# KETERKAITAN KETAKSAMAAN NILAI SINGULAR PADA PEMETAAN LINIER

**Rolan Pane, Asli Sirait, Aziskhan**
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
email: rolan.pane@gmail.com

***ABSTRAK***

*Suatu matriks kompleks $M_n$ berukuran nxn pada pemetaa linier $\emptyset : X \to X + (tr\, X)I$ pada $M_n$ Diduga jika $\begin{bmatrix} A & X \\ x^* & B \end{bmatrix}$ semi definit postip untuk $A$, $X$, $B$ $\in M_n$ maka $2s_j\left(\emptyset(X)\right) \leq s_j(\emptyset(A+B)$, $j = 1, \dots, n$ dan $s_j(.)$ merupakan rataan dari nilai singular terbesar ke j*

***Key words :*** ketaksamaan nilai singular , blok matriks , pemetaan linier.

## PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya, diantaranya sebagai ilmu bantu yang sangat penting dan berguna dalam kehidupan sehari-hari yang menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan sarana berpikir untuk menumbuh kembangkan pola pikir logis, sistematis, obyektif, kritis, dan rasional. Oleh sebab itu, matematika harus mampu menjadi sarana untuk meningkatkan daya nalar dan dapat meningkatkan kemampuan memecahkan masalah dengan mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari. Matematika juga digunakan untuk memecahkan masalah teori matematika itu sendiri. Salah satu permasalahan yang muncul adalah berbentuk matriks.

Teori matriks merupakan salah satu bagian dari aljabar linier yang secara luas digunakan dalam berbagai bidang seperti matematika terapan, komputer sains, ekonomi, teknik mesin, riset operasi, statistik, dan lain-lain. Selain itu, teori matriks memiliki andil besar dalam kombinatorik, teori graf, dan berbagai disiplin ilmu matematika lainnya. Dengan ini, tidaklah berlebihan jika teori matriks dikatakan salah satu cabang ilmu matematika yang paling kaya. Salah satu jenis matriks yang banyak digunakan adalah matriks semi definit positif. Bathia [3, h.12] menjelaskan bahwa suatu matriks kompleks *A* elemen dari *Mn* dikatakan matriks semi definit positif atau definit tak negatif, jika $\boldsymbol{x^* A x} \geq \boldsymbol{0}$ untuk setip *x* elemen dari $\boldsymbol{C^n}$. Dengan $\boldsymbol{x^*}$ merupakan transpos konjugat dari *x*, *Mn* menyatakan himpunan matriks persegi berdimensi *n* x *n*, dan $\boldsymbol{C^n}$ menyatakan himpunan vektor kompleks berdimensi *n*. Matriks semi definit positif memiliki nilai eigen dan juga determinan yang bernilai riil dan tak negatif. Hal tersebut mengakibatkan matriks ini banyak dimanfaatkan dalam berbagai aplikasi pada matematika. Berbagai ketaksamaan dapat berlaku untuk bilangan tak negatif, Karena sifat tak negatif dari matriks semi definit positif , maka matriks jenis ini sangat berpotensi untuk diteliti. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk menggunakan artikel yang ditulis oleh **Minghua Lin** [6] dalam penelitian yang berjudul " Keterkaitan Ketaksamaan Nilai Singular Pada Pemetaan Linier".

## KAJIAN LITERATUR DAN PERUMUSAN MASALAH

Adapun permasalahan yang akan dibahas dalam proposal ini adalah bagaimana membuktikan ketaksamaan nilai singular terkait peta linier

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang akan mendukung penelitian ini. Tentang Ketaksamaan Nilai Eigen Weyl yang menganalisis suatu Matriks Hermitian merupakan kelas dari matriks persegi khusus. Kajian mengenai matriks Hermitian menjadi sangat penting karena matriks Hermitian memiliki beberapa karakteristik. Salah satu karakteristik yang paling utama dari matriks Hermitian yaitu memiliki nilai eigen berupa bilangan real sehingga dapat didefinisikan sebuah fungsi dari matriks Hermitian.

**Matriks Unitary**

Sebuah matriks persegi kompleks $U \in C^{n\times n}$ memenuhi $U^hU = UU^h = 1$

disebut **unitary**. Jika $U$ adalah matriks unitary riil maka

$U^tU = UU^t = I$

dan $U$ disebut **Orthogonal**. Secara ekivalen, sebuah matriks kompleks $U$ adalah unitary jika $U^{-1} = U^h$ dan matriks riil adalah orthogonal jika $U^{-1} = U^t$.

Jika $U$ adalah unitary, maka

$\langle U_x | U_y \rangle = x^hU^hU_y = x^hy = \langle x|y \rangle$ untuk semua $x, y \in C^{n\times 1}$

Dengan konsekuen, $\|U_x\| = \|x\|$ untuk semua $x \in C^{n\times 1}$, dan jika $\{x_1, \dots, x_k\}$ adalah himpunan orthonormal, maka diperoleh $\{U_{x1}, \dots, U_{xk}\}$.

Berdasarkan konsekuensi di atas maka $\theta\left(U_x, U_y\right) = \theta(x, y)$untuk semua $x, y \in C^{n\times 1}$.

**Teorema 2.1** Jika $U \in C^{n\times 1}$ adalah matriks unitary dengan nilai eigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, maka

a) $|\lambda_i| = 1,\ i = 1, \dots, n$

b) Terdapat matriks unitary $P \in C^n$ yang memenuhi $P^hUP = D = diag|\lambda_1, \dots, \lambda_n|$

Teorema 2.1 merupakan pernyataan sederhana bahwa nilai eigen matriks unitary (orthogonal) dapat dialokasikan, terdapat sebuah matriks yang selalu bisa didiagonalisasikan walaupun memiliki lebih dari satu nilai eigen, dan matriks modal dapat ditentukan menjadi unitary (orthogonal).

**Martiks Hermitian**

Matriks Hermitian merupakan kelas dari matriks persegi khusus. Matriks $A \in C^{n\times n}$ adalah Hermitian jika $A^h = A$ dan sebuah matriks Hermitian riil adalah simetris.

Matriks Hermitian memiliki beberapa karakteristik.

**Teorema 2.2** Matriks $A \in C^{n\times n}$ adalah Hermitian dengan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, maka

**(i)** $\lambda_i^* = \lambda_i = 1, \dots, n$ nilai eigen $A$ adalah riil.

**(ii)** Matriks Hermitian memenuhi matriks unitary $P \in C^n$

$P^hAP = D = diag|\lambda_1, \dots, \lambda_n|$ (2.1)

**Bukti (i)**. Jika **x** adalah vektor eigen matriks$A$, dan $\lambda$ adalah nilai eigen, maka $Ax = \lambda x$ (2.2) Dengan mengalikan kedua sisi pada persamaan (2.2) dengan $x^h$, maka diperoleh

$$x^hA = x^hA^h = (Ax)^h = (\lambda x)^h = \lambda^* x^h \qquad (2.3)$$

Selanjutnya mengalikan kedua sisi pada persamaan (2.3) dengan **x**, dengan catatan bahwa $x^hx = |x|^2 = 1$, maka diperoleh $x^hAx = \lambda = \lambda^*$ terbukti semua nilai eigen matriks $A$ adalah riil.

**Bukti (ii)**. Matriks simetris riil

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mempunyai karakteristik polinomial$d(s) = (s-1)^2(s-7)$. $A$ memiliki nilai eigen riil. Dua buah vektor eigen bebas linier diasosiasikan dengan mengalikan nilai eigen
$\lambda_1 = 1$,

$(A-\lambda_1 I)v = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} v = 0$ Diperoleh, $v_{11} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dengan mengaplikasikan proses **Gram-Schmidt** dalam $\{v11, v22\}$, dan proses normalisasi eigen vektor orthogonal, diperoleh dua vektor eigen orthonormal diasosiasikan dengan
$\lambda_1 = 1$,

$$u_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{22} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sebuah vektor eigen diasosiasikan dengan $\lambda_2 = 7$, maka diperoleh

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan vektor eigen pada matriks unitary, vektor eigen pada matriks Hermitian dengan nilai eigen berbeda yang juga orthogonal. Setelah normalisasi $v_2$, vektor eigen diasosiasikan dengan $\lambda_2 = 7$ diperoleh

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan memverifikasi matriks modal, diperoleh

$$P = [u_{11} \quad u_{12} \quad u_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

adalah orthogonal dan
$P^t AP = diag[1,1,7]$

Matriks Positif

Bathia [3] mengatakan $A$ adalah matriks semi definit positif pada kondisi
$\langle x, Ax \rangle \geq 0, x \in H$
dan definit positif pada kondisi
$\langle x, Ax \rangle > 0, x \neq 0$

Matriks semi definit positif adalah positif definit jika dan hanya jika mempunyai invers.
Ada beberapa kondisi pada karakteristik matriks positif [3]:
$A$ adalah positif jika dan hanya jika $A$ adalah Hermitian $(A = A^*)$ dan semua nilai eigen adalah tidak negatif. $A$ adalah benar-benar positif jika dan hanya jika semua nilai eigen adalah positif.

*i.* $A$ adalah positif jika dan hanya jika $A$ adalah Hermitian dan semua minor utama tidak negatif. $A$ benar-benar positif jika dan hanya jika semua minor utama adalah positif.
*ii.* $A$ adalah positif jika dan hanya jika $A = B^*B$ untuk beberapa matriks $B$.
*iii.* $A$ benar-benar positif jika dan hanya jika $B$ nonsingular.

*iv.* $A$ adalah positif jika dan hanya jika $A = T^*T$ untuk beberapa matriks segitiga atas $T$ . Lebih lanjut $T$ dapat dipilih untuk mendapatkan diagonal entri tidak negatif.

*v.* $A$ adalah positif jika dan hanya jika $A = B^2$ untuk beberapa matriks $B$ positif. Matriks $B$ adalah matriks khusus, dapat ditulis $B = A^{\frac{1}{2}}$ dan disebut akar positif $A$. $A$ benar-benar positif jika dan hanya jika $B$ benar-benar positif.

*vi.* $A$ adalah positif jika dan hanya jika terdapat $x_1, \dots, x_n$ dalam $H$
$a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$

*vii.* $A$ benar-benar positif jika dan hanya jika vektor $x_j, 1 \le j \le n$ adalah bebas linier.

- **Lemma 2.1** [2, h.75] untuk $M, N \in M_n$ , $s_j(M+N) \le s_j(M) + s_1(N)$,

**Lemma 2.2** [2, h.262] untuk $M, N \in M_n$
$s_j(M^*N) \le s_j(MM^* + NN^*), \qquad j = 1, \dots, n$

**Lemma 2.3** [3, h.13] jika $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ dimana $A, X, B \in M_n$ adalah semi definit positif, maka terdapat kontraksi $C$, sehingga
$x = A^{\frac{1}{2}} C B^{\frac{1}{2}}$

**Lemma 2.4** Untuk $M$ , $N \in M_n$
$\lambda_j(M^*M + N^*N) \le \lambda_j(MM^* + NN^*) + \lambda_1(M^*M), j = 1, \dots, n$

Peta Transpos Parsial Positif
M. Lin [5] mengatakan ruang pada matriks kompleks dinotasikan dengan $M_{m \times n}$.
jika $m = n$, maka $M_n$.
Jika $X \in M_n$ adalah semi definit positif, maka $X \ge 0$. Terdapat matriks

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

dengan setiap anggota terdapat di dalam $M_n$. Transpos dari matriks $A$ adalah

$$A^T = \begin{bmatrix} A^T_{1,1} & \cdots & A^T_{1,m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A^T_{m,1} & \cdots & A^T_{m,m} \end{bmatrix}$$

Hasil dan pembahasan pada bagian ini berisikan pembuktian dari beberapa teorema dan lema 2.4 di atas :

## METODOLOGI .

Penelitian ini bersifat studi kepustakaan tentang keterkaitan ketaksamaan nilai singular pada pemetaan linier dengan menganalisis hubungan :

A. Dugaan 1.1. Jika $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$, dimana $A, X, B \in M_n$, adalah semidefinit positif, maka
$$2\, s_j(\Phi(X)) \le s_j(\Phi(A+B)), \qquad j = 1, \dots, n$$

B. Ketaksamaan nilai eigen Weyl menyatakan jika $X, Y$ adalah matriks Hermitian, maka
$\lambda_j(X+Y) \le \lambda_1(X) + \lambda_j(Y)$,
$j = 1, \dots, n$

C. Nilai singular dari block matriks semi definit positip yang menyatakan bahwa t, Jika A , B dan C merupakan matriks kompleks sedemikian hingga

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{Dimana A berukuran } m \times m, \text{ C berukuran } n \times n,$$

B berukuran m × n, and rank B = r, Maka $\log \sigma(B) \prec_w \log \mu$ dimana $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ dengan

$\mu_i = \max\{\lambda_i(A), \lambda_i(C)\}$ jika $i \leq r$ dan 0 untuk lainnya . $\sigma(B) \prec_w \mu$

Selanjutnya misalkan A, B dan C merupakan matriks persegi yang mempunyai orde sama maka $\log|\lambda(B)| \prec_w \log \mu$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

**Lemma 2.1** [2, h.75] untuk $M, N \in M_n$ , $s_j(M+N) \leq s_j(M) + s_1(N)$,

**Lemma 2.2** [2, h.262] untuk $M, N \in M_n$

$s_j(M^*N) \leq s_j(MM^* + NN^*), \quad j = 1, \ldots, n$

**Lemma 2.3** [3, h.13] jika $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ dimana $A, X, B \in M_n$ adalah semi definit positif, maka terdapat kontraksi $C$, sehingga $x = A^{\frac{1}{2}} C B^{\frac{1}{2}}$

**Lemma 2.4** Untuk $M$ , $N \in M_n$

$\lambda_j(M^*M + N^*N) \leq \lambda_j(MM^* + NN^*) + \lambda_1(M^*M), j = 1, \ldots, n$

Peta Transpos Parsial Positif

M. Lin [5] mengatakan ruang pada matriks kompleks dinotasikan dengan $M_{m \times n}$.

jika $m = n$, maka $M_n$.

Jika $X \in M_n$ adalah semi definit positif, maka $X \geq 0$. Terdapat matriks

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

dengan setiap anggota terdapat di dalam $M_n$. Transpos dari matriks $A$ adalah

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{1,1}^T & \cdots & A_{1,m}^T \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m,1}^T & \cdots & A_{m,m}^T \end{bmatrix}$$

Hasil dan pembahasan pada bagian ini berisikan pembuktian dari beberapa teorema dan lema 2.4 di atas :

**Ketaksamaan nilai eigen Weyl**

Ketaksamaan nilai eigen Weyl ([2, h.63]) menyatakan jika $X, Y$ adalah matriks Hermitian, maka

$\lambda_j(X+Y) \leq \lambda_1(X) + \lambda_j(Y), j = 1, \ldots, n$

(Sangat menarik untuk dicatat bahwa Lemma 2.1 merupakan konsekuensi langsung dari fakta ini!) Sebagai $N^*N = U^*NN^*U$ untuk beberapa matriks kesatuan $U$,

$$M^*M + N^*N = M^*M + U^*NN^*U$$
$$\leq M^*M + U^*(MM^* + NN^*)U$$

Sekarang pengaplikasian ketaksamaan nilai eigen Weyl memberikan hasil yang dibutuhkan.

Dugaan 2.5 untuk $M, N \in M_n$,

$$\lambda_j(M^*M+N^*N) \leq \lambda_j(MM^*+NN^*) + \frac{1}{2}\,Tr(M^*M+N^*N-M^*N-N^*M)$$

Bukti. Penggantian $M, N$ dengan $M-N,\ M+N$, pada Lema 2.4

$$\lambda_1(M^*M+N^*N) \leq \lambda_j(MM^*+NN^*) \qquad +\frac{1}{2}\lambda_1\left((M-N)^*(M-N)\right)$$

Tapi $(M-N)^*\ (M+N) \geq 0$,ini mengimplikasikan

$\lambda_1\left((M-N)^*(M-N)\right) \leq Tr\left((M-N)^*(M-N)\right)$

$= Tr\ (M^*M+N^*N-M^*N-N^*M)$

Dengan demikian, dugaan terbukti.

Bukti dugaan 1.1. Pertama, catatan bahwa untuk setiap $j$.

$s_j\left(A+B+\left(Tr(A+B)\right)I\right) = \lambda_j(A+B)+Tr(A+B)$,

Dengan menggunakan Lema 2.1 dan Lema 2.3 untuk menunjukkan kontraksi $C$

$$2\left(s_j\left(A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right)+\left|Tr\ A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right|\right) \leq \lambda_j(A+B)+Tr(A+B)$$

Dengan mengatur $M = C^*A^{\frac{1}{2}},\ N = B^{\frac{1}{2}}$ pada Lema 2.2 memberikan

$$2s_j\left(A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right) \leq \lambda_j(C^*AC+B)$$

Maka ketaksamaan (2.1) terbukti dari

$$\lambda_j(C^*AC+B)-\lambda_j(A+B) \leq Tr(A+B)-2\left|Tr\ A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right|$$

Kita berasumsi tanpa kehilangan bentuk umum $Tr\ A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}} \geq 0$ pada (2.2), karena jelas bahwa (2.2) adalah invarian dengan mengganti $C$ dengan $e^{i\theta}C$ untuk beberapa $\theta$.

Sekarang atur $M = A^{\frac{1}{2}}C,\ N = B^{\frac{1}{2}}$ pada dugaan 2.5

$$\lambda_j(C^*AC+B)-\lambda_j\left(A^{\frac{1}{2}}CC^*A^{\frac{1}{2}}+B\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}Tr\ (C^*AC+B-C^*A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}C$$

$$\leq Tr\ (C^*AC+B-C^*A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}C$$

$$= Tr(C^*AC+B)-2TrA^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}$$

Dengan $C$ adalah kontraksi, $A^{\frac{1}{2}}CC^*A^{\frac{1}{2}} \leq A$. $\lambda_j(A^{\frac{1}{2}}CC^*A^{\frac{1}{2}}+B) \leq \lambda_j(A+B)$

Maka, dugaan 1.1 terkonfirmasi.

**Ketaksamaan Nilai Singular Block Matriks Semi Definit Positip**

Diketahui ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri untuk nilai singular oleh Bhatia and Kittaneh in [3] dalam bentuk

$2\sigma_j(AB^*) \leq \sigma_j(A^*A+B^*B)$,

$j = 1, 2, \ldots, n$

Untuk suatu A, B $\in M_n$.

Yang telah dibuktikan oleh Zhan dalam [9]

$\sigma_j(A-B) \leq \sigma_j(A \oplus B), j = 1, 2, \ldots, n$

untuk matriks semi definit positip A, B , $M_n$

dan $2\sigma_j(K) \leq \sigma_j\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$, j = 1, 2,…r (1)

Untuk suatu block matriks semi definit positip $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$, dimana $M \epsilon M_m$ , $N \epsilon M_m$ ,

r = min {m , n}.

F. Zhang dalam [4] menunjukan nilai singular dari block matriks semi definit positip bahwa t, Jika A , B dan C merupakan matriks kompleks sedemikian hingga

$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$

Dimana A berukuran m × m, C berukuran n × n , B berukurans m × n, and rank B = r, Maka

log σ (B) $\prec_w$ log μ

dimana $\mu = (\mu_1 , \mu_2 ,\ldots,\mu_n)$ dengan

$\mu_i = \max \{\lambda_i (A), \lambda_i (C)\}$ jika i ≤ r dan 0 untuk lainnya .

σ (B) $\prec_w$ μ

Selanjutnya misalkan A, B dan C merupakan matriks persegi yang mempunyai orde sama maka

log |λ (B)| $\prec_w$ log μ

Ketaksamaan nilai singular untuk block matriks berukuran 2x2 ditampilkan dalam bentuk jumlah langsung [direct sum ) dari nilai singular matriks semi definit posistip .

$$\sigma j(A \oplus C) - \sigma 1(B) \leq \sigma j \begin{pmatrix} A & B \\ B* & C \end{pmatrix} \leq \sigma J(A \oplus C) + \sigma 1(B) \qquad (3.2)$$

Untuk suatu block matriks semi definit $\begin{pmatrix} A & B \\ B* & C \end{pmatrix}$, dengan $A \epsilon M_m$ , $C \epsilon M_m$ ,

r = min {m , n}

$$\sum_{j-1}^{k} \sigma j\,(A \oplus C) - \sigma j(B) \leq \sum_{j-1}^{k} \sigma j \begin{pmatrix} A & B \\ B* & C \end{pmatrix} \leq \sigma J(A \oplus C) + \sigma j(B),$$

$$j = 1,2, \ldots, r \qquad (3.3)$$

Untuk suatu block matriks semi $\begin{pmatrix} A & B \\ B* & C \end{pmatrix}$,dimana A,B,dan C merupakan matriks persegi berorde n

$$\tfrac{1}{2}\sigma j(A + B + B* + C) \leq \sigma J \begin{pmatrix} A & C \\ B* & D \end{pmatrix}, j=1,2,\ldots,n \qquad (3.4)$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma j(A + C - (B + B*)) \leq \sigma J \begin{pmatrix} A & C \\ B* & D \end{pmatrix}, j=1,2,\ldots,n \qquad (3.5)$$

Untuk suatu block matriks semi definit posistip $\begin{pmatrix} A & C \\ B* & D \end{pmatrix}$ dimana A,B and C merupakan matriks persegi berukuran nxn .

Jika Ai$\geq 0, i = 1,2, \ldots, n$ $maka$ $\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma j(\sum_{i=1}^{n} Ai)$

$\leq \sigma j(\oplus_{i=1}^{n}$ Ai),j=1,2,…,n (3.6)

lemma 1 if x1$\geq x2 \ldots \geq xn \geq 0$ $dan$ $y1 \geq y2 \geq \cdots \geq yn \geq 0$ memenuhi

$$\prod_{i=1}^{k} xi \leq \prod_{i=1}^{k} yi, k = 1,2, \ldots, n$$

maka ketaksamaan sdiatas juga memenuhi $\sum_{i=1}^{k} xi \leq \sum_{i=1}^{k} yi$ $, k = 1,2, \ldots, n$

lemma 2 let A,B $\epsilon$ $Mn$ merupakan matriks Hermitian , Maka

$\lambda\,(A + B) \prec \lambda\,(A) + \lambda\,(B)$

lemma 3 Jika A,B $\epsilon$ $Mn$ merupakan matriks hermitian , Maka

$\lambda(A) - \lambda(B \lambda \prec (A - B)$

lemma 4; Misalkan A and B be $m \times n$ merupakan matriks kompleks , Maka

$\sigma(A + B) \prec w\sigma(A) + \sigma(B)$

Lemma 5 . misalkan A dan B merupakan matriks semi definit positip dan berukuran sama , Maka

$log\sigma(A - B) \prec w \; log\sigma(A + B)$

Sebagai konsekwensinya

$\sigma(A - B) \prec w\sigma(A + B)$

Diperoleh :

$\| A - B \| ui \leq \| A + B \| u$

## KESIMPULAN

A. Rataan geometric dua matriks definit positip $A, B \in M_n$ didefinisikan dengan $A\#B = B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$. Dapat diperluas ke semua $A, B \geq 0$ dengan batas atas $A\#B = \lim_{\varepsilon \to 0}(A + eI_n)\#(B + eI_n)$

B. Suatu matrisk definit positif $A, B$ sehingga $Tr\; A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} > TrA\#B$ dan $Tr\; AB > Tr(A\#B)^2$. Sekarang untuk $A$ dan $B$ tetap.

$$\sum_{i=1}^{n} \; s_j^2(\Phi(X)) =$$

$$Tr\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} + \left(Tr\; A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right)I\right)^{*}\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} + \left(TrA^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right)I\right)$$

$$= Tr\; AB + (n + 2)\left(TrA^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$> Tr(A\#B)^2 + (n + 2)(TrA\#B)^2$$

$$= Tr(A\#B + (TrA\#B)I)^2 = \sum_{j=1}^{n} s_j^2(\Phi(A\#B))$$

## DAFTAR PUSTAKA


Ando.T, *Geometric mean and norm Schwarz inequality*. Annals of Functional Analysis, 7(2016), 1-8

Bathia.R. Matrix Analysis. Springer- Verlag. New York, 1997.

Bathia,R, Positive De_nite Matrices. Princeton University Press, Princeton, 2007.

F. Zhang, Matrix Theory: Basic Result and Thechniques, Springer-Verlag, New York, 1999.

F. Zhang, The Schur Complement and Its Applications, Springer- Science+Business Media, nc. 2005.

M. Lin. Completely PPT Map. Linear Algebra and Its Applications, 459 (2014), 404-410.

M. Lin dan H. Wolkowicz. Hirosima's theorem and matrix norm inequalities. Acta cientiarum Mathematicarum, 81 (2015), 45-53.

M. Lin. Inequalities related to 2 $\times$ 2 block PPT matrices. Operator and Matrices, 9 (2015), 917-924.

X. Zhan, Matrix Inequalities, LNM1790, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Z. Ulukök, Inequalities for 2x2 Block Matrices, MS Thesis, Selcuk University, 2009 (in Turkish ).