BAB II

TITIK TETAP PADA RUANG METRIK

2.1 Teorema Titik Tetap

Misalkan (X,d) ruang metrik. Pemetaan $T : X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi jika terdapat bilangan real k dengan $0 \leq k < 1$ sehingga

$$d(Tx,Ty) \leq k\, d(x,y),$$

untuk semua $x,y \in X$.

Berdasarkan bentuk pemetaan kontraksi tersebut, Banach membuktikan kewujudan titik tetap pada ruang metrik (X,d) yaitu sebagai berikut

Teorema. 2.1.1. Misalkan $(X;d)$ suatu ruang metrik dan T suatu pemetaan pada ruang metrik lengkap yang memenuhi sifat kontraksi maka terdapat dengan tunggal $x_0 \in X$ sehingga $Tx_0 = x_0$.

Bukti : Ambil $x, y \in X$, maka $d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,y)$ untuk suatu $\alpha \in [0, 1)$, selanjutnya

$$d(T^2x, T^2y) \leq \alpha\, d(Tx,Ty) \leq \alpha^2\, d(x,y)$$

Maka untuk sebarang $n \in N$, akan diperoleh

$$d(T^nx,T^ny) \leq \alpha^n\, d(x,y).$$

Selanjutnya pilih $x_0 \in X$ dan definsikan barisan $\{x_n\}$ sebagai berikut

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1,\ \ldots,\ x_{n+1} = Tx_n.$$

Maka diperoleh

$x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0$ dan untuk sebarang $n \in N$ berlaku $x_n = T^nx_0$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa barisan $\{x_m\}$ yanga diperoleh merupakan barisan Cauchy. Untuk itu pilih $m,n \in N$ dengan $m > n$, katakan $m = n + p$, maka diperoleh

$$d(x_n,x_m) = d(x_n, x_{n+p})$$

$$\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq d(T^n x_n, T^n x_1) + d(T^{n+1}x_0, T^{n+1} x_1) + \ldots + d(T^{n+p-1}x_0, T^{n+p-1}x_1)$$

$$\leq \alpha^n d(x_0,x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0,x_1) + \ldots + \alpha^{n+p-1} d(x_0,x_1)$$

$$\leq \alpha^n d(x_0,x_1) [1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots]$$

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0,x_1). \ldots.. \qquad (2.1.1)$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. Maka apabila diambil limit pada ruas kanan ketaksamaan (2.1.1) untuk $n, m \to \infty$ akan diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$ artinya $\{x_n\}$ suatu barisan Cauchy, kemudian karena X lengkap, maka terdapat $x \in X$, sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dan selanjutnya berlaku $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, sedangkan $Tx_n = x_{n+1}$ dan juga $\{Tx_n\}$ merupakan sub barisan dari barisan $\{x_n\}$, maka sub barisan $\{Tx_n\}$ haruslah juga konvergen ke x dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} Tx_n = x$, sehingga diperoleh $Tx = x$. Arinya x merupakan titik tetap dari T.

Kemudian akan ditunjukkan ketunggalan dari x, untuk itu misalkan terdapat $y \in X$ dengan $x \neq y$ dan $Ty = y$, maka dari hubungan

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,y)$$

karena $\alpha \in (0, 1)$. Maka ketaksamaan di atas adalah suatu hal yang mustahil, jadi haruslah $x = y$. Dengan kata lain titik tetap dari T adalah tunggal.

Later [1968] dan Kanaan [1968] mengubah bentuk kontraksi tersebut menjadi bentuk

$$d(Tx,Ty) \le \beta\,(d(x,Tx) + d(y,Ty)) \tag{2.1.2}$$

Kemudian Fisher [1975] memodifikasi bentuk ketaksamaan (2.1.2) menjadi bentuk

$$d(Tx,Ty) \le \gamma\,(d(x,Ty) + d(,Tx)) \tag{2.1.3}$$

atau

$$d(Tx,Ty) \le \alpha\, d(x,y) + \beta\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\} + \gamma\{d(x,Ty) + d(y,Tx)\} \tag{2.1.4}$$

dengan

$$0 \le \frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma} < 1, \quad \beta+\gamma<1$$

$$\alpha + 2\gamma < 1 \text{ dan } \gamma \ge 0$$

Bentuk kontraksi yang paling menarik adalah hasil yang dikemukakan oleh Jaggi dan Dass [1980] yaitu seperti teorema berikut ini:

Teorema 2.1.1 Misalkan (X,d) ruang metrik dan T pemetaan pada X onto X yang memenuhi

i Untuk suatu α, $\beta \in [0,1)$ dengan $\alpha + \beta < 1$ berlaku

$$d(Tx,Ty) \le \frac{\alpha\, d(x,Tx)\, d(y,Ty)}{d(x,Tx)+d(y,Ty)+d(x,y)} + \beta\, d(x,y) \tag{2.1.5}$$

Untuk semua $x, y \in X$, dengan $x \ne y$.

ii Terdapat $x_0 \in X$ sehingga

$$\{T^n(x_0)\} \supseteq \{T^{n_k}(x_0)\}$$

dengan

$$\lim_{k \to \infty} T^{nk}(x_0) \in X$$

maka T mempunyai titik tetap

$$u = \lim_{k \to \infty} T^{nk}(x_0)$$

Bukti: Definisikan barisan $\{x_n\}$ sebagai berikut

$$x_n = T^n x_n = Tx_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\
&\leq \frac{\alpha\, d(x_n, x_{n-1})\, d(x_{n-1}, x_n)}{d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n-1})} + \beta\, d(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq \frac{\alpha [d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n+1})] d(x_{n-1}, x_n)}{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n-1})} + \beta\, d(x_n, x_{n-1}) \\
&= (\alpha + \beta)\, d(x_n, x_{n-1}) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq (\alpha + \beta)^n\, d(x_1, x_0) \qquad (2.1.6)
\end{aligned}$$

karena $0 < \alpha + \beta < 1$, maka ruas kanan ketaksamaan (2.1.6) diatas akan menuju nol bila $n \to \infty$. Misalkan m > n maka dari hubungan

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathrm{K} + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq \delta^n d(x_0, x_1) + \delta^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathrm{K} + \delta^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\
&\leq \delta^n d(x_0, x_1)(1 + \delta + \delta^2 + \mathrm{K})
\end{aligned}$$

sehingga

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\delta^n d(x_0, x_1)}{1 - \delta} \qquad (2.1.7)$$

dengan $\delta = (\alpha + \beta)^n$, karena $0 < \alpha + \beta < 1$ maka $0 < \delta < 1$.

Jadi ruas kanan pada ketaksamaan (2.1.7) diatas akan menuju nol bila $n,m \to \infty$. sehingga $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Karena (X,d) lengkap, maka terdapat $u \in X$ sehingga $\lim_{n\to\infty}(x_n, u) = 0$. Selanjutnya akn ditunjukkan $T(u) = u$. Untuk itu andaikan $T(u) \neq u$ maka

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tu) = d(u, Tu) \geq 0$$

akibatnya dengan menggunakan ketaksamaan (2.1.5) diperoleh

$$d(u,Tu) \leq d(u,Tx_n) + d(Tx_n, Tu)$$

$$\leq d(u,Tx_n) + \frac{\alpha\, d(x_n,Tx_n)\, d(u,Tu)}{d(x_n,Tu) + d(u,Tx_n) + d(x_n,u)} + \beta\, d(x_n,u) \qquad (2.1.8)$$

Jelas ruas kanan pada ketaksamaan (2 .1.8) diatas akan menuju nol bila $n \to \infty$. Jadi $d(u,Tu) \to 0$. Suatu hal yang kontradiksi dengan pengandaian, jadi haruslah $d(u,Tu) = 0$ artinya $Tu = u$ dengan akta lain u merupakan titik tetap dari T. Dan berdasarkan pendefinisian dari barisan $\{x_n\}$ jelas bahwa

$$u = \lim_{k\to 0} T^{nk}(x_0)$$

2.2. Titik tetap barisan pemetaan

Dalam tulisan berikut ini, selalu dimisalkan bahwa (X;d) adalah suatu ruang metrik lengkap dan akan dianalisa masalah konvergensi titik tetap untuk barisan pemetaan yang merupakan barisan pemetaan kontraksi.

Teorema 2.2.1. Misalkan $\{T_n\}$adalah barisan pemetaan dari setiap pemetaan yang paling sedikit mempunyai satu titik tetap x_i, $i=1,2,3,\ldots$ dan T_o: $X \to X$ pemetaan kontraksi dengan $d(T_0x,T_0y)\leq k_0d(x,y)$ dan barisan $\{T_n\}$ konvergen seragam ke T_0. Maka $\{x_n\}$ konvergen ke x_0.

Bukti: Misalkan ε > 0 sebarang. Pilih N_ε sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$d(T_nx,T_ny)\leq \varepsilon(1-k_0).$$

Karena barisan $\{T_n\}$ konvergen seragam ke T_0, maka untuk $n \geq N$.

$$\begin{aligned} d(x_n,x_0) &= d(T_nx_n,T_0x_0) \\ &\leq d(T_nx_n,T_0x_0)+d(T_0x_n,x_0) \\ &\leq \varepsilon(1-k_0)+k_0d(x_n,x_0) \end{aligned}$$

sehingga $d(x_n,x_0)\leq \varepsilon$ Jadi $\{x_n\}$ konvergen ke x_0.

Teorema 2.2.2. Misalkan $\{T_n\}$ adalah barisan pemetaan dari setiap pemetaan yang paling sedikit mempunyai satu titik tetap, $x_n = T_nx_n$, dan $T_o : X \to X$ sehingga untuk suatu bilangan bulat m, T_0^m merupakan pemetaan kontraksi,Jika barisan $\{T_n\}$ konvergen seragam ke T_0, maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x_0 = T_0x_0$.

Bukti: Misalkan $k_0 \in (0,1)$ mempunyai sifat bahwa

: $$d(T_0^mx,T_0^my)\leq k_0^md(x,y).$$

Definisikan suatu metrik baru pada X, yang ekivalen ke metrik d, dengan relasi

$$d^\sim(x,y)=d(x,y)+ \tfrac{1}{k}d(T_0x,T_0y)+\dots+ \tfrac{1}{k_0^{m-1}}d(T_0x,T_0y).$$

Catat bahwa terhadap metrik $d^\sim$, T_0 pemetaan merupakan pemetaan kontrkasi, yaitu:

$$d^{\sim}(T_0x,T_0y)=d(T_0x,T_0y)+\frac{1}{k}d(T_0^2x,T_0^2y)+\ldots+\frac{1}{k_0^{m-1}}d(T_0^m x,T_0^m y)$$

$$\leq k_0\{d(T_0x,T_0y)/k_0+\ldots+\frac{1}{k_0^m}d(T_0^m x,T_0^m y)\}$$

$$\leq k_0(d(T_0^m x,T_0y)+\ldots+d(x,y))$$

$$=k_0d^{\sim}(x,y).$$

Maka berdasarkan hubungan ketaksamaan di atas, karena $k_0 \in (0, 1)$ maka T_0 suatu pemetaan kontraksi, jadi barisan $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik $x_0 = T_0x_0$.

Teorema 2.2.3. Misalkan (X;d) ruang metrik kompak lokal dan $\{T_n\} : X \to X$ suatu barisan pemetaan sehingga

1. T_n^m suatu pemetaan kontraksi untuk suatu $m = m(n)$.
2. $\{T_n\}$ Konvergen ke T_0 titik demi titik dan $\{T_n\}$ barisan yang ekikontinu.

Maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x_0.

Bukti : Ambil $x_n = Tx_n$ untuk n = 1, 2, 3, . . . kemudian ambil $\varepsilon > 0$ sehingga himpunan

$$K(x_0, \varepsilon) = \{ x : d(x_0,x) \leq \varepsilon \}$$

Merupakan himpunan kompak pada X. Selanjutnya karena $\{T_n\}$ ekikontinu dan konvergen titik demi titik pada himpunan kompak $K(x_0, \varepsilon)$, mengakibatkan $\{T_n\}$ konvergen seragam pada $K(x_0, \varepsilon)$. Pilih N_ε sehingga untuk semua $n \geq N_\varepsilon$ dan untuk semua $x \in K(x_0, \varepsilon)$ berlaku

$$d(T_0^m x,\ T_n^m x) \leq (1-k_0)\varepsilon$$

dengan

$$d(T_0^m x,\ T_n^m y) \leq k_0 d(x,y)$$

jadi untuk $n \geq N_\varepsilon$ diperoleh

$$d(T_0^m x, x_O) = d(T_0^m x,\ T_n^m x_O)$$

$$\leq d(T_n^m x,\ T_o^m x_O)$$

$$\leq (1 - k_O)\varepsilon\ k_o\varepsilon = \varepsilon$$

Maka $K(x_O,\ \varepsilon)$ invariant untuk T_n^m untuk $n \geq N_\varepsilon$. Selanjutnya kerena T_n juga sekaligus merupakan iterasi pemetaan dengan iterasi m, maka titik tetap dari T_n berada pada $K(x_O,\ \varepsilon)$ untuk $n \geq N_\varepsilon$ dipihak lain himpunan $K(x_O,\ \varepsilon)$ adalah kompak, maka berdasarkan pendefinisian $K(x_O,\ \varepsilon)$ akan diperoleh $d(x_n, x_o) \leq \varepsilon$ untuk $n \geq N_\varepsilon$ ini berarti bahwa x_n konvergen ke x_o.