BAB. III

PEMBAHASAN HASIL PENELITIAN

Tindak lanjut dari teori yang telah dibahas pada bab terdahulu maka selanjutnya akan di bahas hasil peneiltian ini, diantaranya model network, model aktifiti dan masahalah arus maksimum.

III. 1. Model Network.

Network merupakan diagram yang sangat dikenal dalam teori listrik, network secara mudah divisualisasikan dalam sistem transportasi atau komukasi, banyak masalah matemtika dengan berbagai variasi dinyatakan sebagai network dimana berbagai masalah khusunya yang melibatkan operasi sekuansil atau yang berkaitan dengan state (stage) ,biasanya digambarkabn dengan diagram sebagai network.

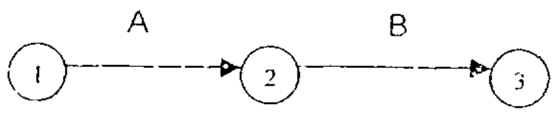
Network dalam bentuk yang lebih umum dan abstrak, disebut graph, dalam beberapa tahun terakhir teori graph merupakan subeck dalam banyak studi dan penelitian oleh matematikawan dan menghasilkan banyak aplikasi di berbagai bidang . Dalam bidang riset operasi teori graph memainkan peranan penting karena sering kali masalah penentuan nilai optimal dapat dipandang sebagai masalah pemilihan sikuensil operasi-operasi dari berbagai sejumnlah berhingga alternatif yang dapat dinyatakan sebagai graph.

Model – model optimisasi network merupakan salah satu bidang dalam riset operasi yang mengalami pengembangan yang sangat pesat akhir –akhir ini baik dalam metodologi maupun aplikasinya . Sejalan dengan perkambangan ilmu komputer, sejumlah algoritma dihasilkan khususnya dalam kontek efisiensi komputasinya.

Akibatnya sekarang ini sejumlah algoritma dan sofware tersedia dan digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang terkait khususnya dalam masalah berukuran yang relatif besar .masalah yang dapat dikategorikan sebagai network antara lainnya, model – model trasportasi,perencanaan proyek, arus maksimum dan dimana dalam penelitian ini akan digajikan tentang masalah arus maksimum dalam network aktifiti.

Suatu network terdiri dari himpunan beranggotakan titik-titik dan himpunan yang beranggotakan garis-garis yang menghubungkan dua buah titik. Titik-titik ini disebut node , sedangkan garis – garis disebut arc selanjutnya arc diberi label sesuai dengan dengan kedua label node yang dihubungkannya. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut ini.

Gambar. 1



Arc dari suatu network dapat memiliki beberapa arus dengan tipe tertentu. Jika arus melalui suatu arc hanya dalam satu arah, arc-nya disebut arc berarah. Arah suatu arc dinyatakan dengan memberikan tanda anak panah pada arc tersebut. Suatu arc berarah dari A ke B sebaiknya diberi label AB dan bukan BA.alternatif lain arc berarah dapat diberi label A -→ B. Jika arus pada suatu arc dapat bergerak dalam dua arah maka disebut arc takberarah. Untuk memudahkan penyebutan digunakan istilah arc untuk arc berarah dan link untuk arc takberarah. Suatu network yang semuanya arc-nya berarah disebut network berarah, sebalikanya jika semua arcnya takberarah disebut network takberarah. Suatu network yang memiliki campuran arc berarah dan takberarah dapat dikonvensinya menjadi network berarah dengan mengganti semua arc tak berarah dalam arah berlawanan.

III. 2. Network Aktifiti.

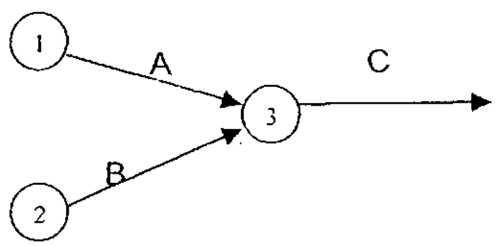
Model network dapat digunakan untuk membantu dalam penjadwalan proyek-proyek besar dan kompleks yang terdiri dari aktifitas-aktifitas, jika durasi setiap aktifitas dikatahui dengan pasti,metode path kiritis (CPM) dapat digunakan untuk menentukan berapa lama waktu yang diperlukan untuk menyelesaiakn proyek. CPM dapat juga digunakan untuk menentukan berapa lama masing-masing aktifitas dalam proyek dapat ditunda tanpa menunda penyelesaian proyek secara keseluruhan. CPM dikembangkan di akhir tahun 50 an oleh konsultan yang bekerja pada pengembangan missil polaris.

CPM dan PERT telah sukses digunakan dalam banyak aplikasi antara lain :

1. Penjadwalan proyek-proyek konstruksi seperti misalnya bangunan .
2. Instalasi sistem komputer baru.
3. Perencanaan dan pemasaran produksi baru
4. Pembangunan pelabuhan.

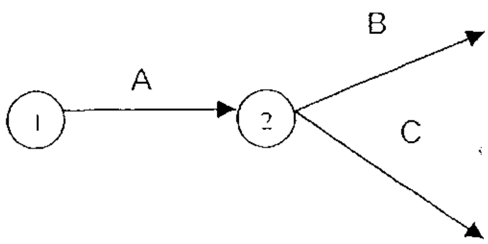
Untuk menggunakan CPM dan PERT diperlukan mendaftarkan aktifitas-aktifitas yang membangun proyek-proyek. Proyek dianggap selesai bila seluruh aktifitasnya telah selesai dikerjakan ,untuk setiap aktifitas ada himpunan aktifitas (disebut predesesor dari aktifitas) yang harus diselesaikan terlebih dahulu sebelum aktifitas mulai dikerjakan. Suatu network proyek digunakan untuk menggambarkan relasi presidensi diantara aktifitas –aktifitas tersebut. Dalam penelitian ini aktifitas akan digambarkan sebagai arc berarah,dan node digunakan untuk untuk menggambarkan selesainya himpunan aktifitas-aktifitas . (karena alasan ini, sering dinyatakan node pada network proyek sebagai event). Network proyek seperti ini sering juga disebut sebagai network aktifitas pada arc (AOA).

Untuk menggambarkan bagaimana network aktifittas memberikan relasi predensi ,misalnya aktifitas A merupakan predessesor dari aktifitas B. setiap node dalam network aktifitas menggambarkan selesainya satu atau beberapa aktifitas.



Sehingga ,node 2 pada gambar di atas memberikan selesainya aktifitas A dan awal dari aktifitas B. Misalkan aktifitas A dan B harus selesai sebelum aktifitas C dimulai, maka network berikut menggambarkan kasus seperti

i ini. Gambar berikut memperlihatkan A merupakan predesesor aktifitas B dan C.



Jika diberikan daftar aktiiftas – aktifitas dan predesesor-predesesornya. Suatu network AOA yang menggambarkan proyek (disebut proyek) dapat dikonstruksi menggunakan aturan-aturan beriktu :

1. Node 1 menyetakan awal proyek .suatu arc yang berawal dari node 1 menyatakan setiap aktifitas yang tidak memiliki predesesor.
2. Suatu node (disebut node akhir) menyatakan selesainya keseluruhan proyek, Node ini menandai aktifitas-aktifitas yang tidak mempunyai suksesor.
3. Suatu aktifitas tidak boleh dinyatakan oleh lebih dari satu arc.
4. Dua node dapat dihubungkan paling banyak oleh satu arc.

III.3. Masalah Arus Maksimum.

Suatu proyek besar biasanya terbagi sejumlah aktifitas-aktifitas kecil yang saling berkaitan, dimana beberapa aktifitas diantaranya tidak dapat dimulai sebelum kegiatan-kegiatan lain yang mendahuluinya selesai. Dalam perencanaan proyek memerlukan suatu network dimana edge mengambarkan suatu akitifitas dan verteks mengambarkan suatu kejadian ,masing-masing kejadian menyatakan bahwa beberapa aktifitas telah selesai. Bobot dari edge menyatakan waktu yang diperlukan untuk melakukan aktifitas tersebut.Dalam network ini selalu ada verteks s dengan sifat bahwa semua edge yang memuat s, mempunayi arah keluar dari s,dan satu verteks t dengan sifat bahwa edge yang memuat t, mempunyai arah masuk ke t. Verteks-verteks s dan t berturut-turut disebut awal (source) dan akhir (sink) . Selanjutnya network yang menggambarkan aktifitas – aktifitas dari suatu proyek semacam ini disebut network aktifitas.

Sekarang, pandang bahwa edge dari network aktifitas ini sebagai saluran dimana beberapa komoditas dapat mengalir. Bobot dari edge dipandang sebagai batas kapasitas maksimum yang dapat mengalir sepanjang edeg tersebut. Ringkasnya kita akan berkaitan dengan network yang terdiri dari:

(1) suatu digraph (graph berarah) D = (V,E), V = gugus verteks dan E = gugus edge
(2) suatu fungsi kapasitas k : E → N, N = Himpunan bilangan asli.
(3) suatu verteks awal s dan verteks akhir t.

Network semacam ini disebut network transport. Masalah kita adalah menentukan kapasitas maksimum dari suatu komoditas yang mengalir dari s ke t.

III. 4. Arus dan Potongan.

Misalkan suatu komoditas mengalir sepanjang edge suatu network transport, dan misalkan f(x,y) menyatakan jumlah komoditas yang mengalir sepanjang edge (x,y). Kecuali s dan t, kita nyatakan bahwa jumlah komoditas yang menuju verteks v harus sama dengan jumlah yang keluar dari v. Sehingga kita definisikan arus-masuk dan arus-keluar di v sebagai berikut:

$$arus-masuk(v) = \sum_{(x,y)\in E} f(x,v)$$

$$arus - keluar(v) = \sum_{(v,y) \in E} f(v, y)$$

dan arus-masuk(v) = arus-keluar(v), kecuali v = s dan v = t.

Ini merupakan aturan konservasi arus network. Kita juga memerlukan aturan fisibel, yaitu tidak ada edge yang memuat arus melebihi kapasitasnya. Untuk keperluan tersebut kita definisikan suatu arus sebagai berikut.

Definisi. Suatu arus dari awal s dan akhir t dalam suatu network adalah suatu fungsi yang mengawankan suatu bilangan tak-negatif f(x,y) ke masing-masing edge (x,y), dengan kendala:

(1) konservasi: arus-masuk(v) = arus-keluar(v) $(v \neq s, f)$

(2) fisibilitas: $f(x,y) < k(x,y)$ $((x,y) \in E)$

Karena tidak ada akumulasi pada verteks-verteks perantara, maka jelas bahwa jumlah total arus dari s harus sama dengan jumlah total arus ke dalam t. Dengan kata lain

arus-keluar(s) = arus-masuk(t)

untuk setiap arus dari s ke t.

Nilai yang sama dari kedua kuantitas ini menyatakan jumlah total arus yang melintasi network, dan disebut nilai-arus, ditulis nilai(f).

Masalah kita adalah menentukan nilai maksimum dari suatu arus untuk suatu network yang diberikan. Kita mulai dengan mencari suatu batas atas nilai arus ini. Misalkan kita partisi gugus-verteks dalam dua bagian, satu bagian S memuat s, dan bagian T yang lain memuat t. Maka arus dari S ke T, dengan aturan konservasi, sama dengan arus dari s ke t, yang merupakan nilai dari f. Yaitu

$$nilai(f) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x,y) - \sum_{u \in T, v \in S} f(u,v)$$

Suku pertama dari nilai(f) menyatakan arus total dari S ke T, dan suku kedua menyatakan arus total dalam arah sebaliknya. Karena suku pertama dan kedua dari nilai(f) tak-negatif, sedangkan nilai(f) juga tak-negatif, maka

$$nilai(f) \leq \sum_{x \in S, y \in T} f(x,y)$$

Lebih lanjut bahwa, f(x,y) < k(x,y) untuk semua edge, sehingga dapat disimpulkan

$$\sum_{x \in S, y \in T} k(x,y)$$

adalah batas atas nilai sembarang arus.

Secara formal, kita definisikan (S,T) sebagai potongan (yang memisahkan s dan t) jika S u T adalah suatu partisi gugus-verteks sedemikian sehingga s di dalam S dan t di dalam T. Kapasitas dari potongan adalah

$$kap(S,T)\ \sum_{x\in S, y\in T} k(x,y)$$

Dari uraian di atas dapat diturunkan suatu teorema berikut ini.

Teorema 1.

Misalkan s dan t adalah verteks-verteks awal dan akhir suatu network. Jika f sembarang arus dari s ke t, dan (S,T) adalah sembarang potongan, maka

$$nilai(f) < kap(S,T)$$

Misalkan f_0 suatu arus dengan nilai maksimum, dan (S_0,T_0) suatu potongan dengan kapasitas minimum. Teorema 1 menyatakan bahwa nilai(f_0) $\leq$ kap(S_0,T_0), atau

$$\text{maks-arus} \leq \text{min-potongan}$$

III. 5. Nilai Arus Maksimum.

Dalam bagian ini akan dibicarakan suatu teorema penting untuk menentukan nilai maksimum arus dari s ke t. Namun sebelumnya akan dijelaskan terlebih dahulu beberapa istilah yang akan digunakan untuk menjelaskan teorema tersebut.

Misalkan suatu arus f diberikan, suatu barisan verteks

$$s = x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k = t$$

disebut suatu barisan penambahan-f jika

$$f(x_i, x_{i+1}) < k(x_i, x_{i+1}) \quad \text{dan} \quad (x_i, x_{i+1}) \in E$$

atau

$$f(x_{i+1}, x_i) > 0 \quad \text{dan} \quad (x_{i+1}, x_i) \in E$$

untuk $1 \leq i \leq k-1$.

Dengan kata lain, kapasitas edge berarah maju tidak digunakan secara penuh, di lain pihak edge berarah mundur memuat suatu arus-berlawanan.

Diberikan barisan semacam ini, kita dapat menambah arus pada edge maju dan mengurangi arus pada edge mundur dengan jumlah yang sama, tanpa melanggar aturan konservasi. Perubahan terbesar yang dapat diperoleh dengan cara ini, tanpa melampaui batas edge maju atau membuat arus edge mundur negatif, adalah minimum pada daerah $1 \leq i \leq k-1$ dari kuantitas

$$k(x_i,x_{i+1}) - f(x_i,x_{i+1}) \quad ; \quad (x_i,x_{i+1}) \in E$$

$$f(x_{i+1},x_i) > 0 \quad ; \quad (x_{i+1},x_i) \in E$$

Jika kuantitas ini dinotasikan dengan α, maka kita tambahkan α ke arus pada edge maju dan mengurangkan dari edge mundur, diperoleh suatu arus baru f* dengan nilai(f*) = nilai(f) + α.

Kewujudan suatu barisan penambahan-f dari s ke t menjamin kita untuk memperoleh suatu arus baru f* dengan nilai(f*) > nilai(f). Di lain pihak, kita tahu dari Teorema 1, bahwa nilai sembarang arus tidak dapat melampaui kapasitas sembarang potongan. Teorema 2 berikut menggabungkan kedua ide tersebut.

Teorema 2.

Nilai maksimum suatu arus dari s ke t dalam suatu network, sama dengan kapasitas minimum suatu potongan yang memisahkan s dan t.

Bukti Teorema 2.

Misalkan f adalah arus maksimum. Kita definisikan S sebagai gugus dari verteks-verteks x dimana ada suatu barisan penambahan-f tak-lengkap dari s ke x, dan misalkan T adalah gugus dari verteks-verteks komplemen dari S. Verteks akhir t harus dalam T, jika tidak, kita mempunyai suatu barisan penambahan-f dari s ke t, dan f dapat ditambah, hal ini bertentangan dengan hipotesis bahwa f arus maksimum. Maka (S,T) suatu potongan yang memisahkan s dan t.

Kita akan membuktikan bahwa kapasitas (S,T) = nilai(f). Misalkan (x,y) sembarang edge dimana $x \in S$ dan $y \in T$. Dengan definisi dari S, ada suatu barisan penambahan-f tak-lengkap dari s ke x, dan jika f(x,y) < k(x,y), kita dapat memperluasnya ke y, kontradiksi dengan $y \in T$. Maka f(x,y) = k(x,y). Dengan cara yang sama, jika diberikan suatu edge (u,v) dimana $u \in T$ dan $v \in S$, ada suatu barisan penambahan-f tak-lengkap dari s ke v, dan jika f(u,v) > 0 kita dapat memperluasnya ke u, kontradiksi dengan $u \in T$. Maka f(u,v) = 0. Maka

$$nilai(f) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x,y) - \sum_{u \in T, v \in S} f(u,v)$$

$$= \sum_{x \in S, y \in T} k(x,y)$$

$$= kapasitas(S,T)$$

Misalkan (S',T') adalah sembarang potongan yang lain. Dengan Teorema 1 dan hasil yang baru saja dibuktikan, kita peroleh

$$kap(S',T') \geq nilai(f) = kap(S,T)$$

Hal ini berakibat bahwa (S,T) suatu potongan minimum.

III. 6. Algoritma Arus Maksimum.

Ada beberapa algoritma yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah arus maksimum. Algoritma Ford-Fulkerson, yang merupakan perbaikan dari Algoritma Augmenting Path mempunyai kompleksitas O(A |f*|) dengan |f*| merupakan arus maksimum yang diperoleh. Dengan menggunakan BFS pada saat melakukan penambahan arus, Edmonds-Karp memberikan algoritma yang lebih maju dibanding Ford-Fulkerson dengan kompleksitas $O(NA^2)$.

Berikut ini diberikan secara garis besar Algoritma *Augmenting Path* untuk masalah arus maksimum. Secara singkat, strategi menentukan arus maksimum adalah sebagai berikut:

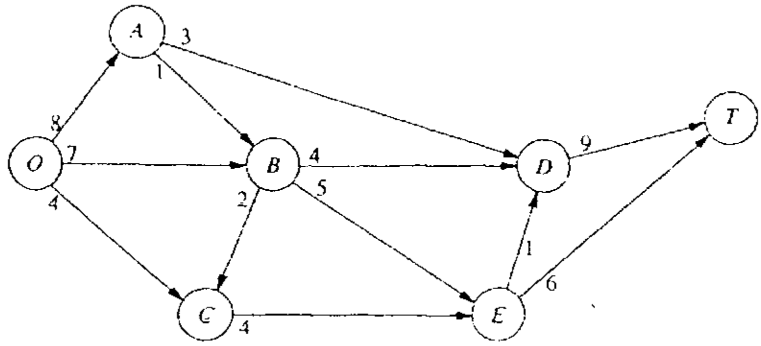
(1) Mulailah dengan sembarang arus.

(2) Identifikasi barisan (path) penambahan dari verteks s ke verteks t. Jika path ini tidak ada maka arus sudah optimal.

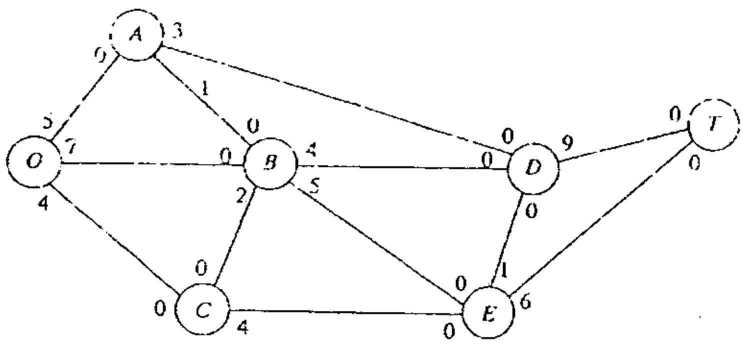
(3) Tentukan penambahan arus α. Selanjutnya nilai arus baru = nilai arus lama + α.

(4) Kapasitas masing-masing edge maju (forward) pada path penambahan ini dikurangi dengan α. Kapasitas edge mundur (backward) pada path penambahan ditambah dengan α. Kembali ke langkah 2.

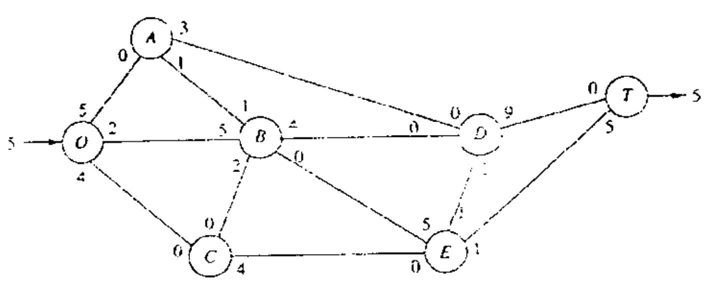
Contoh. Pandang network berikut dengan bilangan pada masing-masing arc menyatakan kapasitas maksimum arus yang dapat mengalir melalui arc yang bersesuaian. Selanjutnya kita ingin menentukan arus maksimum dari O ke T.



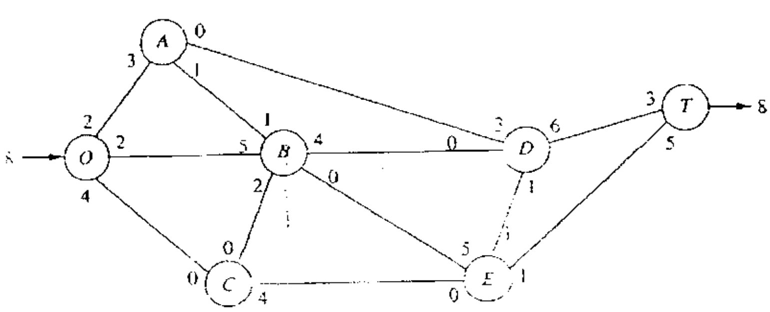
Langkah pertama kita ubah network di atas dalam bentuk berikut:



Iterasi pertama, diambil path penambahan O - B - E - T, yang hasilnya kita nyatakan pada network berikut:

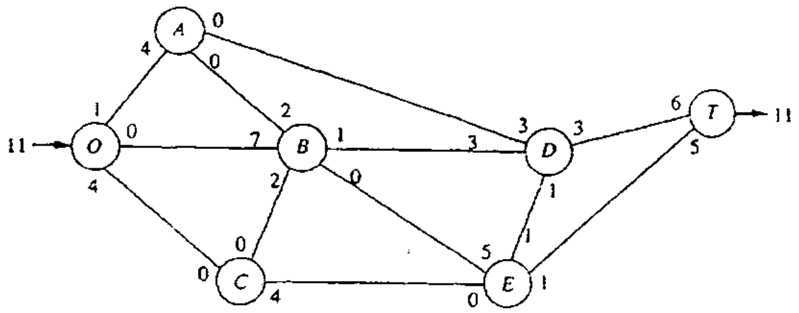


Iterasi II: path penambahan O-A-D-T, hasilnya network berikut:



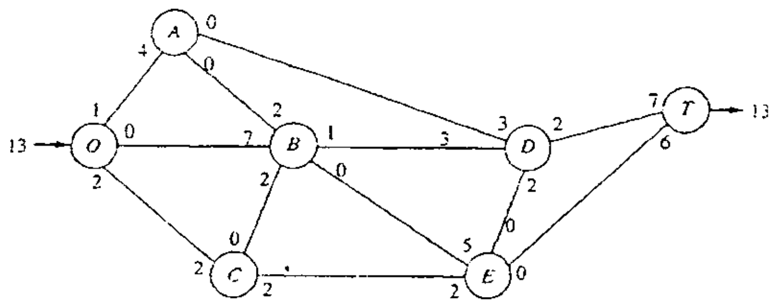
Iterasi III: path penambahan O-A-B-D-T

Iterasi IV: path penambahan O-B-D-T

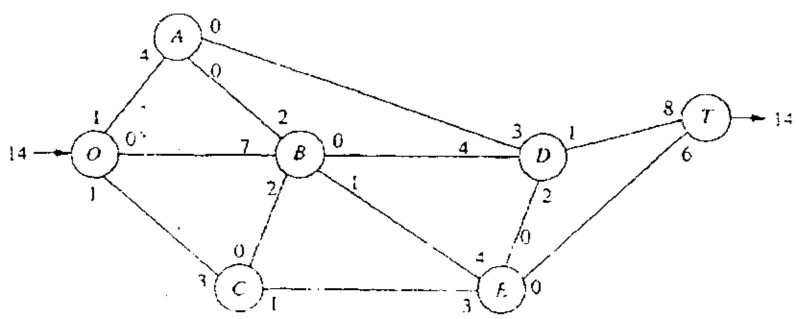


Iterasi 5: path penambahan O-C-E-D-T

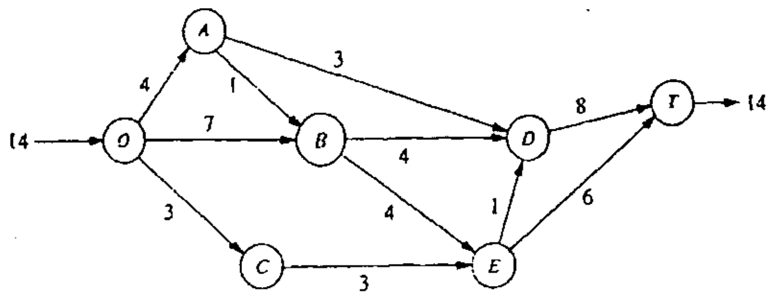
Iterasi 6: path penambahan O-C-E-T,



Iterasi 7: path penambahan O-C-E-B-D-T



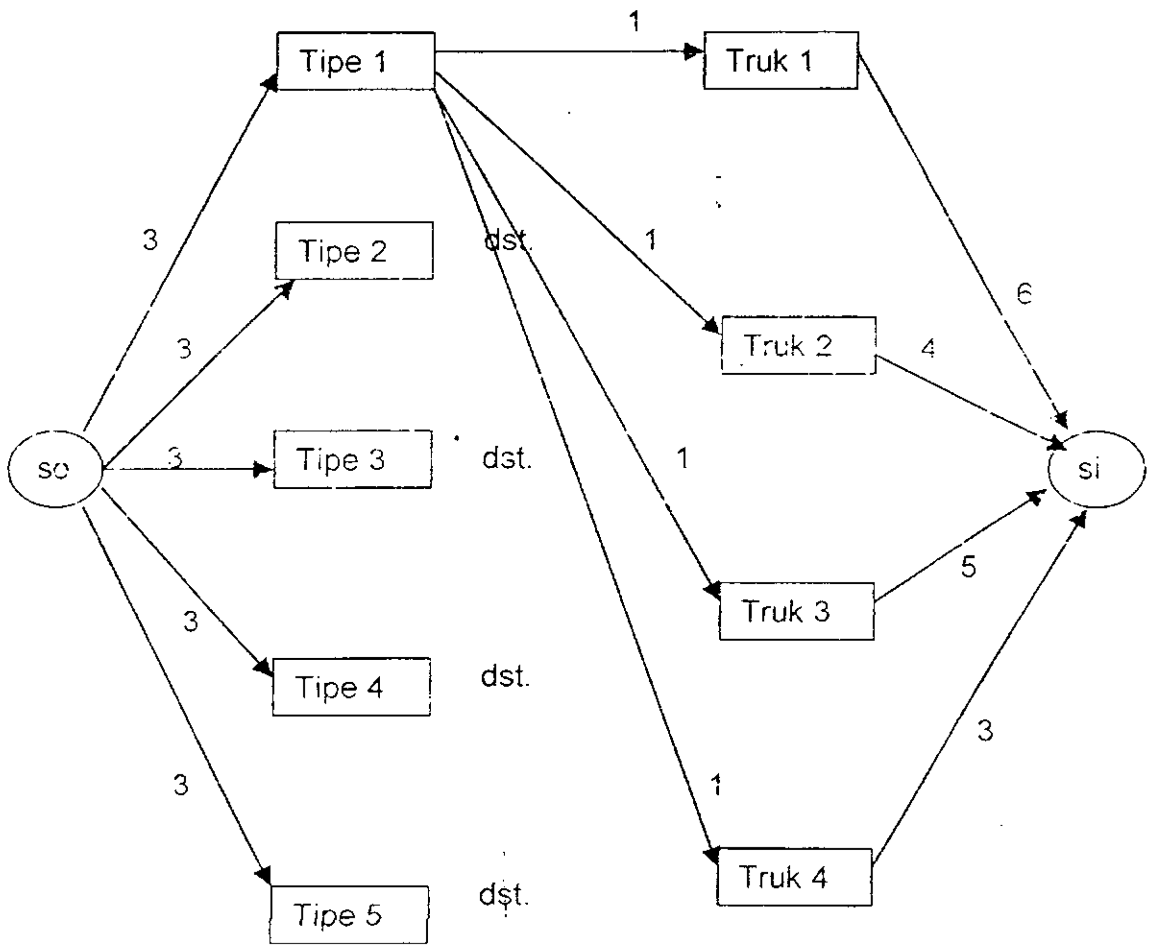
Tidak ada path penambahan iagi, sehingga pola arus sudah optimal. Sehingga penyelesaian optimalnya diberikan pada network berikut.



III. 7. Beberapa Masalah dan Formulasi.

1. Lima tipe paket yang berbeda akan dikirim menggunakan 4 buah truk. Ada tiga buah paket untuk masing-masing tipe, dan kapasitas masing-masing truk adalah 6, 4, 5, dan 3 paket. Coba kita pikirkan apakah mungkin mengirimkan paket-paket tersebut sedemikian sehingga setiap truk memuat tipe paket yang berbeda.

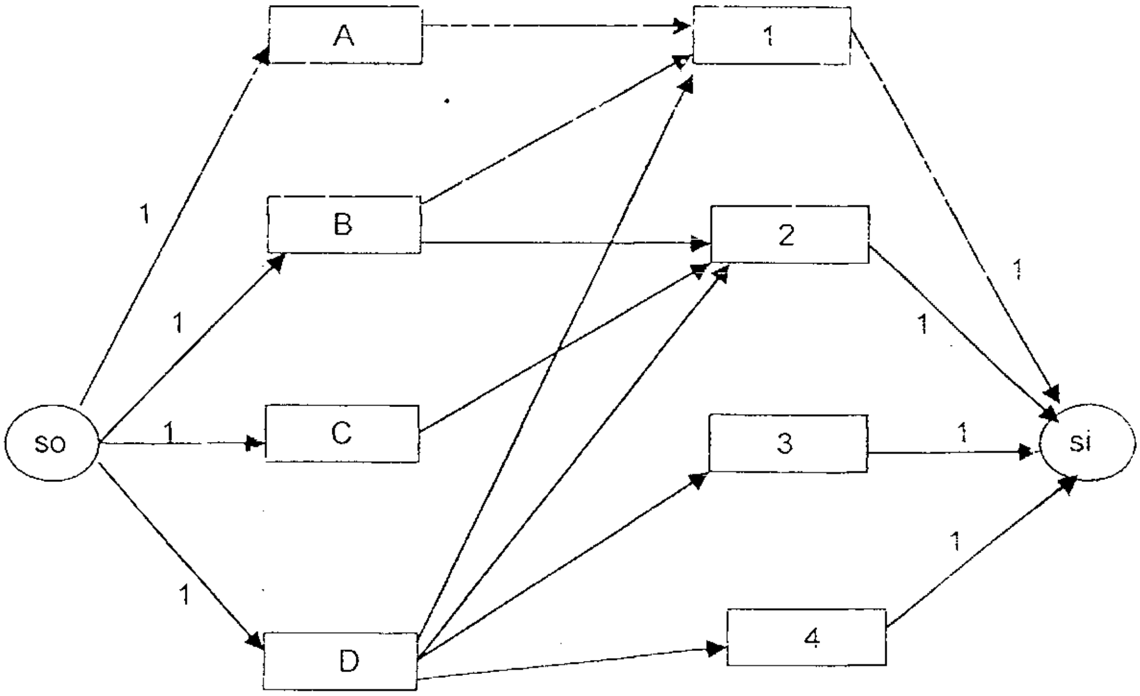
   Masalah ini kita formulasikan sebagai masalah menentukan arus maksimum dengan network sebagai berikut:



Jika arus maksimum yang dapat mengalir dari so ke si sebanyak 15, maka semua paket dapat dikirim tanpa ada satupun truk yang memuat paket dengan tipe yang sama.

2. Tersedia empat orang pekerja yang akan mengerjakan empat jenis pekerjaan yang berbeda. Sayangnya ada tiga orang yang hanya bisa mengerjakan pekerjaan-pekerjaan tertentu. Pekerja A hanya bisa mengerjakan pekerjaan 1, pekerja B hanya dapat mengerjakan pekerjaan 1 dan 2, sedangkan pekerja C hanya dapat mengerjakan pekerjaan 2, dan pekerja D dapat mengerjakan semua jenis pekerjaan. Mungkinkah semua jenis pekerjaan dapat dilakukan oleh keempat pekerja tersebut dalam waktu yang bersamaan.

   Masalah ini dapat diformulasikan sebagai masalah arus maksimum pada network berikut ini. Jika nilai arus maksimumnya 4 maka jelas bahwa semua jenis pekerjaan dapat dilakukan oleh keempat pekerja tersebut dalam waktu yang bersamaan.



3. Selama empat bulan ke depan, suatu perusahaan konstruksi baja diharuskan menyelesaikan tiga proyek sekaligus. Proyek A harus sudah selesai sebelum bulan kedua terhitung mulai dari sekarang, proyek B harus selesai sebelum bulan keempat terhitung dari sekarang, dan proyek C harus selesai dalam empat bulan terhitung dari sekarang. Untuk menyelesaikan proyek A, B, dan C masing-masing memerlukan pekerja sebanyak 8 bulan orang, 10 bulan orang, dan 12 bulan orang. Jika setiap bulan hanya tersedia 8 orang pekerja, menurut anda mungkinkah semua proyek terselesaikan sesuai dengan batas waktu yang diberikan ?.

   Masalah di atas dapat diformulasikan sebagai masalah arus maksimum pada network berikut.