Pendekatan Dual-Matriks Untuk Menyelesaikan Persoalan Transportasi

Aziskhan, Usna Wita, M D H Gamal

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Abstract: This paper discusses an approach to determine the optimal solution of the unbalanced transportation problems detailing the work of Ji and Chi published in Asia Pacific Journal of Operational Research 19, pp. 34-45 (2002). The objective function of the problem is to minimize the total shipping costs. Starting from building dual of the primal transportation problems, this transportation problem is solved by using a dual-matrix approach algorithm to obtain allocation of more profitable products. Finally, we show a numerical example how the method works.

Keywords: *Transportation problems, dual transportation, dual-matrix approach.*

1. Pendahuluan

Model awal transportasi dipelopori oleh Hitchock pada tahun 1941 dalam kertas kerjanya yang berjudul The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Location dan kemudian dikembangkan oleh Koopmans dalam kertas kerjanya Optimum Utilization of the Transportation System [9]. Selanjutnya perumusan persoalan program linear dan cara pemecahan yang sistimatis dikembangkan oleh Danzig [11, hal:175]. Ciri-ciri khusus persoalan transportasi. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah destinasi tertentu. Kualitas produk yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh destinasi besarnya ditentukan. Produk yang dikirim dari suatu sumber ke suatu destinasi besarnya tertentu. Ongkos pengiriman produk dari sumber ke suatu destinasi, besarnya tertentu. Dalam hal ini dibahas mengenai penyelesaian persoalan transportasi, kemudian digunakan pendekatan yang menggunakan dual dari persoalan transportasi sebagai pengganti primal dan menghasilkan solusi optimal dari dual dengan menggunakan operasi matriks yang dinamakan dengan pendekatan dual-matrix.

Ongkos pengiriman produk dari sumber ke suatu destinasi, besarnya tertentu. Dalam hal ini dibahas mengenai penyelesaian persoalan transportasi, kemudian digunakan pendekatan yang menggunakan dual dari persoalan transportasi sebagai pengganti primal dan menghasilkan solusi optimal dari dual dengan menggunakan operasi matriks yang dinamakan dengan pendekatan dual-matrix.

2. Metode pendekatan pada Dual-Matriks

Yang menjadi permasalahan ini adalah apabila persoalan transportasi tersebut tidak seimbang. Dalam praktek di lapangan sering dijumpai persoalan transportasi tidak seimbang. Dengan menggunakan metode simplex transportasi untuk menemukan solusi optimum maka persoalan tersebut harus diseimbangkan terlebih dahulu.

Persoalan transportasi yang dihadapi pada persoalan ini sama dengan persoalan sebelumnya, dengan menentukan solusi optimum sehingga biaya transportasi yang dikeluarkan adalah minimum. Dalam pencarian solusi optimumpada persoalan ini digunakan suatu pendekatan dengan menggunakan operasi matriks yang disebut dengan pendekatan dual-matrix. Sama halnya dengan metode simplex transportasi, sel yang digunakan pada pendekatan dual-matrix adalah sel basis dan semua sel lainnya merupakan sel nonbasis. Ide utama pendekatan dual-matrix adalah menentukan solusi fisibel dari persoalan dual dan mengkorespondensikannya ke matriks [8]. Teori dualitas digunakan untuk meng-cek kondisi optimal dan menentukan sel keluar. Selama proses iterasi untuk menentukan solusi optimal pada pendekatan dual-matriks kasus degenerasi diabaikan.

Secara ringkas, algoritma pendekatan dual-matrix untuk persoalan transportasi adalah sebagai berikut:

Langkah 0. Inisialisasi, yaitu pemberian nilai awal pada suatu variabel.

0.1 Inisialisasi ke bentuk matriks untuk menentukan solusi fisibel basis awal dengan membentuk himpunan permintaan dan negatif persedian,

$$A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, -a_1, -a_2, \ldots, -a_m\}$$

0.2 Dengan mengambil

$$u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{dan}$$

$$v_j = \bar{c}_{ij} = min\left\{\bar{c}_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m\right\}; j = 1, 2, \ldots, n.$$

untuk menentukan nilai dari variabel dual ui dan vj .Jika sama maka pilih salah satu, dengan sel $\bar{c}_{ij}$ berkorespondensi dengan $(i_j, j), (j = 1, 2, \ldots, n)$.

0.3 Kemudian dibangun himpunan sel basis yang dinotasikan dengan Γ

$$\Gamma = \{(i_1, 1), (i_2, 2), \ldots, (i_n, n), (1, 0), (2, 0), \ldots, (m, 0)\},$$

dengan sel $(1, 0), (2, 0), \ldots, (m, 0)$ disebut virtual sel karena sel-sel tersebut tidak ada pada matriks transportasi.

0.4 Selanjutnya dibentuk matriks $D = [d_{ij}]$ berukuran $(m + n) \times (m + n)$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i, j = 1, 2, \ldots, n \\ -1 & i = 1, 2, \ldots, n; n + i_1, n + i_2, \ldots, n + i_{n_1} \\ -1 & i, j = n + 1, n + 2, \ldots, n + m \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

dan kemudian menghitung nilai dari fungsi tujuan

$$Z_d = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

Langkah 1. Menentukan sel yang akan meninggalkan basis.Untuk menentukan sel yang meninggalkan basis pada pendekatan dual-matrix sama seperti menentukan variabel keluar pada metode simplex transportasi.

1.1 Dihitung

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AD}.$$

1.2 Menentukan nilai terkecil y_k pada elemen-elemen Y, yaitu nilai elemen ke-k di Y yang terkecil. Apabila terdapat nilai terkecil yang sama, pilih salah satu.

1.3 Jika $y_k \geq 0$, solusi optimal (solusi dual dan primal), maka iterasi berhenti. Sebaliknya sel yang meninggalkan basis adalah elemen ke-k pada Γ, yaitu sel (i_k, j_k).

Langkah 2. Menentukan sel yang akan masuk basis.

2.1 Untuk menentukan sel yang masuk basis, misalkan

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,k} \\ d_{2,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{j,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n,k} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{n+1,k} \\ d_{n+2,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n+i,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n+m,k} \end{bmatrix}$$

Dengan Q adalah matriks $n \times 1$ dan P adalah matriks $(n + 1) \times 1$.

2.2 Kemudian dihitung $p_i - q_j$ untuk semua sel non basis. Jika $p_i - q_j \leq 0$, maka solusi fisibel untuk persoalan dual tidak terbatas dan persoalan primal tidak punya solusi, maka iterasi berhenti. Sebaliknya, dihitung

$$\theta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j \ \ jika \ \ pi - qj > 0.$$

2.3 Selanjutnya menentukan nilai terkecil θ_{st} pada semua θ_{ij} , dan sel (s,t) merupakan sel yang akan masuk basis. Apabila ada nilai yang sama, maka pilih salah satu

Langkah 3. *Update.*

3.1 *Update* matriks *D*.

Untuk elemen kolom k,

$$\hat{d}_{lk} = -d_{lk} \quad (l = 1, 2, \dots, m + n)$$

Untuk elemen kolom lainnya,

$$\hat{d}_{lr} = -d_{lr} + (\hat{d}_{lk} d_{s+n,r} - d_{ir})\hat{d}_{lk} \ \begin{cases} r = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m+n \\ l = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m+n \end{cases}$$

3.2 Meng-*update* himpunan Γ dengan mengganti sel ke-k (i_k, j_k) dengan sel yang masuk basis (s, t).

3.3 Meng-*update* nilai Γ

$$\hat{u}_i = u_i - \theta_{st} p_i \, , \quad i = 1, 2, \dots, m$$
$$\hat{v}_i = v_i - \theta_{st} p_j \, , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

dan nilai fungsi tujuan

$$z_d = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

Kemudian kembali ke langkah 1 untuk menguji keoptimalan solusi.

3. Persoalan Transportasi dengan Pendekatan Dual-Matrix

Dari persoalan transportasi tersebut misalkan sebuah perusahaan memiliki tiga pabrik S_1, S_2, S_3 dan tiga gudang, D_1, D_2, D_3 di enam lokasi yang berbeda. Jumlah total produk yang dihasilkan pabrik adalah sebagai berikut:

S_1 : 140 *unit*
S_2 : 120 *unit*
S_3 : 110 *unit*

dan total permintaan dari gudang adalah sebagai berikut:

D_1 : 100 *unit*
D_2 : 60 *unit*
D_3 : 80 *unit*

Biaya pendistribusian (dalam unit mata uang) satu jenis produk per unit antara pabrik dan gudang dapat dilihat pada Tabel 3.1

Tabel 1: Contoh Persoalan

dari/ke	D_1	D_2	D_3
S_1	5	4	9
S_2	6	5	10
S_3	7	2	8

Untuk menentukan solusi optimal persoalan tersebut, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mengubah persoalan tersebut ke persoalan dual. Persoalan dual merupakan persoalan kedua dari primal, maka untuk menentukan dual dari persoalan tersebut langkah yang harus dilakukan adalah menentukan primal dari persoalan tersebut terlebih dahulu. Fungsi tujuan untuk model primal dari persoalan:

$$\min \ z = 5\,x_{11} + 4x_{12} + 9\,x_{13} + 6\,x_{21} + 5\,x_{22} + 10\,x_{23} + 9\,x_{31} + 2\,x_{32} + 8\,x_{33}$$

Kendala pada persoalan transportasi terdiri dari beberapa kendala yaitu, kendala persediaan, kendala permintaan, dan kendala tak negatif dan integer.

Kendala persediaan:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 140$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 120$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 110$$

Kendala permintaan:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 60$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 80$$

Kendala tak negatif dan integer: $x_{ij} \geq 0$ dan integer.

Persoalan transportasi tersebut tidak normal maka untuk mengubah persoalan transportasi menjadi persoalan normal, kalikan setiap kendala bertanda $\leq$ dengan bilangan -1. Sehingga kendala persediaan menjadi,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq -140$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq -120$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq -110$$

Misalkan u_i dan v_j adalah variabel dual dari persoalan transportasi. Berdasarkan Teorema 2.3, maka bentuk dual dari persoalan transportasi perusahaan pada Tabel 1 adalah

$$maks: \quad z_d = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

kendala :

$$v_1 - u_1 \leq 5$$
$$v_2 - u_1 \leq 4$$
$$v_3 - u_1 \leq 9$$
$$v_1 - u_2 \leq 6$$
$$v_2 - u_2 \leq 5$$
$$v_3 - u_2 \leq 10$$
$$v_1 - u_3 \leq 7$$
$$v_2 - u_3 \leq 2$$
$$v_3 - u_3 \leq 8$$
$$u_i v_j \geq 0$$

Selanjutnya persoalan tersebut akan diselesaikan dengan pendekatan dual-matrix. Untuk menyelesaikan persoalan transportasi tersebut dimulai dengan langkah nol.

Langkah 0. Inisialisasi.

0.1 Inisialisasi persoalan transportasi dengan menentukan matriks A, yang mana entri-entri dari matriks A adalah permintaan dan negatif persediaan.

$$A = \{100, 60, 80, -140, -120, -110\} .$$

02. Dengan mengambil $u_i = 0$, dengan $i = 1, 2, 3$ dan v_j adalah nilai terkecil dari kolom j, dengan sel $\hat{c}_{ij}$ berkorespondensi dengan (i_j, j)

$$v_1 = \hat{c}_{i1} = \min\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\} = \min\{5, 6, 7\} = 5$$

Sel terpilih adalah c_{11} yang berkorespondensi dengan sel $(i_1, 1)$

$$v_2 = \hat{c}_{i2} = \min\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\} = \min\{4, 5, 2\} = 2$$

Sel terpilih adalah c_{32} yang berkorespondensi dengan sel $(i_2, 2)$.

$$v_3 = \hat{c}_{i3} = \min\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\} = \min\{9, 10, 8\} = 8$$

Sel terpilih adalah c_{33} yang berkorespondensi dengan sel $(i_3, 3)$.

Kemudian, dibangun himpunan Γ

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{(i_1, 1), (i_2, 2), (i_3, 3), (1,0), (2,0), (3,0)\}\\ &= \{(1,1), (3,2), (3,3), (1,0), (2,0), (3,0)\}\end{aligned}$$

dari jumlah anggota himpunanan Γ diketahui bahwa matriks (D) berukuran 6×6.

0.3 Langkah terakhir pada langkah ke-0, yaitu membentuk matriks D = $[d_{ij}]$, dengan penentuan entri- entri dari matriks D berdasarkan ketentuan berikut:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i, j = 1, 2, 3 \\ -1 & i = 1, 2, 3; j = 3+1, 3+2, 3+3 \\ -1 & i, j = 3+1, 3+2, 3+3 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

Jadi, matriks D

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

kemudian hitung nilai fungsi tujuan

$$\begin{aligned} z_d &= \sum_{j=1}^{3} b_j v_j - \sum_{i=1}^{3} a_i u_i \\ &= 100(5) + 60(2) + 80(8) - 140(0) - 120(0) - 100(0) \\ &= 1260 \end{aligned}$$

Langkah 1. Menentukan sel yang akan meninggalkan basis. Dimulai dengan menghitung.

Y = AD

$$Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 80 \\ -140 \\ -120 \\ -110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 80 \\ 40 \\ 120 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Jadi, dari matriks Y diperoleh y_6 yang merupakan nilai terkecil dari y_k yang mana $y_6 \leq 0$ sehingga solusi belum optimal , dengan kata lain sel yang meninggalkan basis adalah elemen ke 6 pada Γ , yaitu (3,0). Oleh karena itu iterasi berlanjut ke langkah 2.

Langkah 2. Menentukan sel yang akan masuk basis dengan

$$Q = \begin{bmatrix} d_{16} \\ d_{26} \\ d_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} d_{46} \\ d_{56} \\ d_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Selanjutnya dihitung $p_i - q_j$ untuk semua sel nonbasis dan menentukan nilai θ_{ij} terkecil dari $p_i - q_j > 0$, yaitu:

$$\begin{aligned} p_1 - q_1 &= 0 - 0 = 0 \\ p_1 - q_2 &= 0 - (-1) = 1 \\ p_1 - q_3 &= 0 - (-1) = 1 \\ p_2 - q_1 &= 0 - 0 = 0 \\ p_2 - q_2 &= 0 - (-1) = 1 \\ p_2 - q_3 &= 0 - (-1) = 1 \\ p_3 - q_1 &= -1 - 0 = -1 \\ p_3 - q_2 &= -1 - (-1) = 0 \\ p_3 - q_3 &= -1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

dan nilai

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= c_{12} + u_1 + v_1 = 4 + 0 + 2 = 2 \\ \theta_{13} &= c_{13} + u_1 + 3 = 9 + 0 - 8 = 1 \\ \theta_{22} &= c_{22} + u_2 - v_2 = 5 + 0 - 2 = 3 \\ \theta_{23} &= c_{23} + u_2 - v_3 = 10 + 0 - 8 = 2 \end{aligned}$$

Sehingga nilai terkecil adalah 1 pada θ_{13} yang berkorespondensi dengan sel (1, 3) yang merupakan sel masuk.

Langkah 3. *Update*.

3.1 Dimulai dengan meng-update matriks D. Untuk kolom ke-6 di D: $\hat{d}_{l6}$, $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{16} \\ \hat{d}_{26} \\ \hat{d}_{36} \\ \hat{d}_{46} \\ \hat{d}_{56} \\ \hat{d}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{16} \\ d_{26} \\ d_{36} \\ d_{46} \\ d_{56} \\ d_{66} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk kolom lainnya di D:

Kolom $\hat{d}_{l5}$

$$\begin{bmatrix}\hat{d}_{15}\\ \hat{d}_{25}\\ \hat{d}_{35}\\ \hat{d}_{45}\\ \hat{d}_{55}\\ \hat{d}_{65}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_{15}\\ d_{25}\\ d_{35}\\ d_{45}\\ d_{55}\\ d_{65}\end{bmatrix} + (d_{45} - d_{32})\begin{bmatrix}\hat{d}_{16}\\ \hat{d}_{26}\\ \hat{d}_{36}\\ \hat{d}_{46}\\ \hat{d}_{56}\\ \hat{d}_{66}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix} + (0 - 0\,)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

Kolom $\hat{d}_{l4}$

$$\begin{bmatrix}\hat{d}_{14}\\ \hat{d}_{24}\\ \hat{d}_{34}\\ \hat{d}_{44}\\ \hat{d}_{54}\\ \hat{d}_{64}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_{14}\\ d_{24}\\ d_{34}\\ d_{44}\\ d_{5}\\ d_{64}\end{bmatrix} + (d_{44} - d_{34})\begin{bmatrix}\hat{d}_{16}\\ \hat{d}_{26}\\ \hat{d}_{36}\\ \hat{d}_{46}\\ \hat{d}_{56}\\ \hat{d}_{66}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + (-1 - 0)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

Kolom $\hat{d}_{l3}$

$$\begin{bmatrix}\hat{d}_{13}\\ \hat{d}_{23}\\ \hat{d}_{33}\\ \hat{d}_{43}\\ \hat{d}_{53}\\ \hat{d}_{63}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_{13}\\ d_{23}\\ d_{33}\\ d_{43}\\ d_{53}\\ d_{63}\end{bmatrix} + (d_{43} - d_{33})\begin{bmatrix}\hat{d}_{16}\\ \hat{d}_{26}\\ \hat{d}_{36}\\ \hat{d}_{46}\\ \hat{d}_{56}\\ \hat{d}_{66}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + (0 - 1)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

Kolom $\hat{d}_{l2}$

$$\begin{bmatrix}\hat{d}_{12}\\ \hat{d}_{22}\\ \hat{d}_{32}\\ \hat{d}_{42}\\ \hat{d}_{52}\\ \hat{d}_{62}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_{12}\\ d_{22}\\ d_{32}\\ d_{42}\\ d_{52}\\ d_{62}\end{bmatrix} + (d_{42} - d_{32})\begin{bmatrix}\hat{d}_{16}\\ \hat{d}_{26}\\ \hat{d}_{36}\\ \hat{d}_{46}\\ \hat{d}_{56}\\ \hat{d}_{66}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + (0 - 0)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Kolom $\hat{d}_{l1}$

$$\begin{bmatrix}\hat{d}_{11}\\ \hat{d}_{21}\\ \hat{d}_{31}\\ \hat{d}_{41}\\ \hat{d}_{51}\\ \hat{d}_{61}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_{11}\\ d_{21}\\ d_{31}\\ d_{41}\\ d_{51}\\ d_{61}\end{bmatrix} + (d_{41} - d_{31})\begin{bmatrix}\hat{d}_{16}\\ \hat{d}_{26}\\ \hat{d}_{36}\\ \hat{d}_{46}\\ \hat{d}_{56}\\ \hat{d}_{66}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + (0 - 0)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

3.2 Kemudian meng-update himpunan Γ dengan mengganti sel yang meninggalkan basis (3, 0) dengan sel yang masuk basis (1, 3) sehingga himpunan menjadi:

$$\Gamma = \{(1,1), (3,2), (3,3), (1,0), (2,0), (1,3)\} .$$

3.3 Selanjutnya meng-update nilai u_i dan v_j ,

$$\hat{u}_1 = u_1 = \theta_{13} p_1 = 0 - 1(0) = 0$$
$$\hat{u}_2 = u_1 = \theta_{13} p_2 = 0 - 1(0) = 0$$
$$\hat{u}_3 = u_1 = \theta_{13} p_3 = 0 - 1(-1) = 1$$
$$\hat{v}_1 = v_1 = \theta_{13} q_1 = 5 - 1(0) = 5$$
$$\hat{v}_2 = v_1 = \theta_{13} q_2 = 2 - 1(-1) = 3$$
$$\hat{v}_3 = v_1 = \theta_{13} q_3 = 8 - 1(-1) = 9$$

dan kemudian hitung fungsi tujuan

$$\begin{aligned} z_d &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} b_j v_j - \sum_{i=1}^{3} a_i u_i \\ &= 100(5) + 80(3) + 80(9) - 140(0) - 120(0) - 110(1) \\ &= 1290. \end{aligned}$$

Kemudian kembali ke Langkah 1 untuk menguji keoptimalan solusi.

Langkah 1' .

Dengan menghitung Y = AD

$$Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 80 \\ -140 \\ -120 \\ -110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \\ 10 \\ 120 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan nilai terkecil y_k. Nilai terkecil y_k adalah 10 dengan $k = 4$. Karena $y_k \geq 0$ maka solusi telah optimal, iterasi selesai. Hal ini menunjukkan bahwa solusi optimal telah diperoleh, yaitu $x_{11} = 100$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 50, x_{33} = 50$, $x_{10} = 10$, $x_{11} = 120$, dan $x_{13} = 30$ dengan fungsi nilai tujuan $z_d = 1290$. Kombinasi pabrik-gudang untuk perusahaan adalah pabrik 1-gudang 1 dengan alokasi 100 unit produk, pabrik 3-gudang 2 dengan alokasi 60 unit produk, pabrik 3-gudang 3 dengan alokasi 50 unit produk, Pabrik 1-gudang 3 dengan alokasi 30 unit produk dengan total biaya transportasi 1290 (dalam satuan mata uang).

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan pada bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa dalam menyelesaikan persoalan transportasi dengan pendekatan dual-matrix, dimulai dari penentuan solusi fisibel awal dari persoalan dual dan dengan menggunakan matriks untuk mendapatkan solusi yanglebih baik dari solusi sebelumnya sampai solusi optimal diperoleh. Pendekatan dual-matrix bisa diaplikasikan pada persoalan transportasi seimbang maupun persoalan transportasi tak seimbang. Akan tetapi, penggunaan pendekatan dual-matrix dirasa lebih efisien pada persoalan transportasi tak seimbang dikarenakan pada pendekatan dual-matrix tidak perlu menyeimbangkan persoalan, berbeda dengan metode simplex transportasi yang harus menyeimbangkan persoalan transportasi tak seimbang dengan menambahkan sumber dummy atau destinasi dummy. Dalam menentukan solusi fisibel awal atau disuatu tahapan pemecahan pada metode simplex transportasi tidak menutup kemungkinan terjadinya degenerasi, yaitu solusi persoalan transportsi $\neq m + n - 1$. Untuk memperoleh solusi awal dan basic tree maka harus ditambahkan satu sel dengan alokasi nol sedemikian sehingga sel-sel tersebut membentuk basic tree. Akan tetapi, dengan pendekatan dual-matix tidak perlu memikirkan degenerasi karena pendekatan dual-matrix mengabaikan degenerasi.

Daftar Pustaka

[1] Balinski, M. L, dan R. E. Gomory. 2012. A Primal Method for The Assigment and Transportation Problems. *Management Science* 10,578-599.

[2] Bazaraa, M., J. Jarvis, dan H. D. Sherali. 1990. *Linear Programing and network Flows.* Wiley, Newyork.

[3] Bronson, R. 1996. *Teori Soal-soal Operations Research Edisi Keempat*. Terj. dari *Theory and Problems of Operations Research* oleh Wospakrik, H. J. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[4] Charnes, A, and W. W. Cooper. 1954. The stepping-stone method for Explaining linear programing calculations in Transportation Problems. *Management Science* 1:49-69.

[5] Dimyati, Tjuju Tarliah & Ahmad Dimyati. 2004. *Operations Research.* Penerbit Sinar Baru Algensindo Offset, Bandung.

[6] Gamal, M. D. H. 2007. Program Linear dan Integer. Pusat Pengembangan Universitas Riau, Pekanbaru.

[7] Hillier, S. F, dan G. J. Liberman. 1990. *Pengantar Riset Operasi* Edisi kelima: Jilid 1. Terjemahan dari *Introduction to Operations Research,* oleh Gunawan, E. S, Wirda, A. M. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[8] Jl, Ping & K. F. CHU. 2002. A Dual-Matrix approach To The Transportation Problem. *Asia Pasific Journal of Operational Research* 19:35-45.118.

[9] Koopmans, T. c. 1949. Optimum Utilization of the Transportation System. *Journal of the Econometrica Society* 17:136-146.

[10] Sudhakar, V. J, Arunsankar, N. T, dan Karpagam. 2012. A new Approach for Finding an Optimal Solution for Transportasi Problem.*European Journal of Scientific Research* 68, 254- 257. .

[11] Supranto, Johannes. 1988. *Riset Operasi Untuk Pengambilan Keputusan.* Universitas Indonesia, Jakarta.

[12] Taha, H. A. 1996. *Riset Operasi* edisi kelima. Penerbit Binarupa Aksara, Jakarta.

[13] Winston, W. L. 2004. *Operations Research : Applications and Algorithm.* PWS KENT Publishing Company, Belmont, California.