BAB III

TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-2

3.1. Pemetaan Orbital Kontinu

Bentuk kewujudan titik tetap pada ruang metrik-2 telah banyak dibahas oleh para matematikawan, misalnya Isebi (1975) membahas tentang kewujudan titik tetap, Sing(1979) yang membahas pengembangan pemetaan kontraksi dalam ruang metrik-2 dalam berbagai kondisi, dan banyak penulis lainnya yang juga mengembangkan kewujudan titik tetap untuk satu dan dua buah fungsi.

Poliwal (1987) membahas kewujudan titik tetap untuk pemetaan yang orbital kontinu, yaitu orbital (X, ρ) mempunyai metrik-2 dan $T: X \to X$ yang orbital kontinu yang memenuhi ketaksamaan :

$$\begin{aligned} &\min\{\rho(Tx,Ty,a), d(x,Tx,a), d(y,Ty,a) + b\min\{\rho(x,Ty,a), \rho(y,Tx,a) \\ &\leq pd(x,y,a) + g\rho(x,Tx,a), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

untuk semua $x, y, a \in X$ dan $b, p, g \in R$ dengan $0 < \rho + g < 1$,maka untuk setiap $x \in X$, barisan $\{T^n x\}$ konvergen ketitik tetap T.

Kalau diperhatikan kewujudan titik tetap dari Puliwal (1987) di atas hanya berlaku untuk satu pemetaan, maka pada bagian ini akan dikembangkan bentuk ketaksamaan (3.1.1) untuk dua pemetaan pada ruang metrik-2.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Defenisi 3.1.1. Misalkan X ruang real yang berdimensi lebih besar dari 1. Fungsi bernilai real $\rho : XxXxX \to R$ dikatakan metrik-2 bila ρ memenuhi:

1. Untuk setiap $a,b \in X$ dengan $a \neq b$ terdapat $c \in X$ sehingga $\rho(a,b,c) \neq 0$
2. $\rho(a,b,c) = 0$ bila sekurang – kurangnya dua diantaranya adalah sama.
3. $\rho(a,b,c) = \rho(b,c,a) = \rho(a,c,b)$
4. $\rho(a,b,c) \leq \rho(a,b,w) + \rho(a,w,c) + \rho(w,b,c)$ untuk setiap a, b, c, w $\in$ X ,untuk setiap $a,b,c,w \in X$.

Pada kondisi diatas (X,ρ) disebut ruang metrik-2 dan dari defenisi diatas jelas berlaku $\rho(a,b,c) \geq 0$, untuk setiap $a,b,c \in X$.

Defenisi 3.1.2. Ruang metrik-2 (X, ρ) dikatakan terbatas bila terdapat K$\in$R sehingga $\rho(a,b,c) \leq K$, untuk setiap $a,b,c \in X$.

Defenisi 3.1.3. barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik-2 (X,ρ) dikatakan konvergen ketitik $x \in X$ jika $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x, a) = 0$ untuk setiap $a \in X$.

Pada defenisi diatas x dikatakan titik limit dari barisan $\{x_n\}$, dalam hal ini karena berlaku untuk setiap $a \in X$ tidak berarti konvergennya adalah konvergen seragam. Sebab berlaku $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x, a)$=0 diartikan dengan untuk setiap ε> 0, terdapat $n \in N$ sehingga $\rho(X_n, X, a) < \varepsilon$ Jika $n \geq n_0$. Disini akan dijadikan n_0 yang berbeda untuk a yang berbeda.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Defenisi 3.1.4. Barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik-2 (X,ρ)dikatakan barisan Cauchy bila $\lim\limits_{n,m\to\infty}(x_n,x_m,a)=0$ untuk setiap $a\in X$.

Defenisi 3.1.5. Pada ruang metrik-2 (X,ρ), fungsi ρ akan kontinu apabila ia kontinu pada ketiga argumentnya.

Ruang metrik (X,ρ) dikatakan lengkap, apabila setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen. Berbeda dengan ruang metrik biasa, kalau pada ruang metrik biasa setiap barisan yang konvergen pastilah merupakan barisan Cauchy. Akan tetapi pada ruang metrik-2 setiap barisan yang konvergen belum tentu merupakan barisan Cauchy, sedangkan apabila ρ kontinu maka barulah berlaku setiap barisan yang kunvergen pada ruang metrik-2 (X,ρ) adalah barisan Cauchy, dan jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy belum tentu $\{x_n\}$konvergen.

Lema 3.1.1. Misalkan $\{x_n\}$ barisan pada ruang metrik-2 lengkap (X,ρ)jika terdapat $h\in(0,1)$ sehingga $d(x_n,x_{n+1},a)\le h(x_{n-1},x_n,a)$ untuk setiap n dan $a\in X$. Maka $\{x_n\}$ konvergen kesuatu titik di X.

Bukti : Andaikan $a>m$ dan pandang hubungan

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m,a) &\le \rho(x_n,x_m,x_{n+1})+\rho(x_n,x_{n+1},a)+\rho(x_{n+1},x_m,a)\\ &\le \rho(x_n,x_{n+1},x_m)+\rho(x_n,x_{n+1},a)+\rho(x_{n+1},x_m,x_{n+2})+\\ &\quad \rho(x_{n+1},x_{N+2},a)+\rho(x_{n+2},x_m,a)\end{aligned}$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\le \rho(x_n, x_{n+1}, x_m) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) + \ldots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) +$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}, a) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}, a) + \ldots + \rho(x_{m-2}, x_{m-1}, a)$$

$$\le h^n \rho(x_0, x_1, x_m) + h^{n-1} \rho(x_0, x_1, x_m) + \ldots + h^{m-n-2} \rho(x_0, x_1, x_m) +$$

$$h^n \rho(x_0, x_1, a) + h^{n-1} \rho(x_0, x_1, a) + \ldots + h^{m-n-2} \rho x_0, x_1, a)$$

$$\le (1 + h + h^2 + \ldots + \ldots) h^n [\rho(x_0, x_1, x_m) + \rho(x_0, x_1, x_a)]$$

$$\le \frac{h^n}{1-h} [\rho(x_0, x_1, x_m) + \rho(x_0, x_1, a)]$$

Karena $h \in (0,1)$, maka apabila diambil untuk $n, m \to \infty$ akan diperoleh. $\lim_{n,m \to \infty} (x_n, x_m, a) = 0$ artinya $\{x_n\}$ barisan cauchy.

Teorema 3.1.1 Misalkan $(X; \rho)$ ruang 2-metrik terbatas lengkap, dan T pemetaan kontraksi dari $(X; \rho)$ into $(X; \rho)$. Maka terdapat suatu titik tetap $u \in X$ yang tunggal.

__Bukti :__ Pilih sebarang titik $x_0 \in X$ dan untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ definisikan $Tx_n = x_{n+1}$. Pertama akan dibuktikan bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Karena X terbatas, maka terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $\rho(x,y,z) \le M$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

$$\rho(x_n, x_{n+1}, z) = \rho(Tx_{n-1}, Tx_n, z)$$

$$\le \alpha \rho(x_{n-1}, x_n, z)$$

$$= \alpha \rho(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}, z)$$

$$\le \alpha^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}, z)$$

Jika proses ini kita ulang sebanyak n kali, maka akan diperoleh

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\rho(x_{n+1}, x_n, z) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_2, z)$$

Maka $\rho(x_{n+1}, x_n, z) \leq \alpha^n M \to 0.$

Ini bermakna $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Oleh karena X lengkap, maka $\{x_n\}$ konvergen. Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, u, z) = 0$ untuk semua $a \in X$.

Selanjutnya karena T suatu pemetaan kontraksi maka T kontinu, sehingga $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tu$. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, Tu, z) = 0$ untuk semua z $\in$ X, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\rho(Tu,u,a) &\leq \rho(Tu,u,x_n) + \rho(Tu,x_n,a) + \rho(x_n,u,a)\\ &\leq \rho(x_n,u,Tu) + \rho(Tu,x_n,x_{n+1}) + \rho(Tu,x_{n+1},a) + \rho(x_{n+1},x_n,a)\\ &\quad + \rho(x_n,u,a)\end{aligned}$$

Apabila kita ambil limit di sebelah kiri dan kanan ketaksamaan tersebut, maka diperoleh $\rho(Tu,u,a) = 0$ untuk setiap $a \in X$, sehingga $Tu = u$, ini bermakna u merupakan titik tetap dari T.

Selanjutnnya akan ditunjukkan bahwa u tunggal. Misalkan v titik tetap yang lain bagi T. Maka untuk semua a $\in$ X berlaku.

$$\begin{aligned}\rho(u,v,a) &= \rho(Tu,Tv,a);\\ &\leq \alpha\, \rho(u,v,a).\end{aligned}$$

untuk semua a $\in$ X. Oleh karena $\alpha \in (0, 1)$, maka $\rho(u,v,a) = 0$. Ini bermakna u = v. Jadi u merupakan titik tetap yang tunggal daripada T. ♥

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Teorema 3.1.2. Misalkan T adalah pemetaan dari ruang 2-metrik (X; ρ) terbatas lengkap kepada dirinya sendiri sehingga

$$\rho(Tx,Ty,z) \leq \alpha\{\rho(x,y,z) + \rho(x,Ty,z) + \rho(Tx,y,z)\} \qquad (3.1.2)$$

untuk semua $x, y, z \in X$, dengan $0 \leq \alpha \leq 1/3$. Maka terdapat titik tetap tunggal bagi T di dalam X.

<u>**Bukti :**</u> Misalkan $\beta = 1 - \alpha$, pilih suatu titik $x_o \in X$. Definisikan $Tx_n = x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Pertama kami akan tunjukkan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Oleh karena X terbatas, maka terdapat $K > 0$ sdemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in X$, $\rho(x,y,z) \leq$ K. Perhatikan bahwa.

$$\begin{aligned}
\rho(x_1,x_2,z) &= \rho(Tx_o,Tx_1,z) \\
&\leq \alpha.[\rho(x_o,x_1,z) + \rho(x_o,Tx_1,z) + \rho(Tx_o,x_1,z)] \\
&\leq 2.\alpha K \leq 2\,\beta K,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(x_2,x_3,z) &= \rho(Tx_1,Tx_2,z) \\
&\leq \alpha.[\rho(x_1,x_2,z) + \rho(x_1,Tx_2,z) + \rho(Tx_1,x_2,z)] \\
&\leq [2.\alpha^2 + \alpha].K \leq 2\,\beta^2 K,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(x_3,x_4,z) &= \rho(Tx_2,Tx_3,z) \\
&\leq \alpha.[\rho(x_2,x_3,z) + \rho(x_2,Tx_3,z) + \rho(Tx_2,x_3,z)] \\
&\leq \alpha\,[(2.\alpha^2 + \alpha).K. + K \\
&= (2.\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha).K \leq 2\,\beta^3 K,
\end{aligned}$$

Maka untuk $m > n$, didapati bahwa untuk semua $x \in X$ diperoleh

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\rho(x_n,x_m,x) \le \rho(x_n,x_{n+1},x_m) + \rho(x_{n+1},x_{n+2},x_m) + \ldots + \rho(x_{m-2},x_{m-1},x_m) +$$

$$\rho(x_n,x_{n+1},x) + \rho(x_{n+1},x_{n+2},x) + \ldots + \rho(x_{m-2},x_{m-1},x)$$

$$\le 2\{2\,\beta^n K + 2\,\beta^{n+1} K + \ldots + 2\,\beta^{m-2} K\}$$

$$= 4\,\beta^n K\,\{\,1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{m-n-2}\}$$

$$\le 4\,K\,\frac{\beta^n}{1-\beta}.$$

Dengan $K > 0$, karena $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x_m,x) = 0$. Jadi $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Oleh karena X lengkap, maka $\{x_n\}$ konvergen. Misalkan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$. Dengan kata lain $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,u,a) = 0$ untuk semua $a \in X$. Maka diperoleh

$$\rho(Tu,u,a) \le \rho(Tu,u,x_n) + \rho(Tu,x_n,a) + \rho(x_n,u,a) \qquad (3.1.3)$$

Oleh karena

$$\rho(Tu,x_n,a) = \rho(Tu,\ Tx_{n-1},\ a)$$

$$\le \alpha\,[\rho(u,x_{n-1},a) + \rho(u,Tx_{n-1},a) + \rho(Tu,x_{n-1},a)]$$

$$\le \alpha\,[\ \varepsilon/2n + \varepsilon/2n + \rho(Tu,x_{n-1},a)]$$

$$\le \alpha\,[\ \varepsilon/2n + \varepsilon/2n + \rho(Tu,x_{n-1},a)]$$

$$\le \alpha\,[\ \varepsilon/2n + \varepsilon/2n + \alpha\,[\rho(u,x_{n-2},a) + \rho(u,Tx_{n-2},a) + \rho(Tu,x_{n-2},a)]$$

$$\le \alpha\,[\ \varepsilon/2n + \varepsilon/2n + \alpha\,[\ \varepsilon/2n + \varepsilon/2n + \rho(Tu,x_{n-2},a)]]$$

Apabila proses ini di ulang sebannyak n kali, maka untuk suatu $z \in X$ akan diperoleh

$$\rho(Tu,x_n,a) \le \alpha\,[\ \varepsilon/n + \alpha\,\varepsilon/n + \ldots + \alpha^{n-1}\,[\ \varepsilon/n + \rho(Tu,x_1,z)]$$

$$\rho(Tu,x_n,a) \le (\varepsilon/n)\,[\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n + \alpha^n.M\,] \to 0,\ bila\ n \to \infty$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Maka bila pada ketaksamaan (3.1.3) bahagian kiri dan kanan kita ambil had, diperoleh $\rho(Tu,u,a) = 0$ untuk setiap $a \in X$, sehingga $Tu = u$.

Misalkan v titik tetap yang lain bagi T, maka untuk semua a ∈ X diperoleh

$$\rho(u,v,a) = \rho(Tu,Tv,a)$$

$$\leq \alpha\rho(u,v,a).$$

karena $0 < \alpha < 1/3$, maka $\rho(u,v,a) \longrightarrow 0$, sehingga u = v. ♥

Teorem 3.1.3. Misalkan (X; ρ) suatu ruang 2-metrik terbatas lengkap dan T_1,T_2 pemetaan dari (X; ρ) into (X; ρ). Jika terdapat bilangan real α_i ; i = 1,2,3,4,5 dengan $\sum_{i=1}^{5}\alpha_i < 1$ dan memenuhi ketaksamaan

$$\rho(T_1x,T_2y,z) \leq \alpha_1\,\rho(x,T_1x,z) + \alpha_2\,\rho(y,T_2y,z) + \alpha_3\,\rho(y,T_1x,z) +$$

$$\alpha_4\,\rho(x,T_2y,z) + \alpha_5\,\rho(x,y,z) \qquad (3.1.4)$$

untuk semua $x, y, z \in X$, maka T_1 dan T_2 mempunyai titik tetap bersama yang tunggal.

Bukti : Pilih suatu titik $x_o \in X$ sebarang dan untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ definisikan

$$T_1x_{2n} = x_{2n+1} \text{ dan } T_2x_{2n-1} = x_{2n}$$

Diperoleh

$$\rho(x_1,x_2,z) = \rho(T_1x_0, T_2x_1,z)$$

$$\leq \alpha_1\,\rho(x_o,T_1x_0,z) + \alpha_2\,\rho(x_1,T_2x_1,z) + \alpha_3\,\rho(x_1,T_1x_0,z) +$$

$$\alpha_4\,\rho(x_1,T_1x_0,z) + \alpha_5\,\rho(x_0,x_1,z)$$

$$\leq (\alpha_1 + \alpha_5)\,\rho(x_0,x_1,z) + \alpha_2\,\rho(x_1,x_2,z)$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

sehingga

$$\varrho(x_1,x_2,z) \le \frac{a_1+a_5}{1-a_2}\varrho(x_0,x_1,z).$$

$$Misalkan\ r = \frac{a_1+a_5}{1-a_2} < 1.$$

Jadi $\rho(x_1,x_2,z) \le r\,\rho(x_0,x_1,z)$.

Demikian pula

$$\rho(x_2,x_3,z) = \rho(T_2x_1,T_1x_2,z)$$

$$\le \alpha_1\,\rho(x_1,T_2x_1,z) + \alpha_2\,\rho(x_2,T_3x_2,z) + \alpha_3\,\rho(x_2,T_2x_1,z) +$$

$$\alpha_4\,\rho(x_2,T_2x_1,z) + \alpha_5\,\rho(x_1,x_2,z)$$

$$\le(\alpha_1 + \alpha_5)\,\rho(x_1,x_2,z) + \alpha_2\,\rho(x_2,x_3,a)$$

sehingga

$$\varrho(x_2,x_3,z) \le \frac{a_1+a_5}{1-a_2}\varrho(x_1,x_2,z).$$

Jadi $\rho(x_2,x_3,z) \le r\,\rho(x_1,x_2,z) \le r^2\,\rho(x_0,x_1,z)$

Jika proses ini kita ulang sebanyak n kali, maka akan didapati hubungan

$$\rho(x_n,x_{n+1},z) \quad \le r^n\,\rho(x_0,x_1,z).$$

Oleh itu $\{x_n\}$ merupakan jujukan Cauchy. Oleh kerana X merupakan ruang lengkap, maka $\{x_n\}$ menumpu ke suatu unsur $u \in X$.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa u adalah titik tetap bersama bagi T_1 dan T_2. Ambil $z,\ u \in X$ sebarang. Perhatikan bahwa

$$\rho(T_1u,u,z) \le \rho(T_1u,u,x_{n+1}) + \rho(T_1u,\ x_{n+1},z) + \rho(x_{n+1},u,z) \qquad (3.1.5)$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

dan

$$\rho(T_1u, x_{n+1}, z) = \rho(T_1u, T_2x_n, z)$$

$$\leq \alpha_1\, \rho(u, T_1u, z) + \alpha_2\, \rho(x_n, T_2x_n, z) + \alpha_3\, \rho(x_n, T_1u, z) +$$

$$\alpha_4\, \rho(x_n, T_1u, z) + \alpha_5\, \rho(u, x_n, z) \qquad (3.1.6)$$

Dengan mengambil limit untuk $n \longrightarrow \infty$ pada ketaksamaan (3.1.5) dan (3.1.6), maka diperoleh $\rho(T_1\ u, u, z) = 0$ untuk semua $z \in X$. Ini bermakna $T_1u = u$. Jadi u merupakan titik tetap bagi T_1. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahawa u juga titik tetap bagi T_2

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u adalah tunggal. Misalkan terdapat $v \in X$ sehingga $T_2v = v$, dan akan ditunjukkan bahawa $u = v$. Ambil $z \in X$ sebarang. Maka diperoleh

$$\rho(u, v, z) = \rho(T_1u, T_2v, z)$$

$$\leq \alpha_1\, \rho(u, T_1u, z) + \alpha_2\, \rho(v, T_2v, z) + \alpha_3\, \rho(v, T_1u, z) +$$

$$\alpha_4\, \rho(v, T_1u, z) + \alpha_5\, \rho(u, v, z)$$

Sehingga

$$\rho(u, v, z) \leq (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)\, \rho(u, v, z).$$

Kerana $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 < 1$, maka ketaksamaan di atas adalah suatu hal yang mustahil, kecuali jika $\rho(u, v, z) = 0$ untuk setiap $z \in X$, yang bermakna $u = v$. Jadi u merupakan titik tetap bersama tunggal bagi T_1 dan T_2. ♥

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Defenisi 3.1.6. Misalkan (X,ρ) ruang metrik-2 dan $T: X \to X$. Jika untuk semua $a \in X$ berlaku $\rho(T^n \alpha, u, a) \to 0$, bila $n \to \infty$ menyebabkan $\rho(TT^n x.Tu, a) \to 0$. Maka T dikatakan orbital kontinu.

Berdasarkan konsep pemetaan yang orbital kontinu dan Lema 3.1.1 akan dikembangkan kewujud titik tetap untuk dua buah yang orbital kontinu pada ruang metrik-2.

Teorema 3.1.4. Misalkan (X,ρ) ruang metrik-2, T_1 dan T_2 pemetaan yang orbital kontinu dari X into X, jika T_1 dan T_2 memenuhi:

$$\min\{\rho(x,T_2y,a), \rho(x,T_1x,a), \rho(y,T_2y,a) + b\min\{\rho(x,T_2y,a), \rho(y,T_1x,a)\}$$
$$\leq p\,\rho(x,y,a) + g\,\rho(x,T_1x,a) \qquad (3.1.7)$$

untuk semua $x,y,a \in X$ dan $b,p,q \in R$ dengan $0 < \rho + g < 1$ untuk setiap $x \in X$, pemetaan T_1 dan T_2 mempunyai titik tetap bersama dan jika $b >$p, maka T_1 dan T_2 mempunyai titik tetap yang tunggal.

Bukti: Misalakan $x_0 \in X$ sebarang, dan didefinisikan

$$x_{2n+1} = T_1 x_{2n}$$
$$x_{2n+2} = T_2 x_{2n+1}$$

jika untuk suatu $n \in N$, $x_{2n} = x_{2n+1}$. Maka jelas $\{x_n\}$ barisan Cauchy dan limit dari $\{x_n\}$ adalah titik tetap dari T_1 dan T_2. Untuk itu misalkan $x_{2n} \neq x_{2n+1}$ untuk setiap $n = 1,2,3,....$maka $x = x_{2n-1}$ dan $y = x_{2n}$. Maka dengan bentuk sama (3.1.7) diperoleh:

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\min\{\rho(T_1X_{2n-1},T_2X_{2n},a),\rho(X_{2n-1},T_1X_{2n-1},a),\rho(X_{2n},T_2X_{2n},a)\}+$$

$$b\min\{\rho(X_{2n-1},T_2X_{2n},a),d(X_{2n-1},T_1X_{2n-1},a)\}$$

$$\leq p\rho(X_{2n-1},X_{2n},a)+g\,\rho(X_{2n-1},T_1X_{2n-1},a)$$

sehingga

$$\min\{\rho(X_{2n},X_{2n+1},a),\rho(X_{2n-1},X_{2n},a),\rho(X_{2n},X_{2n+1},a)\}+$$

$$b\min\{\rho(X_{2n-1},X_{2n+1},a),\rho(X_{2n},X_{2n},a)\}$$

$$\leq p\rho(X_{2n-1},X_{2n},a)+g\,\rho(X_{2n-1},X_{2n},a)$$

maka

$$\rho(X_{2n},X_{2n+1},a)\leq(\rho+g)\rho(X_{2n-1},X_{2n},a)$$

atau

$$\rho(X_{2n},X_{2n+1},a)\leq\rho(X_{2n-1},X_{2n},a) \qquad (3.1.8)$$

dengan $0<h=\rho+g<1$.

Karena ketaksamaan (3.1.8) berlaku untuk semua $a\in X$,maka berdasarkan lema 3.1.1, barisan $\{x_n\}$konvergen kesemua titik $u\in X$, maka untuk semua $a\in X$ berlaku

$$\lim_{n\leftarrow\infty}(X_n,u,a)=0$$

karena T_1 dan T_2 orbital kontinu maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\rho(T_1^{2n+1}x,T_1u,a)=0$$

dan

$$\lim_{n\to\infty}\rho(T_2^{2n+1}x,T_1u,a)=0$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

untuk semua $a \in X$.

Selanjutnya dari sifat 4 pada defenisi 3.1.1. berlaku

$$\rho(u,T_1u,a) \leq \rho(u,T_1u,T_1^{2n+1}x) + \rho(u,T_1^{2n+1}x,a) + \rho(T_1^{2n+1}x,T_1u,a)$$

yang jelas ruas kanan menuju 0 bila $n \to \infty$ jadi $\rho,u,T_1u,a) = 0$ untuk setiap $a \in X$, artinya $T_1u = u$, dan dengan cara yang sama akan diperoleh $T_2u = u$. Jadi u merupakan titik tetap bersama dari T_1 dan T_2.

Berikutnya akan ditunjukkan ketunggalan dari u, untuk itu misalkan $v \in X$ yang juga titik tetap bersama dari T_1 dan T_2 dengan $u \neq v$, karena $u \neq v$, maka berdasarkan defenisi metrik-2 itu didapat $z \in X$ sehingga $\rho(u,v,z) \neq 0$, maka berdasarkan bentuk ketaksamaan 3.1.8 diperoleh:

$$\min\{\ \rho\ (T_1, u, T_2v, z),\ \rho\ (u, T_1u, z),\ \rho\ (u, T_2v, z) +$$

$$b\ \min\{\ \rho\ (u, T_2v, z), \leq\ \rho\ (v, T_1u, z)\}$$

$$\leq\ \rho\ (\rho\ (u, v, z) +\ g\rho\ (u_1, T, z)$$

$$0 +\ b\rho\ (u, v, z) \leq\ p\rho\ (u, v, z)$$

$$\rho\ (u, z) \quad \leq \frac{p}{b}\rho\ (u, v, z)$$

Maka bila $b > \rho$ ketaksamaan diatas adalah suatu hal yang mustahil. Jadi pengandaian kita salah, maka dengan kata lain titik tetap bersama dari T_1 dan T_2 adalah tunggal.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

3.2 Titik Tetap Untuk Barisan Fungsi

Pada perinsipnya bentuk ketaksamaan pada bagian 3.1 diatas bisa kita perlakukan untuk beberapa buah pemecahan , maka berikut ini, dengan menambahkan syarat lengkap pada ruang metrik-2 (X,ρ) dan dengan membuang syarat orbital kontinu untuk pemetaannya, akan ditunjukkan bahwa ketaksamaan tersebut dapat dimodifikasi untuk barisan fungsi $\{T_n\}$ yaitu sebagai berikut.

Teorema 3.2.1. Misalkan (X,ρ) ruang metrik-2 lengkap, $\{T_n\}$ adalah barisan pemetaan dari X kedalam X, sehingga untuk setiap $x,y,a \in X$ berlaku.

$$\min\{\ \rho\ (T_i x, T_j y, a), \rho\ (x, T_i x, a), \rho\ (y, T_j y, a)\} +$$

$$b\ \min\{\ \rho\ (x, T_j y, a), \rho\ (y, T_i x, a)\}$$

$$\leq p\rho\ (x,y,a) + g\rho\ (x, T_i x, a) \tag{3.2.1}$$

$a,b,g \in R$, dengan $0 < \rho + g < 1$, maka barisan pemetaan $\{T_n\}$ mempunyai titiktetap bersama.

Bukti : Untuk sembarang $x_0 \in X$ defenisikan barisan $\{x_n\}$ sebagai berikut. $x_n = T_n(x_{n-1})$, untuk $n = 1,2,3,\ldots.$

Maka dengan pola perhitungan seperti pada data (3.1.1) akan diperoleh $\{x_n\}$ barisan Cauchy, karena (X,ρ), ruang metrik-2 yang lengkap, maka didapat $u \in X$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, u, a) = 0 \text{ untuk semua } u \in X.$$

Selanjutnya berdasarkan ketaksamaan (3.2.1) dengan $x = u$ dan $y = x_n$ untuk $i = n$ diperoleh:

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$\min\{\ \rho\ (T_n u, T_j x_n, a), \rho\ (u, T_n u, a), \rho\ (x_n, T_j x_n, a)\}\ +$

$b\ \min\{\ \rho\ (u, T_j x_n, a), \rho\ (x_n, T_n u, a)\}$

$\leq\ p\rho\ (u, x_n, a) +\ g\rho\ (u, T_n u, a)$

$\min\{\ \rho\ (T_n, u, x_{n+1}, a), \rho\ (u, T_n u, a), \rho\ (x_n, x_{n+1}, a)\}\ +$

$\min(\ \rho\ (u, x_{n+1,a}), a), \rho\ (x_n, T_n u, a)\}$

$\leq\ p\rho (u, x_n, u) +\ g\rho\ (u, T_n u, a)$

Maka apabila pada ketaksamaan di atas diambil limit untuk $n \to \infty$ diperoleh :

$$0 + 0 \leq 0 + g\rho\{u, T_n u, a\}$$

yang berarti $\rho(T_n u, u, a) = 0$ untuk semua $a \in X$, artinya $T_n u = u$, untuk semua n = 1, 2, 3,....Jadi u merupakan titik tetap bersama dari barisan $\{T_n\}$.

Berikut ini akan dikembangkan lagi bentuk teorema diatas untuk barisan $\{T_n\}$ yang konvergen pemetaan T yang orbital kontinu dengan T mempunyai titik tetap $z, z_n \to z$ dan z_n titik tetap dari T_n.

Teorema 3.2.2. Misalkan (X, ρ) ruang metrik-2 lengkap dan ρ kontinu. $\{T_n\}$ barisan pemetaan dari X kedalam X dan memenuhi ketaksamaan

$\min\{\ \rho\ (T_n x, T_n y, a), \rho\ (X, T_n x, a), \rho\ (y, T_n y, a)\} +$

$b\ \min\{\ \rho\ (X, T_n y, a), \rho\ (y, T_n x, a)\}$

$\leq p\rho\ (x, y, a) + g\,\rho\ (x, T_n x, a)$ .... (3.2.2)

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

untuk $x, y, a \in \mathrm{X}$, $\mathrm{b}, \mathrm{p}, \mathrm{g} \in \mathrm{R}$ dengan $p < g$ sehingga $\{T_n\}$ konvergen titik demi titik kesuatu pemetaan T yang orbital kontinu. Maka T mempunyai titik tetap z dan $z_n \to z$ dengan z_n titik tetap dari T_n.

Bukti : Untuk setiap $x, y \in X$ maka dari ketaksamaan (3.2.2) diperoleh

$$\min\{\rho(T_n x, T_n y, a), \rho(x, T_n x, a), \rho(\mathrm{y}, \mathrm{T}_n y, a)\} +$$

$$b \min\{\rho(x, T_n y, a), \rho(y, T_n x, a)\}$$

$$\leq p\, \rho(x, y, a) + g\, \rho(x, T_n x, a).$$

Maka apabila diambil limit untuk $n \to \infty$ dan dengan menggunakan kekontinuan dari ρ, T memenuhi ketaksamaan dari Poliwal (1987) jadi T mempunyai titik tetap (katakan z) selanjutnya dari hubungan

$$\rho(z, z_n, a) = \rho(T_z, T_n, z_n)$$

$$\leq \rho(T_z T_n z_n, T_n z) + \rho(T_z, T_n z, a) + \rho(T_z z, T_n z_n, a) \qquad (3.2.3)$$

Berdasarkan ketaksamaan (3.2.2)berlaku

$$\min\{\rho(T_n z, T_n z_n, a), \rho(z, T_n, z), \rho(z_n T_n z_n, a)\} +$$

$$b \min\{\rho(z, T_n z_n, a), \rho(z_n, T_n z, a)\}$$

$$0 + b \min\{\rho(z, T_n z_n, a) + \rho(z_n, T_n z, a)\}$$

$$\leq p\rho(z, z_n, a) + g\rho(z, T_n z, a)$$

$$b \min\{\rho(z, z_n, a) + \rho(z_n, T_n z, a)\}$$

$$\leq p\rho(z, z_n, a) + g\rho(Z_n, T_n z, a)$$

maka jika $\min\{\rho(z, z_n, a), \rho(z_n, T_n z, a)\} = \rho(z, z_n, a)$,

diperoleh

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$b\rho(z,z_n,a) \le p\rho(z,z_n,a) + g\rho(z_n,T_n z,a)$$

$$\rho(z_n,z,a) \le \frac{g}{b-p}\rho(z_n,T_n z,a)$$

dan jika $\min\{\rho(z,z_n,a), \rho(z_n,T_n z,a)\} = \rho(z_n,T_n z,a)$,

diperoleh

$$b\rho(z_n,T_n z,a) \le p\rho(z,z_n,a) + g\rho(z,T_n z,a)$$

$$\rho(z_n,T_n z,a) \le \frac{p}{b}\rho(z,z_n,a) + \frac{g}{b}\rho(z,T_n z,a)$$

selanjutnya dari hubungan

$$\rho(Tz,T_n z_n,T_n z) = \rho(T_n z_n,T_n z,Tz)$$

$$\le \frac{p}{\mathrm{b}}\rho(z,z_n,Tz) + \frac{g}{b}\rho(z,T_n z,Tz)$$

$$\le 0 \qquad (3.2.4)$$

maka dari ketaksamaan (3.2.3) dan (3.2.4) diperoleh

$$\rho(z,z_n,a) \le 0 + \rho(T_z,T_n z,a) + \frac{p}{b}\rho(z,z_n,a) + \frac{g}{b}\rho(z,T_n z,a)$$

$$\rho(z,z_n,a) \le \rho(z,T_n z,a) + \frac{p}{b}\rho(z,z_n,a) + \frac{g}{b}\rho(z,T_n z,a)$$

$$(1-\tfrac{p}{b})\,\rho(z,z_n,a) \le (1+\tfrac{g}{b})\,\rho(z,T_n z,a)$$

$$\rho(z,z_n,a) \le \frac{g+b}{b-p}\rho(z,T_n z,a) \to 0$$

Karena ruas kanan pada ketaksamaan diatas menuju nol maka $\lim_{n\to\infty}\rho(z,z_n,a) = 0$

untuk semua $a \in X$ artinya z_n konvergen ke z.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Berikut ini kita modifikasi lagi bentuk teorema 3.2.2. di atas dengan membuang syarat orbital kontinu untuk T dan menambahkan syarat T_n konvergen seragam ke T dan dengan mempertahankan bentuk – bentuk samaannya akan diperoleh hasil yang sama. Tepatnya adalah seperti teorema berikut.

Teorema 3.2.3. Misalkan (X, ρ) ruang metrik-2 lengkap dan $\{T_n\}$ barisan pemetaan dari X into X dengan titik tetap z_n, T adalah pemetaan dari X into X yang memenuhi ketaksamaan (3.1.1) dan $p < g$ dengan titik tetap z. Sehingga T_n konvergen seragam ke T pada $\{z_n\}$ maka z_n konvergen ke z.

Bukti : Pandang hubungan ketaksamaan

$$\rho(z_n, z, a) = \rho(T_n z_n, T_z, T_{zn})$$

$$\leq \rho(T_n z_n, T_z, T_{zn}) + \rho(T_n, z_n, Tz_n, a) + \rho(Tz_n, T_n, a) \qquad (3.2.6)$$

dan berdasarkan ketaksamaan (3.1.1) diperoleh:

$$\min\{\rho(Tz_n, Tz, a), \rho(z_n, Tz_n, a), \rho(z, T_z, a)\} +$$

$$b\min\{\rho(z_n, T_z, a), \rho(z, Tz_n, a)\}$$

$$\leq p\rho(z_n, z, a) + g\rho(z_n, Tz_n, a)$$

maka

$$b\min\{\rho(z_n, Tz, a), \rho(z, Tz_n, a)\} \leq p\rho(z_n, z, a) + g\rho(z_n, z, a) + g\rho(z_n, Tz_n, a)$$

Sama seperti bukti teorema 3.2.2. diperoleh dua kekontinuan yaitu jika

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$\min\{ \rho(z_n, Tz,, a), \rho(z, Tz_n, a)\} = \rho(z_n, Tz, a)$

maka

$$b\rho(z_n, Tz, a) \le p\rho(z_n, z, a) + g\rho(z_n, Tz_n, a)$$

$$\rho(z_n, Tz, a) \le \frac{g}{b-p}\rho(z_{n.} Tz_n, a)$$

jika $\min\{\rho(z_n, T_z, a), \rho(z, Tz_n, a)\} = \rho(z, Tz_n, a)$

maka

$$b\rho(z, Tz_n, a) \le p\rho(z_n, z, a), p\rho(z_n, Tz_n a)$$

$$\rho(z, Tz_n, a) \le \frac{p}{b}\rho(z_n, z, a) + \frac{g}{b}\rho(z_n, Tz_n, a)$$

sehingga

$$\rho(T_n z_n, Tz, Tz_n) = \rho(z, Tz_n, z_n) \to 0 \qquad (3.2.7)$$

maka berdasarkan ketaksamaan (3.2.6) dan (3.2.7) diperoleh

$$\rho(z_n, z, a) \le 0 + \rho(T_n z_n, Tz_n, a) + \rho(Tz_n, \mathrm{Tz}, \mathrm{a})$$

$$\le \rho(z_n, Tz_n, a) + \frac{p}{b}\rho(z_n, z, a) + \frac{g}{b}\rho(z_n, Tz_n, a)$$

$$(1 - \tfrac{p}{b})\rho(z_n, z, a) \le (1 + \tfrac{g}{h})\rho(z_n, Tz_n, a)$$

$$\rho(z_n, a, a) \le \frac{b+g}{p-b}\rho(z_n, Tz_n, a)$$

yang mana ruas kanan akan menuju nol bila $n \to \infty$. Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(z_n, z, a) = 0$ untuk semua $a \in z$ artinya z_n konvergen ke z.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/