BAB III
KETERBATASAN
JARI-JARI SPEKTRAL SUATU MATRIKS

3.1. KETERBATASAN JARI-JARI SPEKTRAL MATRIK A

Misalkan $a_{jk} = |a_{jk}|\exp(i\theta_{jk})$ dimana $0 \le \theta_{jk} < 2\pi$.

Definisikan $\omega_k = \left[\rho(|A^k|)\right]^{1/k}$, $k = 1,2,3,\ldots$

Lemma 1. : Jika k dan r bilangan bulat positif, maka :

$$\omega_{kr} \le \omega_k$$

Bukti: Karena $0 \le |A^{kr}| \le |A^k|^r$, dan dari ketaksamaan

$$\rho(|A^{kr}|) \le \rho\left(|A^k|^r\right).$$

Yang memenuhi persamaan :

$$\rho\left(|A^k|^r\right) = \left[\rho(|A^k|)^r\right]$$

Konsekuensinya

$$\left[\rho(|A^{kr}|)\right]^{1/kr} \le \left[\rho\left(|A^k|^r\right)\right]^{1/k}$$

atau $\omega^{kr} \le \omega^k$

dalam hal khusus, secara deduktif dapat disimpulkan:

$$\omega_r \le \omega_1 = \rho(|A|), \quad r = 1,2,3,\ldots$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Lemma 2 : Jika barisan $\omega_k (k = 1,2,3,...)$ yang mempunyai batas bawah $\rho(A)$ adalah konvergen ke $\rho(A)$.

Bukti: Misalkan $\rho(A^k) \leq \rho(|A^k|)$,. dan

$$\rho(A) \leq \left[\left(|A^k|\right)\right]^{1/k} = \omega_k$$

Untuk menunjukkan konvergen dari ω_k; kita definisikan multiplikasi norm matriks:

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right] \text{ dan}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left[N(A^k)\right]^{1/k} = \rho(A)$$

Karena $[\rho(A)]^k \leq \omega_k{}^k \leq N(A^k)$

Sehingga $\lim_{k \to \infty} \omega_k = \rho(A)$

Teorema 1: Jika A hanya mempunyai elemen tak nol dan m>1, maka $w_1 = w_m$ jika dan hanya jika $\rho(A) = w_1$

Bukti: Misalkan $\rho(A) = w_1$, dan untuk $w_1 = w_k$ (k = 1,2,3...) dan dalam bentuk tertentu $w_1 = w_m$, untuk m>1 diperoleh :

$$\rho(|A^m|) = [\rho(|A|)]^m = \rho[|A|^m]$$

Misalkan $|A|^m$ adal;ah suatu matriks positif dan $|A^m| \leq |A|^m$, menurut

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

teori Perron-Frobenius $|A^m| = |A|^m$, dan $\theta_{jl_1} + \theta_{l_1 l_2} + \ldots + \theta_{l_{m=1}} = \alpha_{jk}$

Yang kongruen dengan 2π dan α_{jk} merupakan argument *ke-j,k* dan elemen A^m serta $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{m-1}$ dengan $1 \le l_i \le n(i = 1,2,3,\ldots,m-1)$ adalah saling bebas.

Dalam bentuk khusus :

$$\alpha_{11} = \theta_{ij} + \theta_{j1} + \theta_{11r} + \ldots + \theta_{11} = \theta_{ji} + \theta_{11} + \theta_{11} + \ldots + \theta_{11r}\theta_{ij} = \alpha_{jj}$$

Sehingga

$$\alpha_{ij} = \theta_{il} + \theta_{ll} + \theta_{11} + \ldots + \theta_{11} + \theta_{ij}$$

dan

$$\alpha_{jk} = \theta_{jl} + \theta_{11} + \theta_{11} + \ldots + \theta_{11} + \theta_{lk}$$

Oleh sebab itu

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \theta_{il} + \theta_{11} + \ldots + \theta_{11} + \theta_{lk} + \theta_{jl} + \theta_{11} + \ldots + \theta_{11} + \alpha_{ij}$$

$$\equiv \alpha_{ik} + \alpha_{jj}$$

Misalkan $\delta_r = \alpha_{11} - \alpha_{lr}$, $1 \le r \le n$.

Maka

$$\alpha_{ik} \equiv \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{11}$$

$$\equiv \alpha_{il} + \alpha_{lk} - \alpha_{11}$$

$$\equiv [2\alpha_{11} - \alpha_{li}] + \alpha_{ik} - \alpha_{11}$$

$$\equiv \delta_1 - \delta_k + \alpha_{11}$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Definiskan D sebagai suatu matriks :

$$D = diag(exp(i\delta_1, i\delta_2, i\delta_3, \ldots, i\delta_n))$$

Maka $A^m = (exp\, i\alpha_{11}) D |A^m| D^{-1}$, jadi

$$\rho(A^m) = \rho(|A^m|) \text{ dan}$$

$$\text{dan } \rho(A) = \omega_m = \omega_1$$

Teorema 2: Jika m dan r merupakan bilangan bualt positif dengan $r>1$ dan

$$|A^m| > 0, \text{ maka } \omega_m = \omega_{rm} \text{ jika dan hanya jika } \rho(A) = \omega_m$$

Bukti: Misalkan $\omega_m = \omega_{rm}$.

$$\text{maka } \left[\rho(|A^m|)\right]^{1/m} = \left[\rho(|A^{rm}|)\right]^{1/rm}$$

$$\text{dan } \left[\rho(|A^m|)\right]^r = \rho\left[(|A^{rm}|)\right]$$

Sedangkan $|A^m| > 0$, jika diaplikasikan A^m pada Teorema I dapat disimpulkan

$$\rho(A^m) = \rho(|A^m|)$$

Oleh sebab itu, $\rho(A) = \omega_m$

Andaikan tidak berlaku hubungan $\rho(A) = \omega_m$, maka menurut Lemma I dapat disimpulkan $\omega_m \geq \omega_{rm}$, dan menurut Lemma 2 $\omega_{rm} \geq \rho(A)$.

Konsekuensinya $\omega_m = \omega_{rm}$.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Teorema 3: Menempatkan suatu matriks A yang mempunyai elemen tidak nol "dengan kondisi lemah ", untuk beberapa r yang tidak r kolom atau r baris dari A yang mepunyai elemen D dan $|A|^{n} > 0$ Teorema 2 dapat dimodifikasikan secara analisis.

Bagaimana dari contoh berikut ditunjukkan secara umum sesuatu yang mustahil yang melemahkan asumsi Teorema 1, dimana A merupakan suatu matriks dengan hanya elemen tidak nol yang disebut A merupakan tidak tereduksi (irreducible).

Misal $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka A tidak tereduksi tetapi $\rho(a) = 0$ dan $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2}$

Didalam Teorema 2 dibuktikan suatu kondisi $\omega_i = \omega_k$, dimana $i<k$, $i|k$ dan $\left|A^{i}\right| > 0$ diperlukan untuk menjamin $\rho(A) = \omega_i$.

Berikut ini dtunjukkan suatu metode dalam suatu kasus perkiraan, kasus untuk ω_2 yang merupakan batas terbaik untuk $\rho(A)$ dan pada ω_1 sendiri.

Misal $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, maka $\rho(A) = 1{,}62$, $\omega_1 = 2{,}62$ dan . $\omega_2 = 1{,}82$

Akar kuadrat jari-jari Gerschgorin diestimate $\rho\left(\left|A^{2}\right|\right)$ adalah 2.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

3.2. BATAS BAWAH UNTUK JARI-JARI SPEKTRAL MATRIKS A

Norm dari multiplikasi matriks Forbenius didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon(A) = \left[\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

Karena ε adalah multiplikative norm, jadi $\rho(A) \leq \varepsilon(A)$. Berikut ini suatu kondisi untuk suatu persamaan:

Lemma 3 : Norm Frobenius dari matriks A = $[a_{ij}]$ merupakan jari-jari spektral jika dan hanya jika $a_{jk} = e^{i\theta} x_j \bar{x}_k$, diamana $\bar{x}$ merupakan kompleks sekawan dari x_k dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Bukti : Jika $a_{jk} = e^{i\theta} x_j \bar{x}_k$, (j,k = 1,2,3, ...,n), maka eigen value yang tidak nol dari A hanyalah $e^{i\theta}\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)$ dan vektor yang berkorespondensi adalah komponen x_j (j = 1,2,3,....,n).

Selanjutnya $[\varepsilon(A)]^2 = \sum_{j,k=1}^{n} |x_j|^2 |x_k|^2$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^2 = |\rho(A)|^2$$

Asumsikan $\rho(A) = \varepsilon(A)$ dengan $\rho(A) > 0$, sedangkan $\varepsilon(A) = \rho(A) = 0$ yang berimlpikasi A = 0. Misalkan $e^{i\theta}\rho(A)$ merupakan eigen value dari modulo maksimum, yang mana mepunyai komponen eigen vektor x_j (j = 1,2,3,....,n) dari normalisasi $\rho(A) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Dengan ketaksamaan Cauchy-Schwaz diperoleh:

$$\left|e^{i\theta}\rho(A)x_j\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right|^2$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{jk}\right|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^2\right), \quad j = 1,2,3,\dots,n$$

jadi untuk $\rho(A) = \varepsilon(A)$, dipeuhi oleh persamaan

$$a_{jk} = n_j\bar{x}_k, \ (j,k = 1,2,3,\dots,n)$$

dimana n_j merupakan konstanta dan

$$e^{i\theta}\rho(a)x_j = \sum_{k=1}^{n} n_j\bar{x}_k x_k = n_j\rho(A)$$

dengan $n_j = e^{i\theta}$ dan $a_{jk} = e^{i\theta}x_j x_k$

Norm Frobenius adalah akar kuadrat dari jumlah kuadrat dari nilai singular matriks A dan nilai singular itui sendiri adalah labih atau sama dengan jari-jari spektral.

Suatu batasan untuk $\rho(A)$ yang bergantung pada $\varepsilon(A)$ dari Lemma 3 diperoleh dengan meminimalisasi Norm Frobenius dari suatu matriks yang similar pada A. yang didefinisikan:

$$R_i = \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 - \left|a_{ii}\right|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ji}\right|^2 - \left|a_{ij}\right|^2\right)\right]^{1/2}$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Teorema 4 : Jika A merupakan matriks kompleks berukuran nxn, maka

$$[\rho(A)]^2 \le [\varepsilon(A)]^2 - [max(R_i - C_i)]^2$$

Bukti : Akan ditunjukkan statemen yang ekivalen:

$$|\rho(A)|^2 \le |\varepsilon(A)|^2 - (R_i - C_i)^2, \quad i = 1,2,3,\ldots,n$$

Pertama-tama misalkan C dan R tidak satupun yang nol dan D merupakan matriks diagonal dimana elemen-elemen pada diagonalnya semuanya satu kecuali untuk $r \neq 0$ dalam posisi ke-i, maka:

$$|\rho(A)|^2 \le |\varepsilon\|D_r A D_r^{-1}|^2 = |\varepsilon(A)|^2 - R_i - C_i^2 + r^2 R_i^2 + r^{-2} C_i^2$$

jika diminimalisasi pada ruas kanan yang dinyatakan dalam r yang memenuhi $r^2 = c_i/R_i$

maka $[\rho(A)]^2 \le \left|\varepsilon(A)^2 - (R_i - C_i)^2\right|$

dengan $\rho(A)$ dan $\varepsilon(A)$, R_i dan C_i merupakan elemen dari A yang bergantung continu dan R_i dan $C_i \neq 0$ tidak apat dihapuskan.

Teorema 5 : Jika A matriks kompleks berukuran nxn maka

$$\rho(A) \le \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \left[\left(\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right)^2 - |TrA|^2/n\right]^{1/2} + TrA/n$$

untuk suatu S non singular.

Bukti : Misalkan λ

Merupakan eigen value dari modulo maximum, maka bentuk:

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leq \varepsilon\left(|SAS^{-1}|\right)^2 .$$

dengan aplikasi dari ketidaksamaan Cauchy-schwarz diperoleh:

$$\begin{aligned}|\lambda_m|^2 &\leq \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right. \\ &\leq \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)^2 - \left|\sum_{i\neq m}\lambda_i\right|^2\right/(n-1) \\ &= \left(\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right)^2 - |TrA - \lambda_m|^2/(n-1)\end{aligned}$$

dengan rata-rata dasar diperoleh:

$$|\lambda_m| \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/n}\left[\left(\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right)^2 - |trA|^2/n\right]^{1/2} + (TrA/n$$

Teorema 6 : Misalkan A merupakan matriks kompleks non singular berukuran nxn, maka:

$$|\rho(A)|^2 \leq \left[\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right]^2 - (n-1)\left\{|det\ A|^2 \Big/ \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)^2\right|\right\}^{1/n-1}$$

untuk suatu S non singular.

Bukti : Misalkan λ_m

Merupakan eigen value dari modulo maximum seperti pada Teorema 5.

$$|\lambda_m|^2 \leq \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)^2 - \sum_{i\neq m}|\lambda_i|^2\right.$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

dengan aplikasi dari ketaksamaan rata-rata aritmatika-geometri diperoleh:

$$|\lambda_m|^2 \leq \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right|^2 - (n-1)\prod_{i \neq m} |\lambda_i|^{\frac{2}{n-1}}$$

dengan $\prod_{i \neq m} |\lambda_i|^{\left(\frac{2}{n-1}\right)} = \left(|det\, A|^2 / |\lambda_n|^2\right)^{\left(\frac{1}{n-1}\right)}$

$$\geq \left\{|det\, A|^2 / \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right|^2\right\}^{\left(\frac{1}{n-1}\right)}$$

sehingga diperoleh :

$$|\rho(A)|^2 \leq \left|\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right|^2 - (n-1)\left\{|det\, A|^2 / \left[\varepsilon\left(SAS^{-1}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}$$

Sebagai ilustrasi dan contoh untuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ diperoleh } \rho(A) = 11 \text{ dan } \left(\sum_{i=1}^{3} |\lambda_i|\right)^{1/2} = 11{,}58$$

Batasan Ledermann [2] adalah 16,7. batasan dari Teorema 3 adalah 11,9 dan dengan menggunakan batasan Teorema 4 adalah 11,3 dan dari teorema 5 batasannya adalah 11,6

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/