Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 2, hlm. 135–141

Teorem Titik Tetap Pemetaan 2–Mengecut Pada Ruang 2–Metrik

Mashadi
Jurusan Matematika
Universitas Riau
Kampus Bina Widya Panam
Pekanbaru, Riau, Indonesia.

Abu Osman bin Md Tap
Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE, Malaysia

Abstrak Dalam makalah ini kami perkenalkan konsep pemetaan 2–mengecut, jujukan 2–Cauchy dan 2–lengkap pada ruang 2–metrik. Seterusnya kami buktikan beberapa teorem titik tetap pemetaan 2–mengecut di bawah syarat ketaksamaan.

Katakunci Pemetaan 2–mengecut, ruang 2–metrik, jujukan 2–Cauchy, ruang 2–lengkap.

Abstract *In this paper we introduce the concept of 2–contraction mapping, 2–Cauchy sequence and 2–complete on the 2–metric space. We prove some fixed point theorems for 2–contraction mapping under some inequality.*

Keywords *2–contraction mapping, 2–metric space, 2–Cauchy sequence, 2–complete space.*

1 Pendahuluan

Konsep ruang 2–metrik telah dikemukakan oleh Gahler[2] dan dikaji selanjutnya oleh beberapa pengkaji lain ([1], [3], [4], [5], [6], [7]).

Fungsi $\rho : X \times X \times X \mapsto \mathbb{R}$ yang memenuhi syarat:

M(1). $\forall x, y \in X$ dengan $x \neq y, \exists z \in X \ni \rho(x, y, z) \neq 0$;

M(2). $\rho(x,y,z) = 0$ jika sekurang-kurangnya dua daripada $x,y,z \in X$ adalah sama;

M(3). $\rho(x,y,z) = \rho(x,z,y) = \rho(y,z,x)\ \forall x,y,z \in X$;

M(4). $\rho(x,y,z) \leq \rho(x,y,w) + \rho(x,w,z) + \rho(w,y,z)\ \forall x,y,z,w \in X$,

disebut **2–metrik** bagi X dan (X,ρ) disebut **ruang 2–metrik**.

Suatu pemetaan $T : X \to X$ disebut **pemetaan mengecut** pada ruang 2–metrik (X,ρ) jika dan hanya jika $\exists \alpha \in (0,1) \ni \rho(Tx,Ty,z) \leq \alpha\rho(x,y,z)\ \forall x,y,z \in X$. Dalam hal ini, titik z itu selalu kekal (tidak ditransformasikan). Persoalannya, apa akan terjadi jika z itu juga ditransformasikan ? Jesteru itu, dalam kertas ini kami akan mengkaji pemetaan yang kami sebut **2–mengecut** yang ditakrifkan sebagai berikut:

Takrif 1 *Suatu pemetaan T pada ruang 2–metrik (X,ρ) ke dalam dirinya sendiri disebut **2–mengecut** jika $\exists \alpha \in (0,1) \ni \rho(Tx,Ty,Tz) \leq \alpha\rho(x,y,z)\ \forall x,y,z \in X$.*

Selaras dengan perubahan itu, maka kami perlu mentakrifkan beberapa konsep yang akan digunakan dalam perbincangan selanjutnya.

Takrif 2 *Jujukan $\{x_n\}$ dikatakan **menumpu** di dalam ruang 2–metrik (X,ρ) jika $\exists\ x \in X \ni \underset{n\to\infty}{\text{had}}\ \rho(x_n,x,z) = 0\ \forall z \in X$.*

Takrif 3 *Jujukan $\{x_n\}$ di dalam ruang 2–metrik (X,ρ) disebut **jujukan 2–Cauchy** jika $\underset{m,n,p\to\infty}{\text{had}}\ \rho(x_n,x_m,x_p) = 0$.*

Takrif 4 *Ruang 2–metrik (X,ρ) disebut **2–lengkap** jika setiap jujukan 2–Cauchy di dalam X adalah menumpu.*

Takrif 5 *Ruang 2–metrik (X,ρ) dikatakan terbatas jika $\exists\ K \in \mathbb{R}^+ \ni \rho(x,y,z) \leq K, \forall x,y,z \in X$.*

Takrif 6 *Misalkan T pemetaan 2–mengecut pada ruang 2–metrik (X,ρ). Titik $x \in X$ dinamakan **titik tetap** jikka $Tx = x$.*

2 Titik Tetap

Dalam bahagian ini kami akan buktikan beberapa teorem titik tetap pemetaan 2–mengecut pada ruang 2–metrik. Bagi memudahkan pembuktian, kami perlukan lema berikut yang akan digunakan seterusnya.

Lema 1 *Misalkan $\{x_n\}$ jujukan di dalam ruang 2–metrik 2–lengkap (X,ρ). Jika $\exists\ h \in (0,1) \ni \rho(x_n,x_{n+1},x_p) \leq h\rho(x_{n-1},x_n,x_p)\ \forall n,p \in \mathbb{N}$, maka jujukan $\{x_n\}$ menumpu ke suatu titik di dalam X.*

Bukti Pertimbangkan $\rho(x_n, x_m, x_p)$ dan tanpa kehilangan pengitlakan, misalkan $p > m > n$. Perhatikan bahawa

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m, x_p) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}, x_m) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) + \cdots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) + \\ &\quad\ \rho(x_n, x_{n+1}, x_p) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_p) + \cdots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_p) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+m} h^i \rho(x_0, x_1, x_{m-n}) + \sum_{i=1}^{n+m} h^i \rho(x_0, x_1, x_{p-n}).\end{aligned}$$

Maka $\rho(x_n, x_m, x_p) \to 0$, apabila $n, m, p \to \infty$. Oleh itu $\{x_n\}$ adalah jujukan 2–Cauchy. Oleh kerana X 2–lengkap, maka $\{x_n\}$ menumpu ke suatu titik di dalam X.

Teorem 1 *Misalkan T pemetaan 2-mengecut pada ruang 2–metrik terbatas 2–lengkap (X, ρ) kepada dirinya sendiri. Maka wujud suatu titik tetap bitara bagi T di dalam X.*

Bukti Pilih sebarang titik $x_0 \in X$ dan untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$. Takrifkan $Tx_n = x_{n+1}$. Perhatikan bahawa

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1}, x_n, x_p) &= \rho(Tx_n, Tx_{n-1}, Tx_{p-1}) \\ &\leq \alpha\rho(x_n, x_{n-1}, x_{p-1}).\end{aligned}$$

Dengan Lema 1, jujukan $\{x_n\}$ menumpu. Misalkan $\operatorname*{had}_{n\to\infty} x_n = u$. Oleh itu $\operatorname*{had}_{n\to\infty} \rho(x_n, u, a) = 0\ \forall a \in X$.

T selanjar kerana sifat pemetaan 2–mengecut. Maka $\operatorname*{had}_{n\to\infty} Tx_n = Tu$ yang mengimplikasikan $\operatorname*{had}_{n\to\infty} \rho(Tx_n, Tu, a) = 0\ \forall a \in X$.

Perhatikan bahawa dengan (M3) dan (M4),

$$\begin{aligned}\rho(Tu, u, a) &\leq \rho(Tu, u, x_n) + \rho(Tu, x_n, a) + \rho(x_n, u, a) \\ &\leq \rho(x_n, u, Tu) + \rho(Tu, x_n, x_{n+1}) + \rho(Tu, x_{n+1}, a) + \rho(x_{n+1}, x_n, a) + \\ &\quad\ \rho(x_n, u, a)\end{aligned}$$

Dengan mengambil had apabila $n \to \infty$, maka $\rho(Tu, u, a) = 0\ \forall a \in X$, sedemikian hingga $Tu = u$ dari (M2).

Misalkan juga $v \in X$ sehingga $Tv = v$. Maka $\forall a \in X$,

$$\begin{aligned}\rho(u, v, a) &= \rho(Tu, Tv, Tb)(\text{untuk suatu } b \in X \text{ yang } Tb = a) \\ &\leq \alpha\rho(u, v, b) \\ &= \alpha\rho(Tu, Tv, Tc)(\text{untuk suatu } c \in X \text{ yang } Tc = b) \\ &\leq \alpha^2\rho(u, v, c).\end{aligned}$$

Jika diulangi proses ini n kali, maka didapati $\rho(u, v, a) \leq \alpha^n \rho(u, v, x)$ untuk sesuatu $x \in X$. Oleh kerana $\alpha \in (0, 1)$, maka $\operatorname*{had}_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. Oleh itu, $\rho(u, v, a) = 0$ sedemikian hingga $u = v$.

Dengan teknik pembuktian yang serupa, Teorem 1 boleh dikembangkan juga kepada teorem berikut.

Teorem 2 *Misalkan* (X,ρ) *ruang 2–metrik terbatas 2–lengkap dan* T_n*, untuk* $n = 1,2,3,\ldots,m$*, masing-masingnya merupakan pemetaan pada* X *kepada dirinya sendiri, yang memenuhi sifat*

$$\rho(T_i x, T_j y, T_k z) \le \alpha\rho(x,y,z)$$

untuk $i,j,k = 1,2,3,\ldots,m$*,* $\forall x,y,z \in X$*, yang* $0 < \alpha < 1$*. Maka* T_n *mempunyai titik tetap bitara sepunya pada* X*.*

Sekarang kami ubahsuai syarat ketaksamaan dan sifat titik tetap masih juga berlaku seperti di dalam teorem berikut.

Teorem 3 *Misalkan* T *pemetaan pada ruang 2–metrik terbatas 2–lengkap* (X,ρ) *kepada dirinya sendiri sedemikian hingga*

$$\rho(Tx,Ty,Tz) \le \alpha\{\rho(x,y,Tz) + \rho(x,Ty,z) + \rho(Tx,y,z)\} \tag{1}$$

$\forall x,y,z \in X$*, yang* $0 \le \alpha \le 1/3$*. Maka wujud suatu titik tetap bitara bagi* T *di dalam* X*.*

Bukti Misalkan $\beta = 1-\alpha$ dan pilih suatu titik $x_0 \in X$. Takrifkan $Tx_n = x_{n+1}$ untuk $n = 1,2,3,\ldots$. Pertama kami akan tunjukkan yang $\{x_n\}$ adalah jujukan 2–Cauchy. Oleh kerana X terbatas, maka $\exists\ K \in \mathbb{R}^+ \ni \rho(x,y,z) \le K$. Perhatikan bahawa

$$\begin{aligned}
\rho(x_1,x_2,x_p) &= \rho(Tx_0,Tx_1,Tx_{p-1})\\
&\le \alpha[\rho(x_0,x_1,Tx_{p-1}) + \rho(x_0,Tx_1,x_{p-1}) + \rho(Tx_0,x_1,x_{p-1})]\\
&\le 2\alpha K \le 2\beta K;\\
\rho(x_2,x_3,x_p) &= \rho(Tx_1,Tx_2,Tx_{p-1})\\
&\le \alpha[\rho(x_1,x_2,Tx_{p-1}) + \rho(x_1,Tx_2,x_{p-1}) + \rho(Tx_1,x_2,x_{p-1})]\\
&\le [2\alpha^2+\alpha]K \le 2\beta^2 K;\\
\rho(x_3,x_4,x_p) &= \rho(Tx_2,Tx_3,Tx_{p-1})\\
&\le \alpha[\rho(x_2,x_3,Tx_{p-1}) + \rho(x_2,Tx_3,x_{p-1}) + \rho(Tx_2,x_3,x_{p-1})]\\
&\le \alpha[(2\alpha^2+\alpha)K + K] = (2\alpha^3+\alpha^2+\alpha)K \le 2\beta^3 K.
\end{aligned}$$

Untuk $p > m > n$, didapati bahawa

$$\begin{aligned}
\rho(x_n,x_m,x_p) &\le \rho(x_n,x_{n+1},x_m) + \rho(x_{n+1},x_{n+2},x_m) + \cdots + \rho(x_{m-2},x_{m-1},x_m) +\\
&\quad\ \rho(x_n,x_{n+1},x_p) + \rho(x_{n+1},x_{n+2},x_p) + \cdots + \rho(x_{m-2},x_{m-1},x_p)\\
&\le 2\{2\beta^n K + 2\beta^{n+1}K + \cdots + 2\beta^{m-2}K\}\\
&= 4\beta^n K\{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{m-n-2}\}\\
&\le 4K\frac{\beta^n}{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Oleh kerana $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\ \alpha^n = 0$, maka $\underset{n,p\to\infty}{\text{had}}\ \rho(x_n,x,x_p) = 0$. Oleh yang demikian, $\{x_n\}$ adalah jujukan 2–Cauchy. Oleh kerana X 2–lengkap, maka $\{x_n\}$ menumpu. Katakan $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\ x_n = u$. Oleh itu $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\ \rho(x_n,u,a) = 0, \forall a \in X$. Perhatikan dari ketaksamaan M(4),

$$\rho(Tu,u,a) \le \rho(Tu,u,x_n) + \rho(Tu,x_n,a) + \rho(x_n,u,a). \tag{2}$$

Oleh kerana

$$\begin{aligned}\rho(Tu, x_n, a) &= \rho(Tu, Tx_{n-1}, Tb);\ \text{yang } Tb = a\\ &\leq \alpha[\rho(u, x_{n-1}, Tb) + \rho(u, Tx_{n-1}, b) + \rho(Tu, x_{n-1}, b)].\end{aligned}$$

Jika diulangi proses ini n kali, maka didapati

$$\rho(Tu, x_n, a) \leq \alpha[\rho(u, x_{n-1}, Tb) + \rho(u, Tx_{n-1}, b) + \cdots + \rho(Tu, x_1, z)] \tag{3}$$

untuk sesuatu $z \in X$. Oleh itu, jika diambil had pada ketaksamaan (3) dan dimasukkan dalam ketaksamaan (2), maka didapati $\rho(Tu, u, a) = 0\ \forall a \in X$. Oleh itu $Tu = u$.

Sekarang akan tunjukkan kebitaraan titik tetap. Misalkan v juga suatu titik tetap bagi T. Maka $\forall a \in X$, didapati

$$\begin{aligned}\rho(u, v, a) &= \rho(Tu, Tv, Tb) \quad \text{yang } Tb = a\\ &\leq \alpha[\rho(u, v, Tb) + \rho(u, Tv, b) + \rho(Tu, v, b)]\\ &= \alpha[\rho(u, v, a) + 2\rho(u, v, b)].\end{aligned}$$

Oleh kerana

$$\begin{aligned}\rho(u, v, b) &= \rho(Tu, Tv, Tc) \quad \text{yang } Tc = b\\ &\leq \alpha[\rho(u, v, Tc) + \rho(u, Tv, c) + \rho(Tu, v, c)]\\ &= \alpha[\rho(u, v, b) + 2\rho(u, v, c)],\end{aligned}$$

maka

$$\rho(u, v, b) \leq \left[\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]\rho(u, v, c).$$

Oleh itu,

$$\rho(u, v, a) \leq \left[\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]\rho(u, v, b) \leq \left[\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]^2\rho(u, v, c).$$

Oleh kerana $\left[\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]^2 < 1$ dengan $0 < \alpha < 1/3$, mengulangi proses ini unruk n kali, didapati $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\ \rho(u, v, a) \to 0$, sedemikian hingga $u = v$. Oleh itu u adalah titik tetap bitara bagi T.

Catatan: Dengan cara pembuktian yang serupa, hasil yang sama boleh juga ditunjukkan jika ketaksamaan (1) diubahsuai dengan ketaksamaan

$$\rho(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha\{\rho(x, Tx, z) + \rho(x, y, Ty) + \rho(Tz, y, z)\} \tag{4}$$

atau

$$\rho(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha\{\rho(x, Ty, Tz) + \rho(Tx, y, Tz) + \rho(Tx, Ty, z)\} \tag{5}$$

atau

$$\rho(Tx, Ty, Tz) \leq \alpha\{\rho(x, Tx, Tz) + \rho(Tx, y, Ty) + \rho(Tz, Ty, z)\} \tag{6}$$

Dengan teknik pembuktian yang serupa juga, Teorem 3 boleh dikembangkan sebagai hasil berikut yang buktinya kami tinggalkan.

Teorem 4 *Misalkan (X,ρ) ruang 2–metrik terbatas 2–lengkap dan T pemetaan pada X kepada dirinya sendiri. Jika $\exists\ \alpha_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3,4,5,6$ dengan $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i < 1$ dan T memenuhi*

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty,Tz) \leq\ & \alpha_1\rho(x,Tx,Ty) + \alpha_2\rho(y,Ty,Tz) + \alpha_3\rho(y,Tx,Tz) + \alpha_4\rho(x,y,Ty) \\ & +\alpha_5\rho(x,z,Ty) + \alpha_6\rho(x,y,z) \qquad (7)\end{aligned}$$

$\forall x,y,z \in X$. *Maka T mempunyai titik tetap bitara di dalam X.*

Catatan: Jika ketaksamaan (7) dalam Teorem 4 digantikan dengan ketaksamaan

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty,Tz) \leq\ & \alpha_1\rho(x,Tx,Ty) + \alpha_2\rho(y,Ty,Tz) + \alpha_3\rho(y,Tx,Ty) + \\ & \alpha_4\rho(y,Tx,Tz) + \alpha_5\rho(x,y,Tx) + \alpha_6\rho(y,z,Ty) + \\ & \alpha_7\rho(x,y,Ty) + \alpha_8\rho(x,z,Ty) + \alpha_9\rho(x,y,z)\end{aligned}$$

dengan syarat $\sum_{i=1}^{9} \alpha_i < 1$, hasil yang sama juga boleh didapati.

Teorem 5 *Misalkan (X,ρ) ruang 2–metrik terbatas 2–lengkap dan T_1,T_2,T_3 pemetaan pada X kepada dirinya sendiri. Jika $\exists\ \alpha_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3,4,5,6$, dengan $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i < 1$ dan memenuhi*

$$\begin{aligned}\rho(T_ix,T_jy,T_kz) \leq\ & \alpha_1\rho(x,T_ix,T_jy) + \alpha_2\rho(y,T_jy,T_kz) + \alpha_3\rho(y,T_ix,T_kz) + \\ & \alpha_4\rho(x,y,T_jy) + \alpha_5\rho(x,z,T_jy) + \alpha_6\rho(x,y,z)\end{aligned}$$

$\forall x,y,z \in X$, *dan $i,j,k = 1,2,3$. Maka T_1,T_2,T_3 mempunyai titik tetap sepunya bitara di dalam X.*

Bukti Pilih suatu titik $x_0 \in X$ dan untuk $n = 1,2,3,\ldots$ takrifkan $x_{3n+1} = T_1x_{3n}$, $x_{3n+2} = T_2x_{3n+1}$ dan $x_{3n+3} = T_3x_{3n+2}$. Maka didapati

$$\begin{aligned}\rho(x_1,x_2,x_3) &= \rho(T_1x_0,T_2x_1,T_3x_2) \\ &\leq \alpha_1\rho(x_0,T_1x_0,T_2x_1) + \alpha_2\rho(x_1,T_2x_1,T_3x_2) + \alpha_3\rho(x_1,T_1x_0,T_3x_2) + \\ &\quad \alpha_4\rho(x_0,x_1,T_2x_1) + \alpha_5\rho(x_0,x_2,T_2x_1) + \alpha_6\rho(x_0,x_1,x_2) \\ &\leq \alpha_1\rho(x_0,x_1,x_2) + \alpha_2\rho(x_1,x_2,x_3) + \alpha_4\rho(x_0,x_1,x_2) + \alpha_6\rho(x_0,x_1,x_2)\end{aligned}$$

dan dengan itu

$$\rho(x_1,x_2,x_3) \leq \left(\frac{\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6}{1-\alpha_2}\right)\rho(x_0,x_1,x_2).$$

Ambil $r = \dfrac{\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6}{1-\alpha_2} < 1$. Oleh itu, $\rho(x_1,x_2,x_3) \leq r\rho(x_0,x_1,x_2)$. Sekali lagi perhatikan

$$\begin{aligned}\rho(x_2,x_3,x_4) &= \rho(T_2x_1,T_3x_2,T_1x_3) \\ &\leq \alpha_1\rho(x_1,T_2x_1,T_3x_2) + \alpha_2\rho(x_2,T_3x_2,T_1x_3) + \alpha_3\rho(x_2,T_2x_1,T_1x_3) \\ &\quad +\alpha_4\rho(x_1,x_2,T_3x_2) + \alpha_5\rho(x_1,x_3,T_3x_2) + \alpha_6\rho(x_3,x_1,x_2) \\ &= \alpha_1\rho(x_1,x_2,x_3) + \alpha_2\rho(x_2,x_3,x_4) + \alpha_3\rho(x_2,x_2,x_4) + \alpha_4\rho(x_1,x_2,x_3) \\ &\quad +\alpha_5\rho(x_1,x_3,x_3) + \alpha_6\rho(x_1,x_2,x_3) \\ &= \alpha_1\rho(x_1,x_2,x_3) + \alpha_2\rho(x_2,x_3,x_4) + \alpha_4\rho(x_1,x_2,x_3) + \\ &\quad \alpha_6\rho(x_1,x_2,x_3)\end{aligned}$$

dan oleh itu

$$\begin{aligned} \rho(x_2, x_3, x_4) &\leq \frac{\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6}{1 - \alpha_2}\rho(x_1, x_2, x_3) \\ \rho(x_2, x_3, x_4) &\leq r^2 \rho(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Mengulangi proses tersebut untuk n kali, didapati

$$\rho(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq r^n \rho(x_0, x_1, x_2).$$

Oleh itu $\{x_n\}$ adalah jujukan 2–Cauchy. Oleh kerana X 2–lengkap, maka $\{x_n\}$ menumpu. Katakan $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\, x_n = u$ untuk semua $u \in X$. Dengan teknik pembuktian yang serupa dengan teorem sebelum ini, boleh ditunjukkan bahawa u merupakan titik tetap sepunya bitara bagi T_1, T_2 dan T_3.

Catatan: Teorem 5 boleh diubahsuai menjadi teorem berikut dengan melakukan perubahan syarat ketaksamaan. Pembuktiannya boleh dilakukkan dengan teknik yang serupa dan ditinggalkan.

Teorem 6 *Misalnya (X, ρ) ruang 2–metrik terbatas 2–lengkap dan T_1, T_2, T_3 pemetaan pada X kepada dirinya sendiri. Jika $\exists\ \alpha_t \in \mathbb{R}; t = 1, 2, \ldots, 9$, dengan $\sum_{t=1}^{6} \alpha_t < 1$ dan memenuhi*

$$\begin{aligned} \rho(T_i x, T_j y, T_k z) \leq\ & \alpha_1 \rho(x, T_i x, T_j y) + \alpha_2 \rho(y, T_j y, T_k z) + \alpha_3 \rho(y, T_i x, T_j y) + \\ & \alpha_4 \rho(y, T_i x, T_k z) + \alpha_5 \rho(x, y, T_i x) + \alpha_6 \rho(y, z, T_j y) + \\ & \alpha_7 \rho(x, y, T_j y) + \alpha_8 \rho(x, z, T_j y) + \alpha_9 \rho(x, y, z) \end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in X$ dan $i, j, k = 1, 2, 3$. Maka T_1, T_2 dan T_3 mempunyai suatu titik tetap sepunya bitara di dalam X.

Rujukan

[**1**] Y.J. Cho & S.C. Park, *Coincidence Theorem in 2–Metrik Spaces*, SEAMS Bull Math **20(2)** (1995), 127–133.

[**2**] S. Gahler, *2–Metrische Raume und ihr Topologische Struktur*, Math Nachr, **26** (1963), 115–148.

[**3**] K. Iseki, *Fixed Point Theorem in 2–Metric Space*, Math Sem Note **3** (1985), 133–136.

[**4**] S. N. Lal & A. K. Singh, *An Analogue of Banach's Contraction Principle for 2–Metric Spaces*. Bull Austral Math Soc. **18** (1978), 137–143.

[**5**] B. G. Pachpatte, *Fixed Point Theorems for Contraction Type Mapping on 2–Metric Space*. Proc Nat Acad Sci India, **14(A)** (1978), II, 94–102.

[**6**] H. K. Pathak & R. P. Dubey, *Some Fixed Point Theorem in 2–Metric Space*, The Math Edu. **115(1)** (1991), 1–16.

[**7**] S. L. Singh & B. Ram, *A Note on The Convergence of Sequences of Mapping and Their Common Fixed in a 2–Metric Space*, Math Sem Notes **9** (1981), 181–185.