BAB II

RUANG LINEAR BERNORM

Sebelum kita membahas permasalahan yang sesungguhnya, sebelumnya akan dijelasakan beberapa teori pendukung yang mendasari penelitian ini. Adapun hal-hal yang akan dibahas yaitu ruang linear bernorm, kelengkapan ,himpunan kompak dan himpunan konvek dan lain yang dianggap perlu untuk dapat menyelesaikan permasalahan yang ada pada penelitian ini.

2.1. Ruang Linear Bernorm.

Sebelum membahas tentang ruang linear bernorm, akan dijelasakan terlebih dahulu tentang ruang metrik dan ruang vektor.

Ruang metrik adalah ruang yang dibangun oleh suatu himpunan dengan metriknya. Ruang vektor X dapat dinyatakan sebagai ruang metrik jika padanya dapat didefinisikan suatu metrik. Metrik juga dapat dikatakan sebagai fungsi jarak.

Definisi 2.1.1. Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Fungsi $d : X \times X \to R$ adalah suatu metrik untuk X jika untuk setiap $x,y,z \in X$ berlaku hubungan berikut :

(a). $d(x,y) \geq 0$

(b). $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

©. $d(x,y) = d(y,x)$ (sifat simetri).

(d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (sifat ketaksamaan segitiga)

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Contoh

Misalkan $x = (\xi_1,\xi_2)$ dan $y = (\eta_1,\eta_2)$, $x,y \in R^2$ dan $d: R^2 \times R^2 \to R$ didefinisikan $d(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$. Maka (R, d) suatu ruang metrik.

Bukti :

Misalkan $x=\{\xi_1,\xi_2\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2\}$ dan $z=\{\zeta_1,\zeta_2\}$ di R^2

a) $d(x,y)= |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| \geq 0$

b) $d(x,y)=0$ jika dan hanya jika $x=y$.

$\Rightarrow$ Misalkan $d(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| = 0$ .....(i)

Pernyataan (i) berlaku bila $|\xi_1 - \eta_1| = 0$ dan $|\xi_2 - \eta_2| = 0$ atau $\xi_1 = \eta_1$ dan $\xi_2 = \eta_2$. Jadi $x = y$.

$\Leftarrow$ Selanjutnya misalkan $x = y$ berarti $\xi_1 = \eta_1$ dan $\xi_2 = \eta_2$

$$d(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$$

$$= |\xi_1 - \xi_1| + |\xi_2 - \xi_2|$$

$$= 0$$

c) $$d(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$$

$$= |\eta_1 - \xi_1| + |\eta_2 - \xi_2| \quad .$$

$$= d(y,x)$$

d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$d(x,z) = |\xi_1 - \zeta_1| + |\xi_2 - \zeta_2|$$

$$= |\xi_1 - \eta_1 + \eta_1 - \zeta_1| + |\xi_2 - \eta_2 + \eta_2 - \zeta_2|$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

$$= |(\xi_1 - \eta_1) + (\eta_1 - \zeta_1)| + |(\xi_2 - \eta_2) + (\eta_2 - \zeta_2)|$$

$$\leq |\xi_1 - \eta_1| + |\eta_1 - \zeta_1| + |\xi_2 - \eta_2| + |\eta_2 - \zeta_2|$$

$$\leq |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| + |\eta_1 - \zeta_1| + |\eta_2 - \zeta_2|$$

$$\leq d(x,y) + d(y,z)$$

Sehingga $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Jadi (R,d) yang didefinisikan dengan $d(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$ adalah suatu ruang metrik.

Secara khusus metrik dibahas dalam ruang linier bernorm dan ruang metrik lengkap (Ruang Banach)

Definisi 2.1.2. Ruang vektor (ruang linier) X atas lapangan R adalah koleksi dari anggota X yang tidak kosong , dengan dua operasi yaitu operasi tambah dan perkalian dan untuk setiap vektor-vektor $x,y,z \in X$ dan skalar $\alpha,\beta \in R$ memenuhi sifat-sifat berikut:

- $x+y \in X$
- $x+y = y+x$
- $(x+y)+z = x+(y+z)$
- terdapat vektor $0 \in X$ sehingga $0+x = x+0 = x$
- terdapat vektor balikan dari x yaitu $(-x)$ sehingga $x+(-x) = 0$
- $\alpha x \in X$
- terdapat vektor satuan dalam X sehingga $1x = x$
- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

- $(\alpha\, \beta)x = \alpha(\beta x)$

Definisi 2.1.3. Jika X adalah ruang linier atas lapangan R , suatu pemetaan $\|.\|: X \to R$ disebut norm dari X , jika untuk setiap $x,y \in X$ dan $\alpha \in R$ dan memenuhi sifat-sifat dibawah ini :

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definisi 2.1.4. Jika T: $V \to W$ merupakan fungsi dari vektor V ke ruang vektor W T dikatakan operator linier jika untuk setiap vektor-vektor u dan $v \in V$ dan sebarang $c \in R$ berlaku :

(a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(b) $T(cu) = c\, T(u)$.

Berikut ini beberapa definisi mengenai himpunan buka dan himpunan tutup dalam ruang Metrik.

Definisi 2.1.5. Misalkan X suatu ruang Metrik, maka untuk setiap setiap $x \in X$ dan $\varepsilon > 0$ maka himpunan

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Definisi 2.1.5. Misalkan X suatu ruang metrik, maka untuk setiap $x \in X$ dan $\varepsilon > 0$ maka himpunan $B(x,\varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$ disebut bola -ε dari X.

Himpunan $A \subset X$ dikatakan buka jika untuk setiap $x \in A$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $B(x,\varepsilon) \subset A$. Dan $K \subset X$ tutup jika komplemenya buka.

Definisi 2.1.6. Misalkan A subset dari ruang metrik X, dan $A \subset X$. Titik $x \in X$ adalah titik kumpul atau titik limit dari A jika setiap himpunan buka U yang memuat x memuat titik-titik di A selain x.

Himpunan yang memuat seluruh titik kumpulnya disebut klosure, biasanya ditulis dengan $\bar{A}$ atau cl (A).

Teorema 2.1.7. Misalkan X ruang metrik. $A \subset X$ tutup jika dan hanya jika A memuat seluruh titik kumpul dari A.

Bukti : [6].

2.2. Kelengkapan.

Untuk membahas kelengkapan sebelumnya dijelaskan definisi barisan konvergen dan barisan Cauchy.

Definisi 2.2.1. Suatu barisan (x_n) didalam suatu ruang linear bernorm X adalah konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_\varepsilon \in N$ sedemikian hingga $\| x_n - x \| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N_\varepsilon$. Atau

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Ditulis $(x_n) \to x$ dan kita sebut x sebagai limit (x_n).

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Definisi 2.2.2. Suatu barisan (x_n) didalam ruang linear bernorm adalah barisan Cauchy jika untuk setiap $\in > 0$ terdapat $N_\varepsilon \in N$ sedemikian hingga $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$ bila $m,n > N$

Teorema 2.2.3. Misalkan X ruang linear bernorm, $A \subseteq X$. $\bar{A}$ adalah himpunan yang memuat seluruh titik kumpul A, maka :

(i). $x \in \bar{A}$ jika dan hanya jika terdapat $(x_n) \in A$, sedemikian hingga x_n konvergen ke x

(ii). A tutup jika dan hanya jika $x_n \in A$, $x_n \to x$, mengakibatkan $x \in A$.

Bukti :

$\Rightarrow$ Misalkan $x \in \bar{A}$. Jika $x \in A$ pilih $(x_n) = (x,x,.....)$. Jelas x_n konvergen ke x.

Jika $x \notin A$ adalah titik kumpul A, sehingga untuk setiap $n = 1,2,.....$ bola buka $(x, 1/n)$ memuat $x_n \in A$ dan $x_n \to x$, ini dikarenakan bahwa $1/n \to 0$ bila $n \to \infty$.

$\Leftarrow$ Jika $x_n \in A$ dan $x_n \to x$, maka $x \in A$ (jika barisanya terbatas dan berhingga).

Untuk barisan yang terbatas takhingga, setiap sekitar x akan memuat titik-titik $x_n \neq x$, sehingga x adalah titik kumpul dari A. Berdasarkan definisi klosure, maka $x \in \bar{A}$.

(ii). A tutup jika dan hanya jika $A = \bar{A}$ (berdasarkan bukti (i).

Teorema 2.2.4. Setiap barisan konvergen didalam ruang linear bernorm X adalah barisan Cauchy.

Bukti :

Misalkan barisan $(x_n) \in X$ konvergen ke x.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Jika $x_n \to x$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N(\varepsilon) = N$ sehingga $\| x_n - x \| < \varepsilon/2$ untuk $n > N$.

Berdasarkan ketaksamaan segitiga, untuk $m,n > N$ diperoleh :

$$\begin{aligned} \| x_n - x \| &= \| x_m - x + x - x_n \| \\ &\leq \| x_m - x \| + \| x_n - x \| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ini menunjukkan barisan (x_n) barisan Cauchy.

Definisi 2.2.5. Ruang linear bernorm X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke elemen (titik atau vektor) di X.

Teorema 2.2.6. Misalkan X adalah ruang linear bernorm yang lengkap. $A \subseteq X$ adalah lengkap jika dan hanya jika A tutup di X.

Bukti :

$\Rightarrow$ Misalkan $(x_n) \in A \subseteq X$ adalah barisan Cauchy dan $(x_n) \to x$. Karena A lengkap maka haruslah $x \in A$. Ini menunjukkan A tutup di X.

$\Leftarrow$ Misalkan A tutup di X dan misalkan (x_n) adalah barisan Cauchy di A, karena $A \subseteq X$, maka $(x_n) \in X$. Karena X lengkap maka (x_n) konvergen di $x \in X$.

Karena A tutup, berdasarkan teorema 2.2.3. maka $(x_n) \to x \in A$.

Ini menunjukkan bahwa A lengkap.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

2.3. Himpunan Kompak dan Himpunan Konvek.

Definisi 2.3.1. Misalkan X ruang metrik. X dikatakan kompak barisan jika untuk setiap $(x_n) \in X$ terdapat subbarisan $(x_{nk}) \to x$, dengan $x \in X$.

Definisi 2.3.2. Misalkan x ruang metrik dan $A \subset X$. Selimut dari A adalah koleksi Himpunan $\{ U_n \}$ sehingga $A \subset \cup \{U_i\}$. Selimut dari A buka jika setiap U_I buka.

Definisi 2.2.3. Misalkan X ruang metrik . $A \subset X$ dikatakan kompak jika setiap selimut buka di A mempunyai selimut bagian berhingga.

Definisi 2.3.4. Misalkan X ruang vektor. $A \subset X$ dikatakan himpunan konvek jika untuk setiap $x,y \in A$ maka:

$$M = \{ z \in X \mid z = \alpha x + (1 - \alpha) y \} \subset A, \ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Definisi 2.3.5. Ruang Banach adalah ruang linear bernorm yang lengkap.

Definisi 2.3.6. Ruang Banach dikatakan konvek seragam jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ bila $\| x + y \| \geq \varepsilon$ dan $\|x\| , \|y\| \leq 1$.

Selanjutnya misalkan X adalah ruang Banach dan Y = R maka setiap operator linear $T : X \to Y$ dikatakan fungsional linear dan himpunan seluruh fungsional linear dikatakan ruang Dual yang dinotasikan dengan X^* atau $X^* = \{ T \mid T : X \to Y\}$

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/

Definisi 2.3.7. Suatu barisan (x_n) dalam ruang linear bernorm X dikatakan konvergen lemah jika terdapat $x \in X$ sehingga untuk setiap $T \in X^*$

$$\lim_{n \to \infty} T(x_n) = T(x) \text{...ditulis..} (x_n) \to^w x$$

Titik x disebut titik limit lemah dari (x_n) atau (x_n) konvergen lemah ke x.

Definisi 2.3.8. Misalkan X ruang metrik. $A \subseteq X$ dikatakan kompak lemah apabila untuk setiap barisan di A mempunyai sub barisan yang konvergen lemah.

Definisi 2.3.9. Misalkan X ruang Topologi dan Y adalah sebarang himpunan tak kosong. Jika $T : Y \to X$ adalah suatu pemetaan maka topologi yang dibentuk oleh $\{ T^{-1}(G)$, dengan G buka di X $\}$ disebut Topologi lemah yang didefinisikan oleh T.

Definisi 2.3.10. Misalkan X ruang linear bernorm, dan $A \subseteq X$. A dikatakan buka lemah jika dan hanya jika untuk setiap $x_o \in A$ terdapat $\varepsilon > 0$ dan $x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n \subset X^*$ Sehingga :

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{ x \in X | \ |\langle x - x_0, x_k^* \rangle| < \varepsilon \} \subseteq A$$

Jika $A \subseteq X$ tutup dalam ruang topologi lemah dari X maka A dikatakan tutup lemah. Jika A adalah subset konvek dari ruang Banach dan A tutup lemah, maka untuk setiap $r > 0$, $A \cap \{ x \in X : \| x \| \leq r \}$ adalah tutup lemah. Dan ini juga berlaku untuk sebaliknya.

Repository University Of Riau
PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS RIAU
http://repository.unri.ac.id/