Mashadi dan M. Imran, (Eds)
Prosiding Seminar dan Rapat Tahunan BKS-PTN Wilayah Barat ke-23
10 – 11 Mai 2010
ISBN. 978-979-1222-95-2 (Jilid 4)

BEBERAPA PENURUNAN METODE ITERASI UNTUK SOLUSI PERSAMAAN NONLINEAR: METODE NEWTON

M. Imran
Laboratorium Matematika Terapan
Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Riau, Pekanbaru, 28293, Indonesia.

E-mail: mimran@unri.ac.id.

ABSTRAK

Artikel ini membahas beberapa cara penurunan metode iterasi, metode Newton, yang sering tidak di sajikan di buku-buku teks dasar-dasar metode numerik. Penurunan dilakukan secara geometri, interpolasi langsung, inverse interpolasi dan penggunaan identitas Newton. Diakhir pembahasan diberikan kesimpulan, teknis yang baik dipilih dalam pengajaran metode numerik yang dapat dimanfaatkan untuk melakukan riset lebih lanjut dibidang analisa numerik.

Kata kunci: *metode Newton, interpolasi polinomial, inverse interpolasi, identitas Newton*

1. PENDAHULUAN

Diberikan sebuah fungsi f yang terdefinisi pada daerah D dan mempunyai turunan secukupnya pada D. Selanjutnya kita tertarik untuk menentukan solusi real dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Keterbatasan solusi analitik untuk persamaan aljabar dan tidak tersedianya solusi analitik untuk fungsi trasenden menjadi alasan digunakannya metode numerik untuk mendapatkan solusi aproksimasi persamaan (1). Metode numerik yang sangat populer untuk mendapatkan solusi persamaan (1) adalah metode Newton, yang dipelajari disemua program sarjana teknik dan matematika.

Penurunan metode Newton pada program sarjana matematika sering disajikan secara geometri [1, 2, 9] dengan memisalkan α adalah akar dari persamaan nonlinier (1). Karena f dapat didiferensialkan maka grafik $y = f(x)$ mempunyai garis singgung pada setiap titik $(x, f(x))$. Misalkan x_0 adalah nilai awal untuk pendekatan akar α dan garis singgung dapat ditarik dari titik $(x_0, f(x_0))$ yang dinamai garis L_1, seperti diperlihatkan Gambar 1. Garis singgung tersebut merupakan tangen kurva $f(x)$ di titik $(x_0, f(x_0))$ dengan kemiringan $f'(x_0)$ sehingga memiliki persamaan

$$y - f(x_0)) = f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{2}$$

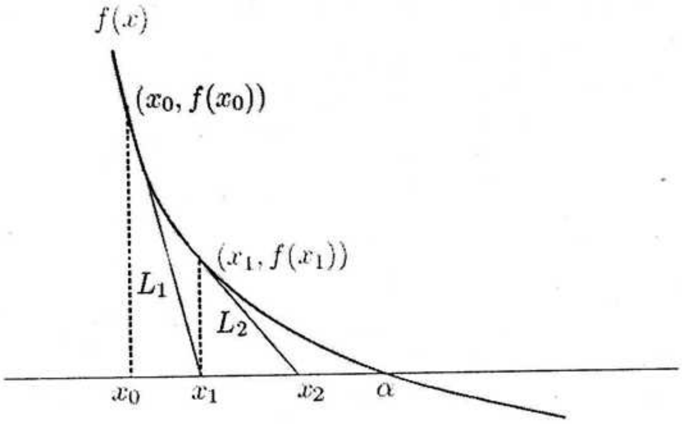
Perpotongan garis L_1 dengan sumbu x adalah x_1. Titik $(x_1, 0)$ didapatkan dengan mengambil $x_1 = x$ dan $y = 0$ dari persamaan (2) sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3}$$

Dengan cara yang sama, proses ini dapat diulangi sampai ke-n, sehingga diperoleh sebuah persamaan :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4}$$

ISBN. 978-979-1222-95-2 (Jilid 4)



Gambar 1: Geometri Metode Newton

dengan n adalah menunjukkan iterasi ke-n. Persamaan (4) dinamakan iterasi metode Newton. Perhatikan bahwa penurunan metode Newton melalui intuisi geometri ini mempunyai kelemahan dari segi penelitian matematika, karena teknis ini tidak mendukung untuk analisa lebih lanjut seperti analisa kekonvergenan dan penemuan metode iterasi lain.

2. PENURUNAN ALTERNATIF METODE NEWTON

Selanjutnya akan diberikan beberapa alternatif untuk mendapatkan formula iterasi metode Newton.

2.1. Interpolasi Langsung

Andaikan fungsi f, f', f'' terdefinisi dan kontiniu pada $[a,b]$. Misalkan $x_n \in [a,b]$ adalah aproksimasi terhadap akar α sedemikian hingga $f'(\alpha) \neq 0$ dan $|x_n - \alpha|$ cukup kecil. Ekspansi Taylor untuk fungsi f, disekitar $x = x_n$ diberikan oleh

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} f''(\xi(x)), \tag{5}$$

dengan $\xi(x)$ terletak antara x dengan x_n. Karena $f(\alpha) = 0$, persamaan (5) dengan $x = \alpha$, berubah menjadi

$$0 = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} f''(\xi(\alpha)). \tag{6}$$

Karena $|x_n - \alpha|$ cukup kecil, maka suku $(x_n - \alpha)^2$ dapat diabaikan, sehingga persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$0 = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n). \tag{7}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (7) terhadap α diperoleh

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Selanjutnya $x_{n+1} \approx \alpha$ diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{8}$$

yang merupakan formula iterasi Newton. Bila persamaan (6) disusun ulang diperoleh

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} \frac{f''(\xi(\alpha))}{f'(x_n)} \tag{9}$$

ISBN. 978-979-1222-95-2 (Jilid 4)

atau dengan bantuan persamaan (8) diperoleh

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{(\alpha - x_n)^2}{2}\frac{f''(\xi(\alpha))}{f'(x_n)}. \tag{10}$$

Dengan menggunakan persamaan (10) mudah dilihat bahwa metode Newton berorde dua.

2.2. Inverse Interpolasi

Dari kalkulus kita ketahui bahwa bila fungsi f kontiniu dan mempunyai turunan pada daerah sekitar akar dari $f(x) = 0$ dan jika $f'(\alpha) \neq 0$, maka terdapat secara tunggal fungsi inverse bernilai tunggal, $F(y)$. Jadi bila inverse dari $f(x)$ adalah $F(y)$, maka

$$f(\alpha) = 0, \quad \text{ekuivalen dengan} \quad \alpha = F(0).$$

Dari sini diketahui bahwa jika memungkinkan menginterpolasikan fungsi inverse $F(y)$ dengan suatu polinomial $P(y)$, maka aproksimasi akar dari $f(x) = 0$ dapat diperoleh dari $P(0)$.

Interpolasi inverse linear untuk $y_n = f(x_n)$, yang memenuhi nilai

$$F(y_n) = x_n \quad \text{dan} \quad \frac{dF(y_n)}{dy} = \frac{1}{f'(x_n)},$$

diberikan oleh

$$P(y) = F(y_n) + (y - y_n)\frac{dF(y_n)}{dy}. \tag{11}$$

Jadi aproksimasi terbaru $x_{n+1} = P(0)$, dan dari (11) didapat

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

yang merupakan metode Newton.

Dengan menggunakan error aproksimasi polinomial untuk inverse interpolasi $F(y)$ ini diperoleh

$$f(\alpha) - P(0) = \alpha - x_{n+1} = \frac{f'(x_n)^2}{2}\left(\frac{-f''(\eta)}{f'(\eta)^3}\right),$$

dengan $\eta = F(\xi)$, dan $\xi = (1-\theta)f'(x_n)$. Jadi karena

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)}{x_n - \alpha}\right)^2 = f'(\alpha)^2$$

dan juga $\eta \to \alpha$, maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_{n+1} - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}, \qquad f'(\alpha) \neq 0,$$

yang menunjukkan metode Newton konvergen kuadratik untuk akar sederhana.

2.3. Identitas Newton

Pandanglah identitas Newton,[4],

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(s)ds. \tag{12}$$

Bila $\int_{x_n}^{x} f'(s)ds$. di (12) diaproksimasi menggunakan jumlah kiri Reimann untuk satu interval diperoleh

$$\int_{x_n}^{x} f'(s)ds \approx f'(x_n)(x - x_n) \tag{13}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (13) ke persamaan (12), diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \tag{14}$$

ISBN. 978-979-1222-95-2 (Jilid 4)

Karena $f(\alpha)=0$, kemudian nyatakan aproksimasi akar $x_{n+1}=\alpha$, diperoleh kembali metode Newton berikut

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3. PENGEMBANGAN LANJUTAN PENURUNAN METODE NEWTON

Pada bagian ini akan dipaparkan pengembangan yang mungkin yang diilhami oleh cara penurunan menggunakan interpolasi langsung, inverse interpolasi dan identitas Newton.

Pada penurunan menggunakan interpolasi langsung membuka pemikiran kita, bagaimana jika interpolasi yang digunakan kuadratik, apa yang kita dapatkan. Jika interpolasi kuadratik yang dipilih dan dikuti prosedur yang diberikan pada bagian 2.1, kita akan berakhir dengan metode iterasi irrasional Halley

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}}},$$

yang diskusi selanjutnya dapat dilihat pada Scavo [12] dan Traub [14].

Bila penurunan menggunakan inverse interpolasi kuadratik dengan mengikuti proses sebagaimana yang disajikan di bagian 2.2, menghasilkan metode iterasi Chebyshev,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{1}{2}\frac{f(x_n)^2f''(x_n)}{f'(x_n)^3},$$

yang dibahas panjang lebar oleh Traub [14].

Melalui teknis analisis error seperti pada bagian 2.2, diperoleh orde kekonvergenan metode iterasi Chebyshev adalah tiga, yang disajikan dengan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^3}=\frac{f'(\alpha)^3}{6}\left(\frac{d^3F(0)}{dy^3}\right).$$

Selanjutnya bagaimana jika diaproksimasi integral pada ruas kanan (12) dengan aturan trapesium, yaitu

$$\int_{x_n}^{x} f'(s)ds\approx(x-x_n)\frac{(f(x)-f(x_n))}{2}, \tag{15}$$

sebagaimana dilakukan Weerakoon dan Fernando [16], menghasilkan metode dua langkah Newton berorde 3 yaitu

$$\dot{x}_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{16}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1})+f'(\dot{x}_{n+1})}. \tag{17}$$

Aproksimasi integral pada (12) dengan menggunakan aturan Simpson telah dilakukan oleh Hasanov et.al. [5], dan dengan aturan titik tengah untuk akar sederhana oleh Ozban [11] dan untuk akar ganda oleh Imran [8]. Kedua metode terakhir ini juga berbentuk dua langkah dengan orde kekovergenan 3 untuk akar sederhana dan linear untuk akar ganda.

Perhatikan bahwa mengproksimasi integral pada (12) dengan menggunakan aturan trapezium (15) dapat dipandang sebagai rata-rata aritmatik dari $f(x)$ dan $f(x_n)$. Jika cara pandang ini dikembangkan, maka rata-rata aritmatik ini dapat diganti dengan rata-rata harmonik, Ozban [11], dengan rata-rata heronian, Imran [7] dan rata-rata akar kuadrat, Syamsudhuha[13]. Hal ini membuka jalan penelitan baru untuk penggantian rata-rata aritmatika dengan rata-rata yang lain.

Selanjutnya dari terori aproksimasi, diketahui bahwa kombinasi konvek dari dua aproksimasi terbaik juga merupakan aproksimasi terbaik. Hal ini yang menghantarkan Horwitz [6] dalam meyajikan aturan Simpson sebagai kombinasi aturan trapesium dan titik tengah. Hal ini membuka peluang baru untuk

ISBN. 978-979-1222-95-2 (Jilid 4)

mengaproksimasi integral pada (12) dengan kombinasi linear aturan integrasi yang ada atau kombinasi linear diri beberapa rata-rata, seperti yang telah dilakukan Dehghan dan Hajarian [3], yang mengaproksimasi integral pada (12) dengan kombinasi linear aturan trapesium, aturan titik tengah dan rata-rata harmonik.

4. KESIMPULAN

Penurunan metode Newton secara geometri memberikan ilustrasi proses tahapan pertahapan konvergen atau divergen ke solusi persamaan (1), tapi menghilangkan konsep orde kekonvergenan dan pengembangan yang mungkin dari penurunan metode Newton. Penurunan menggunakan identitas Newton membuka peluang untuk mengenal pengembangan menemukan metode iterasi lain yang orde kekonvergenannya melebihi Newton, tapi penunjukkan orde kekonvergenannya masih memerlukan interpolasi. Teknik penurunan secara interpolasi, sangat menguntungkan, karena pendetailan dalam penurunan tidak hanya untuk menghasilkan formula tetapi juga untuk memberikan pemahaman tentang asal dan keterbatasan formula yang dihasilkan. Jadi dalam penyajian materi metode Newton sebaiknya gunakan teknik interpolasi, tanpa melupakan ilustrasi geometri teknik identitas Newton.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Atkinson, K. E. 1989. Elementary of Numerical Analysis. Second Edition. John Wiley & Son, New York.
[2]. Burden R.L dan Faires, J. D. 1993. Numerical Analysis, 5th Ed., PWS, Boston.
[3]. Dehghan M. dan Hajarian, M. 2008. New iterative method for solving non-linear equations with fourth-order convergence. Int. J. Comp. Math. 17: 1–6.
[4]. Hamming, R. H. 1973. Numerical Method for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Inc. New York. Republished by Dover, New York.
[5]. Hasanov, V.I., Ivanov, I. G. dan Nedjibov, G. 2005. A new modification of Newton's Method. preprint laboratorium of Mathematical Modelling, Shoumen university, Bulgaria.
[6]. Horwitz, A. 1993. A Generalization of Simpson's Rule. Approx. Theory & Appl. 9. 2. h.71–80.
[7]. Imran, M. 2008. Newton Iteration Based on Heronian Mean. Proceeding 4th IMTGT 2008 –Conferences on Mathematics, Statistics and their Applications (ICMSA 08),Syiah Kuala University, Banda Aceh. June 9 - 11, 2008,
[8]. Imran, M. 2008. Midpoint Newton's Method for Simple and Multiple Roots. Proceeding the 14th National Conference in Mathematics, and the Congress of Indonesian Mathematical Society, the Sriwijaya University, Palembang. July 24-27, 2008,
[9]. Johnston, R. L. 1982. Numerical Methods a Software Approach. John Wiley & Son, New York.
[10]. Lukic T. dan Ralevic N. M. 2007. Geometric mean Newton's method for simple and multiple roots. Appl. Math. Lett. 21: 30–36.
[11]. Ozban A. Y. 2004. Some new variant of Newton's Method. Appl. Math. Lett. 17: 677–682.
[12]. Scavo, T.R. dan Thoo, J.B. 1995. On the geometry of Halley's method. Amer. Math. Monthly. 102: 417–426.
[13]. Syamsudhuha dan Imran, M. 2008. Root Mean Square Newton's Method. Prosiding Seminar UNRI-UKM ke 5, Universitas Riau, Pekanbaru. 19 - 20 Agustus 2008.

ISBN. 978-979-1222-95-2 (Jilid 4)

[14]. Traub, J.F. 1964. Iterative Methods For The Solution Of Equations. Prentice Hall,Englewood Cliffs, New Jersey.

[15]. Wait, R. 1979. The Numerical Solution of Algebraic Equations. John Wiley & Son, New York.

[16]. Weerakoon, S. dan Fernando, T. G. I. 2000. A variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence. Applied Mathematics Letters. 13: 87–93.