BAB II

JARI-JARI SPEKTRAL

2.1. JARI-JARI SPEKTRAL SUATU MATRIKS

Himpunan dari semua nilai eigen suatu matriks A disebut spektral, sedangkan jari-jari spektral dari matriks A dinotasikan dengan $\rho(A)$ adalah harga mutlak maksimum dari nilai eigen matriks A.

$$\rho(A) = \max|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n|$$

Secara umum spektral dari suatu ruang eigen (eigen space) didefinisikan sebagai berikut:

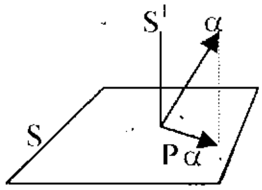
Definisi 1[1] **:** Jika $m_\lambda = m(\lambda, T)$ yang tidak nol maka λ disebut eigen value dari T, dan m_λ disebut ruang eigen λ dari T, jika α suatu vektor tidak nolk di dalam m_λ, maka α disebut eigen vektor dari T, sedangkan (λ, α) disebut eigen pair dari T.
Himpunan semua eigen value dari T disebut spektral dari T dan di tulis Sp (T).

Teorema 1[1]**:** Jika P merupakan proyeksi ortogonal dari V dalam sub ruang sejati S, maka eigen value dari P adalah 0 dan 1, ditulis Sp (P) = {0,1}, yang berkoresponden dengan : $m_0 = S^1$, $m_1 = S$

Bukti : $m_0 = NP = s^1$

$m_1 = Rp = S$

karena S merupakan subruang sejati dari V, maka tak satupun dari S atau S^1 yang merupakan subruang nol, sehingga m_0 dan m_1 tidak nol.



Gambar 2.1

Untuk eigen value dari P.

Misalkan (λ, α) merupakan eigen pair dari P, maka

$P\alpha = \lambda\alpha$, sehingga

$P(P\alpha) = P\lambda\alpha = \lambda P\alpha$ atau

$P(P\alpha) = \lambda P\alpha$

tetapi $P\alpha$ merupakan bagian dari S, sehingga

$P(P\alpha) = P\alpha$, kontradiksinya

$\lambda P\alpha = P\alpha$ atau

$(\lambda - 1)P\alpha = 0$

jika $\alpha \neq 0$, sedangkan α merupakan eigen vektor maka persamaan dipenuhi oleh $P\alpha \neq 0$

sehingga $\lambda - 1 = 0$, atau $\lambda = 1$

jadi eigen value ari P adalah 0 dan 1.

Bentuk ini diberikan contoh sederhana dari teori spektral:

Ditentukan $\lambda = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

λ merupakan eigen value dari T, jika dan hanya jika $T\lambda$ = T-λI mempunyai ruang nol yang tidak kosong:

Persamaan karakteristik dari T, diperoleh dari ruang penyelesaian yang tidak nol.

Dari sistem persamaan :

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.1)$$

Jika dan hanya jika determinat koefisien adalah nol:

$$\det[T_\lambda] = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2)$$

yang menghasilkan persamaan karakteristik:

$-(\lambda+1)(\lambda-5)^2 = 0$

Solusi persamaan dipenuhi untuk

$\lambda = 5$ dan $\lambda = -1$

Jadi spektrum dari T adalah

Sp (T) = {-1,5 }

Untuk $\lambda = -1$ di subtitusikan kedalam persamaan (2.1) menghasilakn ruang eigen

m_{-1} dengan $m_{-1} = \{(-1,-2,1)\}$

Dan untuk $\lambda = 5$, menghasilkan ruang eigen

$m_5 = \{(1,0,1),(-2,1,0)\}$

vektor (-1,-2.1) tegak lurus pada setiap vektor dari $\{(1,0,1),(-2,1,0)\}$.

jadi m_{-1} dan m_5 saling tegak lurus satu dengan lainnya.

Sistem m: m_{-1}, m_5 merupakan sistem ortogonal dari subruang tidak nol ari R^3, maka m merupakan basis ortogonal dari R^3, dengan direct sum $m_{-1} \oplus m_5$ adalah subruang dari R^3 yang diberikan oleh:

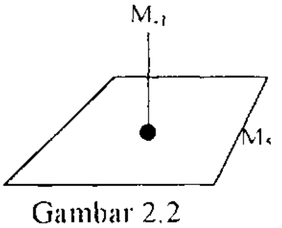
$$\dim(m_{-1} \oplus m_5) = \dim(m_{-1}) \oplus \dim(m_5)$$

$$= 1 + 2$$

$$= 3$$

$m_{-1} \oplus m_5$ merupakan subruang tiga dimensional dari R^3:

$R^3 = m_{-1} \oplus m_5$



Gambar 2.2

Jika P_{-1} dan P_5 mempunyai proyeksi ortogonal dari R^3 pada m_{-1} dan m_5, diperoleh:

$$\alpha = P_{-1}\alpha + P_5\alpha$$

$$T\alpha = T(P_{-1}\alpha) + T(P_5\alpha)$$

$$= -1P_{-1}\alpha + 5P_5\alpha$$

$$= (-1P_{-1} + 5P_5)\,\alpha$$

karena $P_{-1}\alpha \in m_{-1}$, $P_5 \in m_5$, untuk semua α R^3, diperoleh hubungan operator:

$$T = -P_{-1} + 5P_5$$

Relasai ini disebut dikomposisi spektral dari T dan setiap vektor $\alpha \in R^3$ merupakan jumlah dari dua vektor ortogonal yang tidak nol, α_1 dan α_2 dari T dengan:

Relasai ini disebut dikomposisi spektral dari T dan setiap vektor $\alpha \in R^3$ merupakan jumlah dari dua vektor ortogonal yang tidak nol, α_1 dan α_2 dari T dengan:

$$= \alpha_1 + \alpha_2$$

α_1 m_{-1}, $\alpha_2 \in m_5$, diperoleh:

$$T\alpha = T\alpha_1 + T\alpha_2$$

$$= -\alpha_1 + 5\alpha_2$$

Dari nilai eigen λ = -1 dan 5 diperoleh suatu basis dari eigen vektor dari m_{-1} dan m_5 adalah:

$$B = \{(-1,-2,1), (1,0,1), (-2,1,0)\}$$

Diperoleh matriks $[T]_B$ yang diagonal :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2. TEOREMA SPEKTRAL

Definisi 2[12]: suatu operator T merupakan spektral jika spektrumnya tidak kosong dan system ruang eigen membangun / merentang pada domain V.

Jika T merupakan spektral dan

$$Sp(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$$

Maka

$$V = m\lambda_1 \oplus m\lambda_2 \oplus m\lambda_3 \ldots \oplus m\lambda_n$$

Jika T spektral, maka setiap vektor $\alpha \in V$ merupakan jumlah dari setiap vektor dari eigen vektor T:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$$

dengan $\alpha_1 \in m\alpha_1, \alpha_2 \in m\alpha_2, \alpha_3 \in m\alpha_3, \ldots, \alpha_k \in m\alpha_k$

sehingga $T\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n$

Suatu spektral operator T disebut juga diagonalizable dan dituliskan sebagai

$$Sp(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_h\}$$

Untuk setiap i = 1,2,3,...,h, dan denagn memilih suatu basis B_i dari $m\lambda_i$.

Sedangkan

$$V = m\lambda_1 \oplus m\lambda_2 \oplus m\lambda_3 \ldots \oplus m\lambda_i \;,$$

maka sistem B : $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ merupakan suatu basis dari eigen vektor dari T.

Bentuk matriks B dari T adalah diagonal dan dituliskan sebagai :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 & & & \\ & \lambda_2 I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_k \end{bmatrix}$$

Definisi 2: Suatu operator T dikatakan menjadi simetrik jika untuk setiap $\alpha,\beta \in V$, maka $T\alpha\beta = \alpha T\beta$ dan T dikatakan simetrik, jika fungsional $F(x,y) = T_{x,y}$ dan simetrik di dalam variabel vektor x,y, untuk setiap $x,y \in V$ maka, $F(x,y) = F(y,x)$.

Teorema 2: Jika T merupakan operator simetrik dan S suatu subruang invarian T, maka $S^{\perp}$ juga invarian T.

Jika λ_1 dan λ_2 merupakan eigen value yang berbeda dari T, maka $m\lambda_1$ dan $m\lambda_2$ saling tegak lurus:

$$m\lambda_1 \perp m\lambda_2,\; \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

atau jika $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ merupakan eigen value dari T, maka sistem $m\lambda_1, m\lambda_2, m\lambda_3, \ldots, m\lambda_k$ merupakan sistem ortogonal dari subruang V yang tidak nol.

Bukti: Misalkan $\alpha \in S^{\perp}$, maka $\alpha \perp S$ atau $\alpha . \beta = 0$, untuk setiap $\beta \in S$

Karena S adalah invarian T, maka $a.T\beta = 0$, $\beta \in S$.

Kesimetrisan dari T dipenuhi oleh hubungan $T\alpha . \beta = \alpha . T\beta = 0$, $\beta \in S$.

Jadi $T\alpha$ tegak lurus pada setiap vektor didalam S dan $T\alpha \in S^{\perp}$.

Karena $\alpha \in S^{\perp}$, maka $T(S^{\perp}) \subset S^{\perp}$.

Untuk membuktikan Terema 2, akan ditunjukkan suatu vektor dalam $m\lambda_1$ adalah tegak lurus pada suatu vektor dalam $m\lambda_2$.

Misalkan $\alpha_1 \in m\lambda_2, \alpha_2 \in m\lambda_2$, maka $T\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, T\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, dengan kombinasi dan kesimetrisan T diperoleh:

$$T\alpha_1 . \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ dan}$$

$$(\lambda_1\alpha_1).\alpha_2 = \alpha_1.(\lambda_2\alpha_2)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1\alpha_2 = 0$$

karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka $\alpha_1.\alpha_2 = 0$

untuk $\alpha_1 \in m\lambda_1$, dan $\alpha_2 \in m\lambda_2$