebarang permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dari $\{1, \dots, n\}$ adalah matriks kompanion dari $p(r)$ dan serupa dengan matriks A.
2. Jika $B = A_1 A_3 \dots A_k$ dan $C = A_2 A_4 \dots A_k$, maka
$$B = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots \oplus C_k ,$$
dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$, dan
$$C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus C_m ,$$
dengan m bilangan genap terbesar dalam $\{1, \dots, n\}$.

Jika dua hal ini dapat dilakukan, maka terdapat suatu matriks pentadiagonal $\hat{A} = BC$ yang serupa dan memiliki entri-entri yang sama dengan matriks *companion* A.

Daftar Pustaka

[1] M. S. Silva, T. P. De Lima, Bounds for Singular Values of a Block Companion Matrix. *Miskolc Mathematical Notes*, 8(2007), 88-97.

[2] W. Wanicharpichat, Nonderogatory of Sum and Product of Doubly Companion Matrices. *Thai Journal of Mathematics*, 9(2011), 355-366.