ISBN: 978-979-792-552-9

Penafsiran Determinan secara Geometri

Riska Yeni[1*], Syamsudhuha[2], M.D.H. Gamal[2]

[1] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

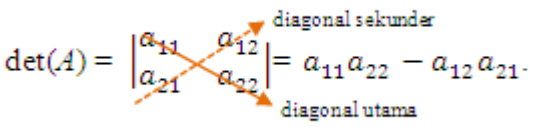
Abstrak

Pada umumnya determinan suatu matriks dapat dihitung dengan cara-cara tertentu. Pada tulisan ini diperkenalkan konsep determinan suatu matriks secara geometri. Melalui pendekatan geometri ini diberikan sebuah jajarangenjang yang dibentuk oleh penjumlahan dua vektor kolom, dengan menggunakan luas persegipanjang dan segitiga maka diperoleh nilai determinan matriks berordo 2×2 sebagai luas jajarangenjang. Dari sebuah balok yang terbentuk oleh vektor-vektor kolom matriks 3×3 didapatkan nilai determinan matriks 3×3 sebagai volume balok.

Kata kunci: *balok, determinan, jajarangenjang, matriks.*

1 Pendahuluan

Pada umumnya di beberapa buku Matematika SMA dikatakan bahwa determinan matriks A berordo 2×2 didefinisikan sebagai selisih antara perkalian elemen elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder [1,2,5]. Adapun rumus yang dapat digunakan untuk menghitung nilai determinan dari matrik 2×2, adalah [1, 2, 3, 7, 8]



Untuk matriks 3×3, nilai determinan dapat ditentukan dengan aturan Sarrus. Misalkan Matriks A diketahui sebagai

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

ISBN: 978-979-792-552-9

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

maka determinan A dapat dicari sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}.$$

Sering dikatakan matematika identik dengan rumus-rumus dan banyak berhitung. Padahal determinan tidak hanya dapat diartikan menurut satu titik pandangan saja, karena determinan dapat dijelaskan melalui pendekatan geometri maupun aljabar itu sendiri.

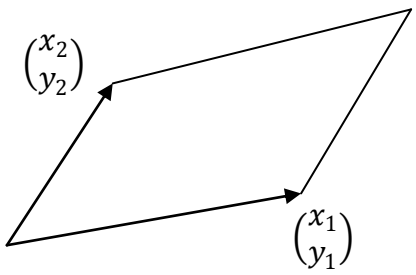
Melalui pendekatan geometri ini, akan didapatkan nilai determinan matriks berordo 2×2 sebagai luas jajarangenjang dan nilai determinan matriks berordo 3×3 sebagai volume balok [4,5,6]. Dengan demikian, tidak hanya sekedar menghitung nilai daterminan suatu matriks lagi, akan tetapi paham dengan apa yang sedang dikerjakan dan manfaat mempelajari determinan tersebut, sehinggga dalam pembelajarannya terasa lebih manarik.

2 Penafsiran Determinan Secara Geometri

Dengan menggunakan pengetahuan tentang determinan, maka akan didapatkan aplikasi tentang determinan dalam bidang geometri. Melalui pendekatan geometri ini, akan didapatkan nilai determinan matriks berordo 2×2 sebagai luas jajarangenjang dan nilai determinan matriks berordo 3×3 sebagai volume balok.

Gambar 1 merupakan sebuah jajarangenjang yang dibentuk oleh penjumlahan dua vektor yaitu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$



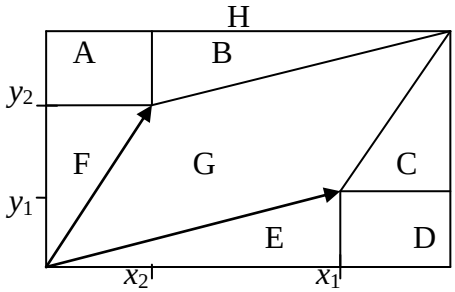
Gambar 1: Jajarangenjang

Luas Jajarangenjang pada Gambar 1 dapat dihitung dengan menggambarkan sebuah Persegipanjang yang melingkupi Jajarangenjang, dan dengan mengurangkan luas

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

ISBN: 978-979-792-552-9

persegipanjang tersebut dengan luas daerah yang berada di luar Jajarangenjang ini, maka luas Jajarangenjang dapat dihitung. Hal ini dapat diilustrasikan seperti Gambar 2.



Gambar 2: Jajarangenjang di dalam persegipanjang

Berdasarkan ilustrasi di atas, diperoleh:
Luas Jajarangenjang G = luas H - (luas A+ luas B + luas C + luas D + luas E + luas F)

$$= \{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\} - \begin{Bmatrix} (x_2y_1) + \left(\frac{1}{2}x_1y_1\right) + \left(\frac{1}{2}x_2y_2\right) \\ +(x_2y_1) + \left(\frac{1}{2}x_1y_1\right) + \left(\frac{1}{2}x_2y_2\right) \end{Bmatrix}$$

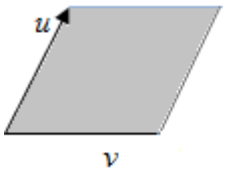
$$= \{(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2)\} - \{(2x_2y_1 + x_1y_1 + x_2y_2)\}$$
$$= x_1y_2 - x_2y_1$$

Luas Jajarangenjang ini merupakan nilai determinan dari

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix},$$

yang mempunyai kolom yang terdiri dari dua titik koordinat Jajarangenjang. Karena disini menggunakan jarak antara dua titik, maka digunakan nilai mutlak untuk luas daerah yang ada pada Gambar 2.

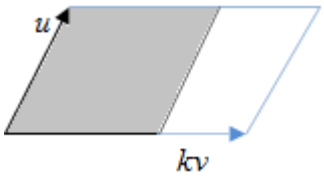
Secara singkat, sebuah fungsi yang mengukur ukuran (luas) sebuah bidang harus memiliki sifat perkalian bidang dengan skalar. Hal ini dapat diilustrasikan seperti Gambar 3(a) dan Gambar 3(b).



Gambar 3(a): Ukuran (luas) bidang sebelum vektor *v* dikali skalar

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

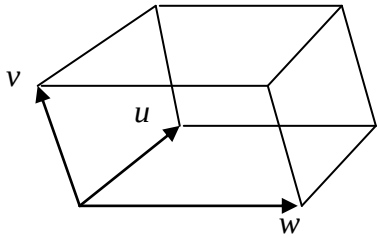
ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 3(b): Ukuran (luas) bidang setelah vektor *v* dikali skalar

Pada Gambar 3(b) terdapat perpanjangan vektor *v* sebesar *k* skalar. Jika dua vektor ini membentuk sebuah jajarangenjang, maka luas jajarangenjang juga akan bertambah sebesar *k* kali skalar.

Secara umum, nilai mutlak determinan suatu matriks 3×3 memberikan volume dari suatu balok.



Gambar 4: Balok *A*

Jika $u = a_{11}\, a_{12}\, a_{13}$, $v = a_{21}\, a_{22}\, a_{23}$, dan $w = a_{31}\, a_{32}\, a_{33}$ merupakan elemen-elemen baris dari suatu matriks, maka volume dari balok dengan vektor- vektor *u*,*v*, dan *w* (pada Gambar 4) adalah nilai mutlak dari determinan matriks $A=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$.

Misalkan diketahui matriks 3×3

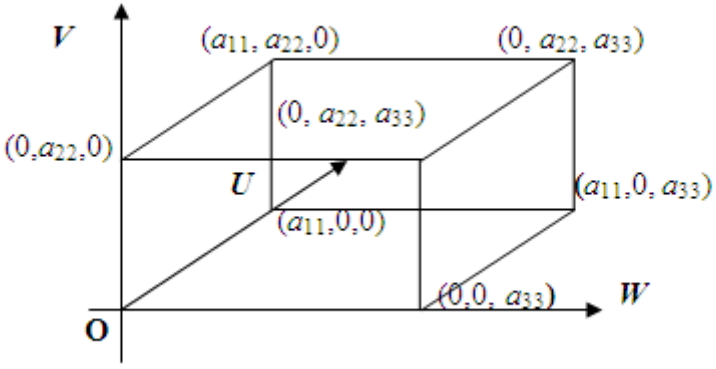
$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

merupakan matriks segitiga, maka nilai determinan matriks *B* adalah $a_{11}\, a_{22}\, a_{33.}$ Jika vektor-vektor kolom pada matriks ini digambarkan secara geometri, maka akan terbentuk bangun ruang Balok. Hal ini dapat diilustrasikan pada Gambar 5.
Pada Gambar 5 diketahui panjang balok $p = a_{33,}$ lebar $p = a_{11,}$ dan tinggi $p = a_{22,}$ sehingga

$$\text{volume balok, } V = plt = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

ISBN: 978-979-792-552-9



Gambar 5: Balok *B*

Volume balok ini merupakan determinan matriks

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Demikian telah ditunjukkan bahwa determinan matriks 3×3 merupakan volume suatu balok.

Kesimpulan

Melalui pendekatan geometri ini nilai determinan matriks berordo 2×2 dapat dinyatakan sebagai luas suatu bidang datar (jajarangenjang), dan determinan matriks berordo 3×3 dapat dinyatakan sebagai volume suatu balok. Dengan kata lain, melalui pendekatan geometri ini dapat ditentukan beberapa aplikasi determinan dalam menyelesaikan masalah geometri.

Daftar Pustaka

[1] C. Anwar dan Pesta. 2008. *Matematika Aplikasi untuk SMA dan MA Kelas XII IPA*, Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional, Jakarta,

[2] G. Achmadi, D. Gustanti, D.W. Hakim, dan W. Sutanto. 2008. *Mahir Matematika 3*, Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional, Jakarta.

[3] H. Anton. 1994. *Elementary Linear Algebra*. Jhon Wiley & Sons, New York,1994.

[4] J. Hefferon, Linear Algebra, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra, 2014

[5] J. Hannah. 1996. A Geometric Approach to Determinant, *Amer. Math. Monthly*,103 (5): 401- 409

[6] S. Lipschutz and M. Lipson. 2009. *Linear Algebra*. Fourth Edition, McGraw-Hill Companies. New York

[7] Siswanto dan U. Supraptinah. 2009. *Matematika dan Inovatif 3*, Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional, Jakarta.

[8] S. K. Berberian. 1992. *Linear Algebra*, Oxford University Press, New York, 1992

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.