fungsi $\Phi_{\pm}(\sigma)=\left(1-\sigma^{p}+(1\pm\sigma)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ kontinu maka setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$

sehingga $\left|\Phi_{\pm}(\sigma)-\Phi_{\pm}(c)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ bila $|\sigma - c| < \delta$. Misal

$\Phi_{\pm}(c)=\sqrt[p]{2}$, maka $\left|\Phi_{\pm}(\sigma)-\sqrt[p]{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

. $-\frac{\varepsilon}{2}<\Phi_{\pm}(\sigma)-\sqrt[p]{2}<\frac{\varepsilon}{2}$ atau $\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}<\Phi_{\pm}(\sigma)<\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}$. Berdasarkan ketaksamaan (3.1.3) maka diperoleh

$$\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}<\Phi_{-}(\sigma_k)\le\|x_k-x\|\le\Phi_{+}(\sigma_k)<\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\le\|x_k-x\|\le\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\le\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Misalkan $A=\{k=1,\ldots,n:\ \sigma_k>\delta\}$, maka diperoleh

$$\frac{n-|A|}{n}\left(\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{1}{n}n\left(\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\le\frac{1}{n}n\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{n+|A|}{n}\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{n-|A|}{n}\left(\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\le\frac{n+|A|}{n}\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (3.1.4).$$

Berdasarkan sifat saling asing dari Δ_k dan $\|x\|=1$, pilih $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{p}\le 1$ maka diperoleh $|A|\le\frac{1}{\delta^{p}}$. Substitusikan nilai $|A|$ ke ketaksamaan (3.1.4), sehingga diperoleh

$$\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}}{n\delta^{p}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\le\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{n\delta^{p}}$$

Pilih nilai n sangat besar $(n\to\infty)$, maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}}{n\delta^{p}}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\leq\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}}{n\delta^{p}}\right)$$

$\sqrt[p]{2}-\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\leq\sqrt[p]{2}+\frac{\varepsilon}{2}$ atau $\sqrt[p]{2}-\varepsilon\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|\leq\sqrt[p]{2}+\varepsilon$. Hal ini berarti jika

$\alpha=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k-x\|$ maka $\alpha\in\left[\sqrt[p]{2}-\varepsilon,\sqrt[p]{2}+\varepsilon\right]$ atau $\alpha\in\left\{\sqrt[p]{2}\right\}$, $1\leq p\leq\infty$.

Dari proposisi 3.1.2 di atas dapat dilihat bahwa bilangan Rendezvous dari ℓ_2 adalah $\sqrt{2}$ sedangkan bilangan Rendezvous dari ℓ_1 adalah $\varnothing$.

Dalam membuktikan proposisi berikutnya digunakan lema berikut yang dikutip dari Wolf (1994).

Lema 3.1.3. Misalkan $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\ell_1^{\,n}$, $\max\limits_{1\leq i\leq n}|\alpha_i|\leq 1$ maka

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\|x-e_i\|+\|x+e_i\|=1+\frac{n-1}{n}\|x\|.$$

Selanjutnya akan dihitung bilangan Rendezvous dari $\ell_1^{\,n}$ dan $\ell_\infty^{\,n}$ seperti pada proposisi berikut.

Proposisi 3.1.4. Bilangan Rendezvous dari $\ell_1^{\,n}$ adalah $2-\frac{1}{n}$ dan bilangan Rendezvous dari $\ell_\infty^{\,n}$ adalah $\frac{3}{2}$ untuk semua $n\geq 2$.

Bukti : Untuk kasus $\ell_1^{\,n}$, misalkan $S=\left\{x\in\ell_1^{\,n}\mid\|x\|=1\right\}$ adalah unit sphere dari $\ell_1^{\,n}$. Ambil $x\in S$ sebarang, maka $\|x\|=1$ sehingga dari lemma 3.1.3 diperoleh

$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\|x-e_i\|+\|x+e_i\|=1+\frac{n-1}{n}\|x\|=2-\frac{1}{n}$. Dengan menggunakan teorema (3.1.2) diperoleh bahwa bilangan Rendezvous dari $\ell_1^{\,n}$ adal ah $2-\frac{1}{n}$.

Untuk kasus ℓ_∞^n, misalkan $S = \{x \in \ell_\infty^n \mid \|x\| = 1\}$ adalah unit sphere pada ℓ_∞^n. Ambil $x \in S$ sebarang maka $\|x\| = 1$, $x = (\alpha_j) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)$.

$$\|x - e\|_{\ell_\infty} = \sup_{1 \le i \le n} \|x - e_i\|_i = \sup\{\|x - e_1\|_1, \|x - e_2\|_2, \ldots, \|x - e_n\|_n\} =$$

$$\sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_1|, \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_n|^n \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \le \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_1|, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_n| \right\}.$$

Karena $\|x\| = 1$, maka

$$\|x - e\|_{\ell_\infty} \le \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_1|, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - e_n|, 1 \right\} \qquad \ldots(3.1.5).$$

$$\|x + e\|_{\ell_\infty} = \sup_{1 \le i \le n} \|x + e_i\|_i = \sup\{\|x + e_1\|_1, \|x + e_2\|_2, \ldots, \|x + e_n\|_n\} =$$

$$\sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_1|, \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_n|^n \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \le \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_1|, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_n| \right\}.$$

Karena $\|x\| = 1$ maka

$$\|x + e\|_{\ell_\infty} \le \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_1|, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + e_n|, 1 \right\} \qquad \ldots(3.1.6).$$

Dari ketaksamaan (3.1.5) dan (3.1.6) diperoleh

$$\|x - e\| + \|x + e\| = sup\{\|x - e_1\|_1 + \|x + e_1\|_1, \ldots, \|x - e_n\|_n + \|x + e_n\|_n\}$$

$$= sup\{\|x - e_1\|_{11}, \ldots, \|x - e_n\|_n\} + sup\{\|x + e_1\|_1, \ldots, \|x + e_n\|_n\}$$

$$\le max\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j - e_1|,\dots,\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j - e_n|,1\right\} + max\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j + e_1|,\dots,\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j + e_n|,1\right\}$$

karena e_i merupakan vektor unit dari ℓ_∞^n dan $x = (\alpha_j) \in \ell_\infty^n$ serta $\max\limits_{1\le i\le n}|\alpha_i| \le 1$ maka

$\|x - e\| + \|x + e\| \le \max(|\alpha_1 - 1|,1) + \max(|\alpha_1 + 1|,1) \le 3$ sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}(\|x - e\| + \|x + e\|) \le \frac{3}{2} \qquad \dots(3.1.7).$$

Selanjutnya misal $b_1=(1,1,\dots,1)$ dan $b_2=(-1,1,\dots,1)$, serta

$\|x - b_1\| = \sup\limits_{1\le i\le n}\|\alpha_i - b_1\|_i \ge \|\alpha_i - b_1\|_i \ge \sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i - b_1|$ dan

$\|x + b_1\| = \sup\limits_{1\le i\le n}\|\alpha_i + b_1\|_i \ge \|\alpha_i + b_1\|_i \ge \sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i + b_1|$ maka

$\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\| \ge (|\alpha_1 - 1| + |\alpha_2 - 1| + \dots + |\alpha_n - 1|) +$

$(|\alpha_1 + 1| + |\alpha_2 + 1| + \dots + |\alpha_n + 1|) + (|\alpha_1 + 1| + |\alpha_2 - 1| + \dots + |\alpha_n - 1|) +$

$(|\alpha_1 - 1| + |\alpha_2 + 1| + \dots + |\alpha_n + 1|) \ge |\alpha_2 - 1| + 2 + 2 + |\alpha_2 + 1| = 6$

disisi lain $\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\| \ge$

$(|\alpha_1 - 1| + |\alpha_2 - 1| + \dots + |\alpha_n - 1|) + (|\alpha_1 + 1| + |\alpha_2 + 1| + \dots + |\alpha_n + 1|) +$

$(|\alpha_1 + 1| + |\alpha_2 - 1| + \dots + |\alpha_n - 1|) + (|\alpha_1 - 1| + |\alpha_2 + 1| + \dots + |\alpha_n + 1|) \ge$

$|\alpha_1 - 1| + 2 + |\alpha_1 + 1| + 2 = 6$ jadi $\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\| \ge 6$ atau

$$\frac{1}{4}(\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\|) \ge \frac{3}{2}. \qquad \dots(3.1.8).$$

$\|b_1\| = \|b_2\| = \sup\limits_{1\le i\le n}\|1_i\|_i = 1 = \|e\|$ sehingga

$$\|x-b_1\|+\|x+b_1\|+\|x-b_2\|+\|x+b_2\| = sup\|\alpha_i - b_1\|_i + sup\|\alpha_i + b_1\|_i + sup\|\alpha_i - b_2\|_i + sup\|\alpha_i + b_2\|_i$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - b_1|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - b_1|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\} + \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + b_1|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + b_1|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\} +$$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - b_2|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - b_2|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\} + \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + b_2|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + b_2|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - e_1|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - e_n|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\} + \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + e_1|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + e_n|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\} +$$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - e_1|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - e_n|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\} + \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + e_1|,\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i + e_n|^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$$

$$= \sup_{1\le i\le n}\|x-e_i\|_i + \sup_{1\le i\le n}\|x+e_i\|_i + \sup_{1\le i\le n}\|x-e_i\|_i + \sup_{1\le i\le n}\|x+e_i\|_i = 2(\|x-e\|+\|x+e\|)$$

Dari ketaksamaan (3.1.7) dan (3.1.8) diperoleh

$$\frac{1}{2}(\|x-e\|+\|x+e\|) = \frac{1}{4}(\|x-b_1\|+\|x+b_1\|+\|x-b_2\|+\|x+b_2\|) = \frac{3}{2}.$$

$\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\|x-e_i\|+\|x+e_i\|) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Dengan menggunakan teorema (3.1.2) diperoleh bahwa bilangan Rendezvous dari ℓ_∞^n adalah $\frac{3}{2}$.

3.2. Purata Jarak Pada Ruang Banach

Suatu ruang Banach X mempunyai sifat purata jarak jika terdapat bilangan real yang tunggal $r = r(X)$ sehingga untuk setiap bilangan bulat positif n dan semua $x_1, x_2, \ldots x_n$ didalam unit sphere di X ada suatu x di X sehingga $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k - x\| = r$. Atau bisa juga dikatakan suatu ruang Banach X mempunyai sifat purata jarak, jika unit sphere nya mempunyai bilangan rendezvouse yang tunggal. Proposisi berikut ini mengatakan bahwa C_0 himpunan semua fungsi kontinu dan terbatas yang konvergen ke 0, tidak mempunyai sifat purata jarak.

Proposisi 3.2.1. C_0 tidak mempunyai sifat purata jarak

Bukti : Misal $P_k(k \geq 1)$ dinotasikan sebagai proyeksi kanonik onto subruang yang dibangun oleh $e_1,\dots,e_k$. Misalkan L adalah subruang yang dibangun oleh $e_1,\dots,e_k$, maka P_k: $S \xrightarrow{onto} L$. Misalkan $x_1,\dots,x_n \in S$ dan pilih $k_0 \geq 2$ sehingga $\|P_{k_0} x_i\| = 1$ untuk $i = 1,\dots,n$. Berdasarkan proposisi 3.1.4 (kasus $\ell_\infty^{k_0}$) terdapat $x \in S$ dengan $(E-P_{k_0})x=0$ dan $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|P_{k_0}x_i - x\| = \frac{3}{2}$ sehingga

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - x\| \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|P_{k_0}(x_i - x)\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|P_{k_0}x_i - x\| = \frac{3}{2}.$$

Misalkan $\varepsilon > 0$, pilih $k_1 \in N$ sehingga $|(x_i \mid e_{k_1})| < \varepsilon$ untuk $i = 1,\dots,n$, dengan $\|x_i\| = 1$.

Untuk setiap i maka diperoleh

$$\|x_i - e_{k_1}\| = (x_i - e_{k_1} \mid x_i - e_{k_1})^{\frac{1}{2}} = ((x_i \mid x_i) - 2(x_i \mid e_{k_1}) + (e_{k_1} \mid e_{k_1}))^{\frac{1}{2}} = (\|x_i\| - 2(x_i \mid e_{k_1}) + \|e_{k_1}\|)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 - 2(x_i \mid e_{k_1}) + 1)^{\frac{1}{2}} = (2 - 2(x_i \mid e_{k_1}))^{\frac{1}{2}} \leq |2 - 2(x_i \mid e_{k_1})|^{\frac{1}{2}} = |2(x_i \mid e_{k_1}) - 2|^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2|(x_i \mid e_{k_1}) - 1|)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}|(x_i \mid e_{k_1}) - 1|^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}|(x_i \mid e_{k_1}) - 1|.$$

Karena $\|x_i\| = 1$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$ maka $\|x_i - e_{k_1}\| \leq \max(|(x_i \mid e_{k_1}) - 1|, 1)$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - e_{k_1}\| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(|(x_i \mid e_{k_1}) - 1|, 1) < 1 + \varepsilon$. Dengan menggunakan teorema nilai tengah jika $1+\varepsilon$, $\frac{3}{2} \in I$ suatu interval subset R maka terdapat $\alpha \in R$ sehingga

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - e_{k_1}\| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - x\| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|p_{k_0}x_i - x\|$ atau $1+\varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - x\| \le \frac{3}{2}$. Karena $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - x\|$ dan $\varepsilon > 0$ maka $\alpha \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$. Dengan demikian diketahui bahwa bilangan Rendezvous dari c_0 adalah $\left(1, \frac{3}{2}\right]$. Karena bilangan Rendezvous dari c_0 tidak tunggal, maka c_0 tidak mempunyai sifat purata jarak.

Misalkan X ruang Housdorf dan $C(X)$ ruang Banach dari semua fungsi kontinu bernilai real pada X dengan norma supremum, berikut ini akan di tentukan purata jarak untuk $C(X)$ dalam berbagai kondisi. Namun sebelumnya di bahas terlebih dahulu beberapa Lema pendukung untuk analisis purata jarak dari $C(X)$.

Lema 3.2.2. Misalkan X ruang Hausdorff kompak yang sekurang kurangnya memiliki dua titik. Untuk setiap $n \in N$ dan $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X)$ dengan $\|f_1\| = \|f_2\| = \ldots = \|f_n\| = 1$. Maka terdapat f_0 dan g_0 di $C(X)$ dengan $\|f_0\| = \|g_0\| = 1$ sehingga

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_i - f_0\| \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_i - g_0\|$$

Bukti . Misalkan $A = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ dan pilih suatu $x \in X$. definisikan

$$A^0 = \{f \in A, f(x) = 0\}, \qquad A^+ = \{f \in A, f(x) > 0\}$$

$$A^- = \{f \in A, f(x) < 0\}$$

Selanjutnya tentukan lingkungan buka U dari x sehingga untuk semua $y \in U, |f(y)| < \frac{1}{2}$, untuk semua $f \in A^0, f(y) > 0$, untuk semua $f \in A^+, f(y) < 0$.

Pilih $f_0 \in C(X)$ dengan $0 \le f_0(y) \le 1$ untuk semua $y \in X$, $f_0(x) = 1$ dan $f_0(y) = 0$., untuk semua $y \in X \setminus U$.

Jadi

$$\|f - f_0\| < \frac{3}{2}, \|f + f_0\| \le \frac{3}{2}, \text{ untuk setiap } f \in A^0$$

$$\|f - f_0\| < 1, \|f + f_0\| \le 2, \text{ untuk setiap } f \in A^+$$

$$\|f - f_0\| < 2, \|f + f_0\| \le 1, \text{ untuk setiap } f \in A^-$$

Kemudian jika $|A^+| \ge |A^-|$ maka diperoleh

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_1 - f_0\| \le \frac{3}{2} \qquad (3.2.1)$$

Dan jika $|A^+| \le |A^-|$, diperoleh

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_1 + f_0\| \le \frac{3}{2} \qquad (3.2.2)$$

Selanjutnya pilih $Y \subseteq X$ dengan Y hingga dan sekurang-kurangnya memiliki dua unsure sehingga untuk setiap $1 \le i \le n$ terdapat $y \in Y$ dengan $|f_i(y)| = 1$. Misalkan $k \in N$ dengan $n(Y) = k$. Definisikan $y_i = (f_i(y))$ untuk setiap $1 \le i \le n$, maka berdasarkan definisi Y, maka y_1, y_2, . . . , y_n merupakan unsur-unsur dari unit sphere dari $l^\infty(k)$. Berdasarkan Wolf (1994) $r(l^\infty(k)) = \frac{3}{2}$. Selanjutnya tentukan suatu z di unit sphere $l^\infty(k)$ sehingga $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|y_i - z\|_n = \frac{3}{2}$.

Misalkan $z = (\lambda_y)$, karena X mempunyai sekurang-kurangnya dua unsur maka dapat dibentuk lingkungan yang saling asing padanya. Jadi X juga ruang Normal, sehingga dapat dipilih $g_0 \in X$ sehingga $g_0(y) = \lambda_y$ untuk semua $y \in Y$ dan $\|g_0\| = \|z\|_n = 1$. Jadi diperoleh

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_i - g_0\| \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max_{y\in Y}\|f_i(y) - g_0(y)\|$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|y_i - z\|_n = \frac{3}{2} \qquad (3.2.3)$$

Dari (3.2.1), (3.2.2) dan (3.2.3) memberikan

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_i - f_0\| \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_i - f_0\|.$$

Lema 3.2.3. Misalkan X ruang Hausdorf yang hingga dan $\varepsilon > 0$. Maka terdapat A $\subseteq$ C(X) sehingga $\frac{1}{|A|}\sum_{f\in A}\|f - h\| > \frac{3}{2} - \varepsilon$, untuk setiap $h \in C(X)$ dengan $\|h\| = 1$.

Bukti : Misalkan n$\in$N dan pilih Y $\subseteq$ X dengan n(Y)=n . Selanjutnya buat lingkungan buka U_y untuk semua y$\in$Y sehingga $U_y \cap U_{y'} = \phi$ bila $y \neq y'$, dan pilih y$\in$Y dengan $f_y \in C(X)$ sehingga $-1 \leq f_y(x) \leq 1$ untuk semua x$\in$X, dan $f_y(x) = 1$ untuk semua $x \in X \setminus U$. Ambil h$\in C(X)$ dengan $\|h\| = 1$, dan pilih $x_0 \in X$ dengan $|h(x_0)| = 1$.

Bila $|h(x_0)| = 1$ dengan $x_0 \in U_{y_0}$ untuk suatu $y_0 \in Y$, maka diperoleh

$$\|f_y - h\| \geq |f_y(x_0) - h(x_0)| = |-1 - 1| = 2.$$

Untuk semua $y \neq y_0 \in Y$ diperoleh

$$\|f_y + h\| + \|f_{y'} + h\| \geq |f_y(y) + h(y)| + |f_{y'} + h(y)|$$

$$= |1 + h(y)| + |-1 + h(y)| = 2$$

Jadi diperoleh

$$\frac{1}{2n}\sum_{y\in Y}\left(\|f_y - h\| + \|f_y + h\|\right) \geq \frac{1}{2n}\left(2(n+1) + 2.\frac{n-1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n}$$

Sehingga $x_0 \notin \bigcup_{y\in Y} U_y$, maka diperoleh

$$\frac{1}{2n}\sum_{y\in Y}\|f_y - h\| \geq |f_y(x_0) - h(x_0)| = |-1-1| = 2$$

Dan untuk semua $y \in Y$ diperoleh

$$\frac{1}{2n}\sum_{y\in Y}\|f_y - h\| + \|f_y + h\| \geq \frac{1}{2n}\left(2n + 2.\frac{n-1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$$

Maka secara keseluruhan diperoleh

$$\frac{1}{2n}\sum_{y\in Y}\|f_y - h\| + \|f_y + h\| \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{2n}$$

Sedangkan bila $h(x_0) = -1$ misalkan $g = -h$ dan lakukan seperti langkah di atas.

Lema 3.2.4. Misalkan X ruang Hausdorf kompak yang tidak memiliki titik terasing . Untuk setiap $n \in N$ dan $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X)$ dengan $\|f_1\| = \ldots = \|f_n\| = 1$ terdapat $f_0 \in C(X)$ sehingga $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|f_i - f_0\| > 2 - \varepsilon$, untuk setiap ε >0.

Bukti : Misalkan $A = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Pilih $Y \subseteq X$ dengan $n(Y) < \infty$, sehingga untuk setiap $f \in A$ terdapat $y \in Y$ dengan $\|f(y)\| = 1$. Selanjutnya ambil himpunan buka U_y. untuk setiap $y \in Y$,sehingga $U_y \bigcap U_{y'} = \phi$ bila $y \neq y'$ dan misalkan

$$B_y = \{f \in A, f(y) = 1\} \text{ dan } C_y\{f \in A, f(y) = -1\}$$

Kemudian untuk setiap $y \in Y$,ambil lingkungan buka V_y dari y sehingga f(x)>1-ε untuk semua x ∈ V_x dan semua $f \in B_y$. Misalkan $W_y = U_y \bigcap V_y$, $y \in Y$, karena X tidak mempunyai titik terasing, ambil $z_y \in W_{y}$, $z_y \neq y$. Jadi ada $f_0 \in C(X)$ sehingga

$-1 \leq f_0(x) \leq 1$ untuk semua $x \in X$, $f_0(y) = 1$, $f_0(z_y) = -1$ untuk semua $y \in Y$.

Misalkan $y \in Y$ dan $f \in B_y$ maka diperoleh $\|f - f_0\| \geq |f(z_y) - f_0(z_y)| > 2 - \varepsilon$. Sedangkan bila $f \in C_y$ diperoleh $\|f - f_0\| \geq |f(y) - f_0(y)| = 2$, sehingga diperoleh

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|f_i - f_0\| > 2 - \varepsilon$

Teorema 3.2.5. Misalkan X ruang Hausdorf yang minimal mempunyai dua titik dan sekurang-kurangnya memiliki satu titik terasing, maka $r(C(X)) = \frac{3}{2}$

Bukti. Jika X hingga maka jelas $C(X) \cong l^{\infty}(X)$ dan berdasarkan Wolf (1994), $r(l^{\infty}(X)) = \frac{3}{2}$ untuk $n \geq 2$. Jadi $r(C(X)) = \frac{3}{2}$. Jika X tak hingga, maka berdasarkan lema 3.2.2 dan lema 3.2.3 dan Teorema nilai menengah diperoleh

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} \subseteq r(C(X)) \subseteq \left[\frac{3}{2}, 2\right] \qquad (3.2.4)$$

Selanjutnya misalkan x_0 titik terasing dari X dan definisikan f_0 dengan $f_0(x_0) = 1$ dan $f_0(x\ ) = 0$ untuk $x \neq x_0$, maka diperoleh $f \in C(X)$ dan $\|f_0\| = 1$.

Jadi

$$\|f_0 - f\| + \|f_0 + f\| < 1 + 2 = 3 \text{ untuk semua } f \in C(X) \text{ dengan } \|f\| = 1 \quad ..(3.2.5)$$

Dari (3.2.4) dan (3.2.5) berarti $r(C(X)) = \frac{3}{2}$.

Teorema 3.2.6. Misalkan X ruang Hausdorf yang minimal memiliki dua titik yang tidak mempunyai titik terasing, dan sekurang-kurangnya memiliki satu titik dengan lingkungan basis terhitung, maka $r(C(X)) = [3,2)$.

Bukti. Berdasarkan lema 3.2.2, 3.2.3 dan 3.2.4 serta teorema nilai menengah diperoleh $\left[\frac{3}{2}, 2\right) \subseteq r(C(X))$ dan $r(C(X)) \subseteq \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Maka kita tinggal menunjukkan

$2 \notin r(C(X))$. Ambil $x_0 \in X$ dengan lingkungan basis tertutup $(U_n)_{n\geq 1}$. Tanpa mengurangi perumuman misalkan U_n lingkungan buka dari x_0 untuk $n \geq 1$. Karena X juga lengkap secara reguler, ambil $(g_n)_{n\geq 1} \in C(X)$ sehingga $0 \leq g_n(x) \leq 1$ untuk semua $x \in X$, $g_n(x_0) = 0$ dan $g_n(x) = 1$, untuk semua $x \in X \setminus U_n$, untuk semua $n \geq 1$.

Definisikan $f = 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} g_n$, sehingga $0 \leq f(x) \leq 1$, untuk semua $x \in X$, $f(x_0) = 1$ dan f(x) < 1 untuk semua $x \neq x_0 \in X$. Asumsikan $2 \in r(C(X))$, maka haruslah untuk suatu $h \in C(X)$, $\|h\| = 1$ dan $\|f - h\| + \|f + h\| = 1$, jadi diperoleh $h(x_0)=1$ dan $h(x_0)=1$ ini adalah suatu hal yang mustahil. Jadi haruslah $2 \notin r(C)X))$. Sehingga diperoleh $r(C)X)) = [3,2)$.