An Improved New Iterative Method for Multiple Roots[1]

M. Imran
mimran@unri.ac.id

Laboratorium Matematika Terapan Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293)

Abstract

We modify a new iterative method introduced by Abu-Alshaikh [*Enformatika*. **5** (2005) h. 190--193] to speed up the convergence for finding multiple roots of a nonlinear equation in one variable. Comparison between the discussed method and the iterative method introduced by Abu-Alshaikh is also given by looking into the number of iterations and error approximations.

Keywords: Iterative method, Multiple roots. Nonlinear equations

Abstrak

Artikel ini membahas modifikasi metode iterasi baru yang diperkenalkan Abu-Alshaikh [*Enformatika*. **5** (2005) h. 190--193] untuk mempercepat kekonvergenan dalam menemukan akar-akar ganda dari persamaan nonlinear satu variable. Perbadingan melalui simulasi numerik antara metode hasil modifikasi dan sebelum dimodifikasi dilakukan dengan melihat jumlah iterasi yang diperlukan dan galat yang dihasilkan.

Keywords: Metode iterasi, Akar ganda dan Persamaan nonlinear

1. Pendahuluan

Masalah menemukan solusi persamaan nonlinear

$$f(x)=0, \quad \text{dengan} \quad f: D \subset R \to R \tag{1}$$

adalah masalah klasik di analisis numerik. Masalah (1) muncul diberbagai bidang antara lain seperti fisika, teknik dan lain-lain. Masalah (1) muncul sebagai bagian dalam menyelesaikan masalah yang ada dibidang-bidang tersebut. Perkembangan hardware dan software komputer pada dua dekade belakangan ini telah menginsparasi matematikawan dalam menemukan metode numerik baru maupun memodifikasi metode klasik yang ada dalam menyelesaikan (lihat [3],[4],[5],[6]).

Salah satu teknik numerik baru diusulkan oleh Ibrahim [1] dan ke konvergenan metode ini di diskusikan oleh Ibrahim dan Sahin [2]. Metode yang diusulkan ini mempunyai dua tebakan awal dan jika masalah (1) mempunyai lebih dari satu akar real iterasi ganjil metode ini konvergen ke satu akar dan iterasi genap konvergen ke akar lainnya. Akan tetapi metode

---

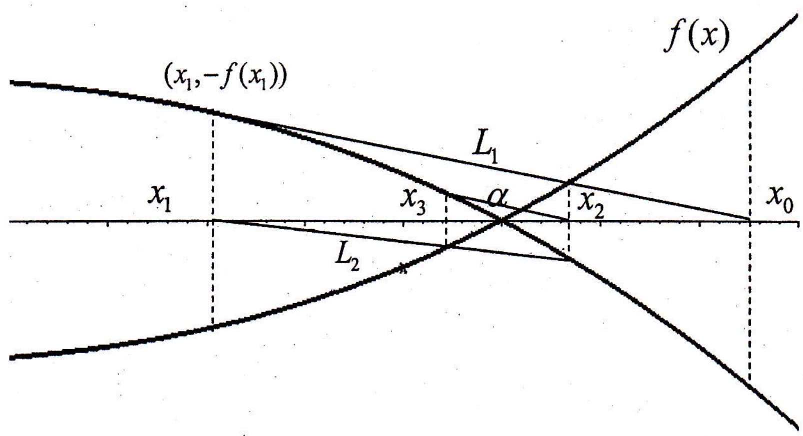
[1] Presented at SEMIRATA BKS PTN Wilayah Barat, held at the Bengkulu University , Bengkulu, 13-14 Mei 2008

yang diusulkan ini kekonvergeneannya sangat lambat bila masalah (1) mempunyai akar ganda.

Pada makalah ini dimodifikasi metode yang diusulkan Ibrahim [1] untuk mendapatkan akar ganda, dengan karakteristik yang sama dengan metode yang diberikan Ibrahim [1]. Dibagian akhir diberikan komputasi numerik yang menunjukkan keunggulan metode hasil modifikasi.

2. Metode Iterasi Baru

Misalkan persamaan (1) mempunyai akar α, fungsi f, f', f'' kontiniu disekitar α, dan x_0 dan x_1 adalah tebakan awal yang cukup dekat ke akar α. Maka grafik $f(x)$ dan $-f(x)$ memotong sumbu x pada titik $(\alpha, 0)$. Dengan demikian titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$, terletak pada kurva $y = f(x)$ dan dekat dengan titik $(\alpha, 0)$, lihat Gambar 1. Selanjutnya penurunan metode baru ini disajikan secara geometri. Untuk itu nyatakan L_1 sebagai garis yang menghubungkan titik $(x_0, 0)$ dan $(x_1, -f(x_1))$ dan memotong grafik $y = f(x)$ di $(x_2, f(x_2))$ sehingga terdapat titik x_2 yang lebih dekat ke titik $(\alpha, 0)$. Definisikan pula, L_2 sebagai garis yang menghubungkan titik $(x_1, 0)$ dan titik $(x_2, -f(x_2))$ dan memotong grafik $y = f(x)$ di $(x_3, f(x_3))$ sehingga terdapat titik x_3 yang lebih lebih dekat ke titik $(\alpha, 0)$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh x_{k+1} yang menuju akar α dengan k adalah iterasi dari metode yang diajukan.



Gambar 3.1. Geometri Metode Iterasi Baru

Untuk menemukan formula dari iterasi baru ini perhatikan Gambar 3.1. Misalkan m_1 adalah gradien garis L_1, dan juga gradien garis yang menghubungkan $(x_0, 0)$ dan $(x_2, f(x_2))$, sehingga

$$m_1 = \frac{0 - (-f(x_1))}{x_0 - x_1} = \frac{0 - f(x_2)}{x_0 - x_2},$$

atau

$$\frac{f(x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{-f(x_1)}{x_0 - x_1} \tag{2}$$

Dengan meggunakan beda mundur untuk mengaproksimasi turunan $f'(x_0)$ pada garis yang menghubungkan titik $(x_2, f(x_2))$ dan $(x_0, f(x_0))$, diperoleh

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} - \frac{f(x_2)}{x_0 - x_2} \tag{3}$$

Kemudian disubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (3) dan diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} + \frac{f(x_1)}{x_0 - x_1}. \tag{4}$$

Selanjutnya dengan menyusun ulang persamaan (4) dan menyederhanakan persamaan yang diperoleh, didapat

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_1 - x_0)}{f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)} \tag{5}$$

Untuk menentukan nilai aproksimasi x_3, digunakan gradien garis L_2. Dengan cara yang sama seperti mendapatkan aproksimasi x_2 dan dengan menggunakan beda maju untuk mengaprosimasi $f'(x_1)$ diperoleh aproksimasi x_3

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_3 - x_1)}{f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)}. \tag{6}$$

Dengan menggabungkan iterasi pada persamaan (5) dan (6), diperoleh rumus umum metode iterasi baru untuk menentukan akar persamaan nonlinear dengan menggunakan dua nilai awal yaitu

$$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(x_k)}. \tag{7}$$

Teorema 1 [1;2] Asumsikan bahwa $f \in C^2[a,b]$ dan ada bilangan $\alpha \in [a,b]$ dimana $f(\alpha) = 0$. Maka ada bilangan real $\varepsilon > 0$ sehingga barisan $\{x_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ didefinisikan dengan

$$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(x_k)}. \tag{8}$$

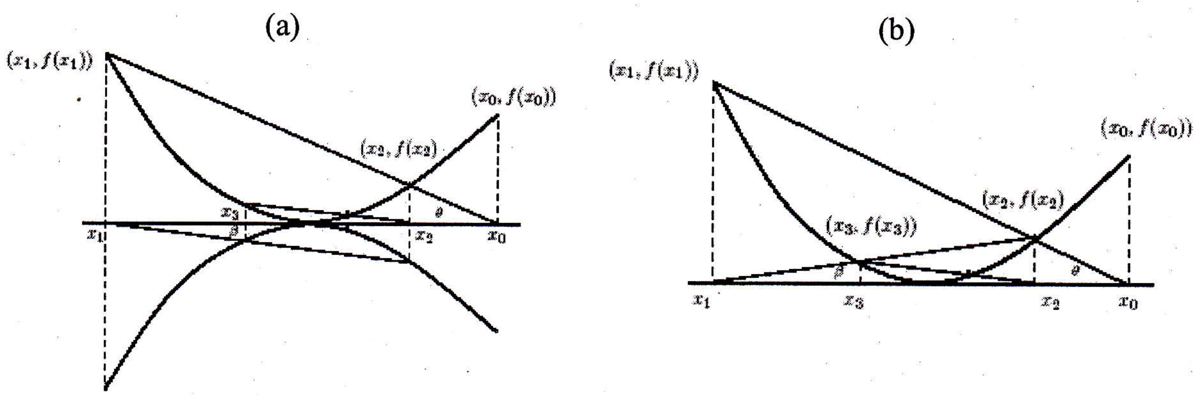
konvergen ke p untuk nilai awal $(x_0, x_1) \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$.

Bukti: Lihat Ibrahim [1].

3. Modifikasi Metode Baru Untuk Akar Ganda

Untuk memodifkasi metode iterasi baru dalam menentukan akar ganda perhatikan Gambar 2a-b. Pada Gambar 2a diikuti proses yang dilakukan oleh Ibrahim [1] untuk menemukan modifikasi iterasi baru yang diusulkan. Secara geometri proses penurunan metode modifikasi yang disajikan Gambar 2a dapat disajikan dengan Gambar 2b. Selanjutnya pada makalah ini penurunan metode yang diusulkan menggunakan bantuan geometri Gambar 2b. Misalkan L_1 adalah garis yang menghubungkan $(x_0, 0)$ dengan $(x_1, f(x_1))$ dan memotong grafik $y = f(x)$ dititik $(x_2, f(x_2))$ dan misalkan pula L_2 adalah garis yang menghubungkan $(x_1, 0)$ dengan $(x_2, f(x_2))$ dan memotong grafik $y = f(x)$ dititik $(x_3, f(x_3))$. Bila diperhatikan Gambar 2b kemiringan garis L_1 yang dinyatakan dengan m_1 dapat ditulis sebagai

$$m_1 = \frac{f(x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{f(x_2)}{(x_0 - x_2)}. \tag{9}$$



Gambar 2. Geometri proses aproksimasi akar modifikasi metode iterasi baru.

Dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (9) didapat

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_2)(x_0 - x_1)}{f(x_1)}. \tag{10}$$

Melalui cara yang sama dengan memanfaatkan kemiringan garis L_2 diperoleh hubungan x_3 dengan x_1 dan x_2 sebagai berikut

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_3)(x_1 - x_2)}{f(x_2)}. \tag{11}$$

Selanjutnya aproksimasi kemiringan di x_0 dan x_1 dengan menggunakan beda mundur dan beda maju dapat dituliskan dengan

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_2)}{(x_0 - x_2)}, \tag{12}$$

dan

$$f'(x_1) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{(x_3 - x_1)}. \tag{13}$$

Dari persamaan (12) dan (13) diperoleh

$$f(x_2) = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_2) \tag{14}$$

$$f(x_3) = f(x_1) - f'(x_1)(x_1 - x_3) \tag{15}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (14) dan (15) ke persamaan (10) dan (11), berturut-turut dan dengan melakukan penyederhanaan diperoleh

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_1)}{f(x_1) + f'(x_0)(x_0 - x_1)} \tag{16}$$

dan

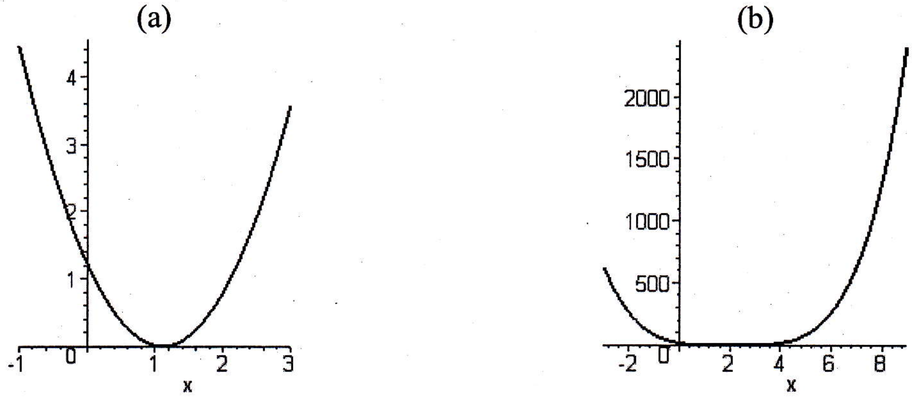
$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_2)}{f(x_2) + f'(x_1)(x_1 - x_2)}. \tag{17}$$

Selanjutnya dengan memperhatikan persamaan (16) dan (17) didefinisikan iterasi modifikasi metode iterasi baru sebagaiberikut:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)}{f(x_n) + f'(x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)}, \quad \text{dengan } n = 1,2,3,\ldots \tag{18}$$

4. Simulasi Numerik

Dalam melakukan simulasi numerik, dipilih fungsi-fungsi yang akar ganda eksaknya diketahui, yaitu: $f(x)=(x-1.11)^2$ dan $f(x)=(x-2.0)^4$, yang grafiknya diberikan Gambar 3. Pemilihan ini bertujuan untuk mengetahui sejauhnya keakuratan metode yang diajukan. Tebakan awal interval yang digunakan divariasikan, untuk melihat keunggulan dua metode yang dibandingkan. Toleransi yang digunakan dalam semua komputasi adalah epsilon, eps=2.22e-16, yang merupakan mesin epsilon untuk Matlab.



Gambar 3. (a) Grafik fungsi $f(x)=(x-1.11)^2$ dan (b) Grafik fungsi $f(x)=(x-2.0)^4$

Untuk menghentikan komputasi digunakan tiga kriteria yaitu

a. Nilai fungsi aproksimasi, $|f(x_2)| <$ epsilon,

b. Error eksaks, $|x_2 -$ solusi eksaks$|$,

c. Error relatif, $\left|\dfrac{x_2-x_1}{x_2}\right| <$ epsilon.

Jika salah satu kriteria dipenuhi komputasi akan berhenti.

Table 1. Perbandingan jumlah iterasi metode baru dan metode baru yang dimodifikasi untuk fungsi $f(x)=(x-1.11)^2=0$

Nilai Awal		Modifikasi Metode Baru			Metode Baru		
x_0	x_1	iterasi	Akar	Rel Error	iterasi	Akar	Rel Error
0.61	1.61	62	1.1100000192069224	3.8533e-009	67	1.1099999774873963	1.8716e-008
0.0	1.2	61	1.1099999793949458	6.6205e-009	77	1.1099999627580668	3.2711e-008
1.0	2.2	61	1.1099999765427913	1.0031e-008	57	1.1100000189358845	8.9719e-009
0.0	2.22	64	1.1100000203773435	8.7755e-009	88	1.1099999573476054	3.6528e-008
-10.0	10.0	73	1.1099999805132572	3.8081e-009	133	1.1100000207684573	1.5828e-009

Table 2. Perbandingan jumlah iterasi metode baru dan metode baru yang dimodifikasi untuk fungsi $f(x)=(x-2.0)^2=0$

Nilai Awal		Modifikasi Metode Baru			Metode Baru		
x_0	x_1	iterasi	Akar	Rel Error	iterasi	Akar	Rel Error
-1.0	6.0	74	2.0001068563859814	7.4871e-005	83	1.9998395791907075	5.0925e-006
1.0	6.0	74	2.0000986143217450	7.2394e-005	99	2.0001870629297351	8.4139e-005
-1.0	3.0	71	1.9998662101269036	4.0367e-005	113	1.9997925531924110	2.8868e-005
1.0	3.0	64	2.0001587333142088	3.1032e-005	55	1.9999721352699298	1.6180e-003
-3.0	9.0	83	1.9998159530541977	1.6496e-005	161	2.0001310858862587	4.9593e-005

Dari hasil simulasi, seperti Tabel 1 dan 2, terlihat secara umum bahwa metode hasil modifikasi lebih cepat dari metode yang dimodifikasi. Hal ini terlihat jika selisih panjang interval yang diambil cukup besar, seperti untuk $f(x)=(x-1.11)^2=0$ dengan tebakan awal $x_0=-10$ dan $x_1=10$, iterasi yang diperlukan metode baru yang dimodifikasi sebanyak 73 iterasi, sedangkan untuk metode baru sendiri diperlukan 133 iterasi. Demikian juga untuk fungsi $f(x)=(x-2.0)^2=0$, untuk tebakan awal $x_0=-3$ dan $x_1=9$, iterasi yang diperlukan metode baru yang dimodifikasi sebanyak 83 iterasi, sedangkan untuk metode baru sendiri diperlukan 161 iterasi. Semua komputasi berhenti bukan karena uji error yang diberikan dipenuhi, melainkan karena hilai fungsi yang disyaratkan terpenuhi. Hal ini merupakan kendala utama dalam mengaproksimasi akar ganda.

5. Daftar Pustaka

[1] Abu-Alshaikh, I. 2005. *A New Iterative Method for Solving Nonlinear Equations.* Enformatika. 5:190–193.

[2] Abu-Alshaikh, I. dan Sahin, A. 2006. *Two-point iterative method for solving nonlinear equations.* Applied Mathematics and Computation. 182 :871-878.

[3] Gerlach, J. 1994. *Accelerate Convergence in Newton's Method.* Siam Review. 36(2): 272–276.

[4] Hasanov, V.I., Ivanov, I. G. & Nedjibov, G. 2005. *A new modification of Newton's Method.* preprint laboratorium of Mathematical Modeling, Shoumen university, Bulgaria.

[5] Kanwar, V. Sharma, J. R. & Mamta. 2005. *A new family of Secant-like method with superlinear convergence.* Applied Mathematics and Computation. 171:104– 107.

[6] Weerakoon, S. & Fernando, T. G. I. 2000. *A variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence.* Applied Mathematics Letters. 13: 87–93.