BAB II

SINGLE DECREMENT DAN MULTIPLE DECREMENT

Pada Perusahaan Asuransi Jiwa, peserta (nasabah) bisa saja tiba-tiba berhenti sebelum batas yang ditentikan berakhir, sehingga terjadinya penurunan populasi.

Penurunan populasi dapat dipengaruhi oleh satu kasus dan bisa juga banyak kasus, yang dikenal dengan kasus Single Decrement dan kasus Multiple Decrement. Maka pada bagian ini akan dibahas masing-masing kasus tersebut.

1.1 Single Decrement

Definisi 2.1.1

i $$q_x = \frac{dx}{lx},$$

ii $$p_x = \frac{lx+1}{lx}$$

definisi di atas menyatakan peluang meninggal seseorang yang berusia x dalam waktu 1 th dan menyatakan peluang hidup seseorang yang berusia x dalam waktu x dalam waktu 1 th. Besaran q_x dapat juga diartikan sebagai penurunan populasi dalam satu tahun. Secara umum jika t menyatakan lamanya hidup seseorang maka peluang seseorang yang berusia x dapat dinyatakan sebagai berikut, ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$

Penurunan populasi dari yang terjadi dari tahun ke tahun dapat dinyatakan sebagai percepatan mortality (force of mortality) yang dinotasikan dengan μ_x.

Definisi 2.2.2 : Percepatan Mortalita adalah

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{1}{l_x}\frac{l_{x+\Delta t} - l_x}{\Delta t}$$

Untuk memudahkan dalam perhitungan maka percepatan mortality yang dinyatakan pada definisi 2.1.2 dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut,

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{1}{l_x}\frac{l_{x+\Delta t} - l_x}{\Delta t}$$

$$\mu_{x*} = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{d_x}$$

$$\mu_x = -\frac{d \log l_x}{d_x}$$

$$\int_0^1 \mu_x = -\frac{\log l_x}{d_x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dari (1) untuk menyatakan percepatan mortalita untuk usia (x + s), dan jangka waktu [o,t] dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\int_0^1 \mu_{x+s} ds = -\log \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= -\log {}_t p_x \ldots\ldots.(2)$$

Sehingga dari (2) dapat dinyatakan hubungan antara peluang hidup dengan percepatan mortalita sebagai berikut, ${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$

Dari definisi di atas serta pembahasannya, maka untuk kasus single decrement dapat dinyatakan sebagai berikut,

Definisi 2.1.3

Yang menyatakan peluang Seseorang yang berusia x akan tetap hidup t tahun berikutnya karena kasus j.

Dari definisi 2.1.3 dapat juga dinyatakan peluang seseorang yang berusia x akan meninggal t tahun berikutnya karena kasus j adalah : ${}_tq_x^{1(j)} = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)} ds}$

$${}_tp_x^{1(j)} = e^{\int_0^t \mu_{x+s}(j) ds}$$

2.2 Multiple Decrement

Pada Single Decrement telah dibicarakan penyebab penurunan populasi disebabkan oleh satu kasus. Dalam hal ini penurunan populasi disebabkan oleh beberapa kasus, maka sistim penurunan populasi tersebut dinamakan penurunan ganda (Multiple Decrement).

Misalkan : T_X menyatakan lamanya hidup seseorang yang berusia x.

J_x menyatakan sebab penurunan populasi

Fungsi densitasnya adalah : $f_{Tx,Jx}(t,j)$ dengan T_x berdistribusi kontinu dan J_x berdistribusi diskrit.

Fungsi densitas marginalnya dapat dinyatakan dalam bentuk $f_{Tx}(t)$ dan $f_{Jx}(j)$ yang memenuhi :

$$i \qquad \sum_{j=1}^{m} f_{Jx}(j) = 1$$

$$ii \qquad \int_0^\infty f_{Tx}(t) = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

m menyatakan banyak nya penyebab penurunan populasi dan j merupakan penyebab penurunan populasi.

Untuk menyatakan peluang seseorang yang berusia x akan keluar t tahun berikut karena kasus j, serta percepatan mortalita dapat dinyatakan sebagai berikut

Definisi 2.2.1

Fungsi distribusi dari Tx adalah :

$$i \qquad {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{Tx,Jx}(s,j)ds, \quad t \geq 0, \quad j = 1,2,..m$$

$$ii \qquad \mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_{Tx}^{(\tau)}(t)}{1 - f_{Tx}^{(\tau)}(t)}$$

$$F_{Tx}(t) = p(Tx \leq t) = {}_tq_x^{(\tau)}$$

sehingga

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}$$

Teorema 2.2.1

Misalkan x menyatakan usia, maka peluang hidup total sampai t tahun berikutnya adalah

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds}$$

Pembuktian teorema ini dengan menggunakan definisi 2.2.1 (ii)

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_{Tx}^{(\tau)}(t)}{1 - F_{Tx}^{(\tau)}(t)}$$

$$= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_tq_x^{(\tau)}$$

$$= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_tp_x^{(\tau)}$$

$$= -\frac{d}{dt} \log {}_tp_x^{(\tau)}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s0ds}$$

Definisi 2.2.2 menyatakan percepatan Mortalita dikarenakan kasus j yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{Tx,Jx}(t,j)}{1 - F_{Tx}(t)}$$

Teorema 2.2.2

Misalkan x menyatakan usia, maka peluang keluar karena kasus j sampai t tahun berikutnya adalah ${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s) ds$.

Pembuktian denngan menggunakan definisi 2.2.2

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{Tx,Jx}(t,j)}{1 - F_{Tx}(t)}$$
$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{Tx,Jx}(t,j)}{{}_t p_x^{(\tau)}} \qquad \text{.....................(2)}$$

bukti (2) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f_{Tx,Jx}(t,j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)$$

kemudian setelah di integralkan dan menggunakan definisi 2.2.1 (i) maka diperoleh sebagai berikut:

$$\int_0^t {}_{Tx,Jx}(s,j) = \int_0^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s) ds$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = \int_0^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s) ds$$

2.3. Hubungan Single Decrement dan Multiple Decrement.

Pada 2.1 dan 2.2 telah dinyatakan bentuk dari persamaan Single Decrement dan Multiple Decrement.Maka hubungan keduanya dapat dinyatakan sebagai berikut :

Definisi 2.3.1

i $\quad {}_t p_x^{1(j)} = e^{-\int_0^t \mu_x^{(j)}(s)ds}$

ii $\quad {}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t (\mu_x^{(1)}(s)+\mu_x^{(2)}(s)+\dots\dots+\mu_x^{(m)}(s))ds}$

dari (ii) diperoleh :

${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_t p_x^{1(j)}$, sehingga ${}_t p_x^{(\tau)} \geq {}_t p_x^{(\tau)}$

Akibatnya : ${}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) \geq {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)$

Pada interval $[0,1]$ diperoleh sebagai berikut :

1. Kasus Single Decrement, $q_x^{1(j)} = \int_0^1 {}_t p_x^{1(j)} \mu_x^{(j)}(t)dt$

2. Kasus Multiple Decrement, $q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_t p_x^{1(j)} \mu_x^{(j)}(t)dt$

Dari (1) dan (2) diperoleh, $q_x^{1(j)} \geq q_x^{(j)}$