Fungsi Dari Suatu Matriks

Aziskhan, Rolan Pane, M.Natsir, Johannes Kho

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Abstrak. Suatu kajian fungsi dari suatu variabel dalam aljabar yang cukup penting adalah Evaluasi Fungsi suatu matriks yang menganalisa berbagai bentuk fungsi dari matriks yaitu integral , pangkat pecahan , eksponensial , logaritma , Trigonometri dan fungsi hiperbolic. Terdapat dua metode pendekatan untuk mengevaluasi fungsi dari matriks yaitu metode langsung dari perluasan diagonalisasi dari matriks itu sendiri dan metode dasar dari eksistensi polinomial minimum dari perluasan fungsi suatu matriks ,

Kata kunci: Kuasa integral, eksponensial, logaritma , polinomial minimum, diagonalisasi suatu matriks .

1. Pendahuluan

Suatu kajian fungsi dari suatu variabel dalam aljabar yang cukup penting adalah Evaluasi Fungsi suatu matriks yang menganalisa berbagai bentuk fungsi dari matriks yaitu integral , pangkat pecahan , eksponensial , logaritma , Trigonometri dan fungsi hiperbolic.

Terdapat dua metode pendekatan untuk mengevaluasi fungsi dari matriks yaitu metode langsung dari perluasan diagonalisasi dari matriks itu sendiri dan metode dasar dari eksistensi polinomial minimum dari perluasan fungsi suatu matriks.

2. Perumusan Masalah

Kajian lebih lanjut tentang fungsi matriks persegi yang diteliti mencakup :

a. Fungsi dari diagonalisasi dari suatu matriks persegi
b. Pangkat dari suatu matriks persegi
c. Akar-akar dari suatu matriks
d. Eksponen matriks
e. Logaritma matriks
f. Evaluasi fungsi matriks dengan menggunakan teorema Cayley – Hamilton.

3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan A merupakan suatu matriks persegi yang terdiagonalkan dan P adalah suatu matriks tang mendiagonalkan A sehingga $P^{-1} A P = \Lambda$, atau $A = P\Lambda P^{-1}$ dimana Λ merupakan matriks diagonal yang memuat eigenvalue A dan f fungsi dari matriks
yang memenuhi $f(A) = P\, f(A) P^{-1}$
Dengan menggunakan sifat-sifat matriks , antara lain :

$$A^k = A.A.A.A.........A \quad [\text{ k faktor }]$$

Untuk k = -m , $A^m = (A^{-1})^k = A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}. ....A^{-1}..$ [k faktor]

dan $A^0 = I$

maka diperoleh $A^k = (P\Lambda P^{-1}). (P\Lambda P^{-1}).(P\Lambda P^{-1}). ....(P\Lambda P^{-1})$. [k faktor]

Untuk m = -k yang merupakan bilangan bulat negatif dan A non singular maka

$$A^m = P\Lambda^m P^{-1} = P\,(\Lambda^{-1})^k P^{-1}$$

Unttuk eksponensial matriks diperoleh perumusannya dari perluasan deret eksponensial

$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ konvergen untuk setiap λ berhingga, dalam bentuk $e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Elemen ke ij dari exp (A) diberikan oleh

$$[\exp(\Lambda)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda^k)_{ij} / k! = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^{\,k} \delta_{ij} / k! = \exp(\lambda_i)\delta_{ij}$$

Dimana $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ,, & \\ 0 & & & \lambda n \end{bmatrix}$, Maka $\exp(\Lambda) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1) & & & 0 \\ & \exp(\lambda_2) & & \\ & & .. & \\ 0 & & & \exp(\lambda_n) \end{bmatrix}$

Dari persamaan $P^{-1}A^kP = \Lambda^k$ diperoleh $P^{-1}(\exp A)P = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^k}{k!} = \exp\Lambda$

Untuk fungsi logaritma yang merupakan invers dari fungsi eksponensial dapat dituliskan dalam bentuk ; jika $e^B = A$ maka $B = \mathrm{Ln}\,A$ dan jika

$\Lambda = [\,\lambda_i, \delta_{ij}]$ *merupakan matriks diagonal* , matriks diagonal yang dapat dituliskan sebagai

$D = \mathrm{Ln}\,\Lambda = \begin{bmatrix} \mathrm{Ln}\,\lambda_1 & & & 0 \\ & \mathrm{Ln}\,\lambda_2 & & \\ & & .. & \\ 0 & & & Ln\lambda_n \end{bmatrix}$, Jadi $B = \mathrm{Ln}\,A = P[\ln A]P^{-1} = PDP^{-1}$, sedangkan

$$\begin{aligned} e^B &= I + B + \frac{B^2}{2!} + ... + \frac{B^k}{k!} + ... \\ &= I + PDP^{-1} + \frac{[PDP^{-1}]^2}{2!} + ... + \frac{[PDP^{-1}]^k}{k!} + ... \\ &= P[I + D + \frac{D^2}{2!} + ... + \frac{D^k}{k!} + ...]P^{-1} \\ &= Pe^DP^{-1} = P\Lambda P^{-1} = \Lambda \end{aligned}$$

Dari bentuk fungsi matriks $f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1}$ dapat diperluas dengan teorema Cayley Hamilton dengan memformulasikan m sebagai polynomial minimum dari suatu matriks A sedemikian hingga f(A) dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari m matriks yang bebas linier $I, A, A^2, ..., A^{m-1}$ dengan $f(a) = r(A) =$

$\alpha_{m-1}A^{m-1} + \alpha_{m-2}A^{m-2} + ... + \alpha_1 A + \alpha_o I$, dimana α_i skalar yang akan dicari

Fungsi $f(\lambda)$ dan $r(\lambda)$ memenuhi k sistem persamaan

$$\begin{cases} f(\lambda_i) = r(\lambda_i), \\ \dfrac{df(\lambda_i)}{d\lambda} = \dfrac{dr(\lambda_i)}{d\lambda} \\ \dfrac{d^2f(\lambda_i)}{d\lambda^2} = \dfrac{d^2r(\lambda_i)}{d\lambda^2} \\ \quad .... \\ \dfrac{d^{k-1}f(\lambda_i)}{d\lambda^{k-1}} = \dfrac{d^{k-1}r(\lambda_i)}{d\lambda^{k-1}} \end{cases}$$

Beberapa ilustrasi dan contoh pemakaian dalam menentukan hasil fungsi matriks antara lain :

1. Tentukanlah A^k, dimana k bilangan bulat positip atau negatif dan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian : Diperoleh eigenvalue dan eigenvector dari A

I] 1 , { √2 -1 } ii] 2 , { 1 √2 }

$$A^k = P\Lambda^kP^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^k + 2 & (2^k - 1)\sqrt{2} \\ (2^k - 1)\sqrt{2} & 2^{k+1} + 1 \end{bmatrix}$$

2. Tentukanlah Ln A , Jika A = $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian : Diperoleh eigen value $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$

f(A) = Ln A , f(λ) = Ln λ

r(A) = $\alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I$ dan $r(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$

Koefisiennya dapat ditentukan dengan formulasi :

f(2) = r (2) , $f^{I}(2) = r^{I}(2)$, $f^{II}(2) = r^{II}(2)$,

diperoleh hubungan : $\begin{cases} Ln\, 2 = 4\alpha_2 + 2\alpha_1 + \alpha_0 \\ 1/2 = 4\alpha_2 + \alpha_1 \\ -1/4 = 2\alpha_2 \end{cases}$

yang menghasilkan $\alpha_0 = \text{Ln } 2 - 3/2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1/8$

$$\text{Ln A} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -14 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + [Ln\, 2 - \frac{3}{2}]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ln\, 2 & -1 & 0 \\ 0 & \text{Ln } 2 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & \text{Ln } 2 \end{bmatrix}$$

4. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan hasil penelitian ini dapat ditarik beberapa kesimpulan :

1. Formulasi dari berbagai bentuk fungsi matriks dapat ditentukan dengan mengunakan fungsi pendiagonalan dari matriks tersebut .

2. Teorema Sylverster mempunyai kontribusi dalam menjabarkan fungsi matriks dengan cara menentukan polynomial minimum dari bentuk persamaan karakteristik eigenvalue dari matriks tersebut .

Daftar Pustaka

1. AW Joshi , 1975 , Matrices and Tensors in Physics . Wyley Eastern Limited , New Delhi
2. Bronsons, R , 1969 ,Matrix Methods , Academic Press , New York
3. Eisele , J, A , and R,M, Mason , 1970 , Applied Matrix and Tensor Analysis , Wiley and Sons , New York .
4. Hohn , F, E , 1971 Elementary Matrix Algebra , Macmillan , New York ,
5. Hoffman , K and R. Kunze , 1969 , Linear Akgebra , Englewood Cliffs : Printice - Hall New York .