Bab. III

Pembahasan Kekonvergenan Pecahan Kontinu F(a,b)

3.1. Median Pecahan Kontinu

Definisi . 3.1.1 Penjumlahan dua pecahan berurutan pada suatu barisan Ferey menghasilkan sebuah bilangan rasional yang terletak diantara kedua pecahan berurutan tersebut.

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{a'}{b'}$ adalah dua pecahan berurutan, Penjumlahan yang dimaksudkan adalah :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$$

disebut dengan mediant

Teorema . 3.1.1 Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{a'}{b'}$ adalah pecahan berurutan, maka diantara pecahan berurutan tersebut terdapat bilangan rasional tunggal dengan nilai pecahan

$$\frac{a+a'}{b+b'}$$

Bukti :

Misalkan pecahan berurutan tersebut adalah $\frac{a}{b}$ dan $\frac{a'}{b'}$, mediant dari pecahan tersebut adalah :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$$

berdasarkan teorema 2. 1. 4

maka $\frac{a}{b} \langle \frac{a+a'}{b+b'} \langle \frac{a'}{b'}$

misal $\dfrac{a+a'}{b+b'} = \dfrac{x}{y}$

sehingga $\dfrac{a}{b} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{a'}{b'}$

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \left(\frac{a'}{b'} - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{a'y - b'x}{b'y}\right) + \left(\frac{xb - ay}{yb}\right)$$

$$\geq \frac{1}{b'y} + \frac{1}{yb} = \frac{b+b'}{bb'y}$$

maka $\dfrac{b+b'}{bb'y} \leq \dfrac{a'b - ab'}{bb'} = \dfrac{1}{bb'}$

dengan menunjukan $y \geq b+b'$

jika:

a. $y > b+b'$ maka bilangan rasional terletak bukan diantara $\dfrac{a}{b}$ dan $\dfrac{a'}{b'}$

b. $y = b+b'$ maka $a'y - b'x = 1$ dan $bx - ay = 1$

sesuai dengan teorema 2. 1. 2

penyelesaiannya akan menghasilkan :

$$x = a + a'$$

$$y = b + b'$$

Teorema . 3.1.2 Jika terdapat dua barisan , misalkan p_n dan q_n, didefinisikan dengan :

$$p_0 = a_0 \qquad q_0 = 1$$

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 \qquad q_1 = a_1$$

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} \qquad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} \qquad n \geq 2$$

maka $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \dfrac{a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}} = \dfrac{p_n}{q_n}$ ......(4)

Bukti :

Untuk n = 0 hasil yang didapat adalah : $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0}{1} = a_0$

Untuk n = 1, maka

$$\frac{p_1}{q_1} = [\, a_0, a_1 \,] = \frac{a_1\, a_0 + 1}{a_1}$$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1}$$

Untuk n = k, persamaan (4) akan menjadi

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{a_k\, p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k\, q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$$

Untuk n = k +1, maka :

$$[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1} \,] \qquad \ldots.(5)$$

sesuai dengan persamaan (3), persamaan (5) akan menjadi

$$[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1} \,] = \left[\, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \,\right]$$

$$= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} \right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} \right) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1} \left(a_k \, p_{k-1} + p_{k-2} \right) + p_{k-1}}{a_{k+1} \left(a_k \, q_{k-1} + q_{k-2} \right) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1} \, p_k + p_{k+1}}{a_{k+1} \, q_k + q_{k+1}}$$

$$= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

sehingga dengan cara induksi matematika terbukti bahwa :

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{a_n \, p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \, q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

■

Teorema . 3.1.3 Fungsi p_n dan q_n memenuhi :

$$p_n \, q_{n-1} - p_{n-1} \, q_n = (-1)^{n-1} \quad \text{atau}$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n \, q_{n-1}}$$

juga memenuhi

$$p_n \, q_{n-2} - p_{n-2} \, q_n = (-1)^n \, a_n \quad \text{atau}$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n \, a_n}{q_n \, q_{n-2}}$$

Bukti :

Dari teorema 3. 1. 1 diketahui bahwa :

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}$$

maka

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n\, p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-1} - p_{n-1}(a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= (a_n\, p_{n-1}\, q_{n-1} + p_{n-2}\, q_{n-1}) - (p_{n-1}\, a_n\, q_{n-1} + p_{n-1}\, q_{n-2}) \\ &= (p_{n-2}\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_{n-2}) \\ &= -(p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-1}(p_1\, q_0 - p_0\, q_1) \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

untuk $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n}{q_n\, q_{n-1}}$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n\, q_{n-1}}$$

sedangkan untuk membuktikan

$$p_n\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_n = (-1)^n \quad a_n$$

akan ditunjukan dengan

$$\begin{aligned} p_n\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_n &= (a_n\, p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-2} - p_{n-2}(a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= (a_n\, p_{n-1}\, q_{n-2} + p_{n-2}\, q_{n-2}) - (p_{n-2}\, a_n\, q_{n-1} + p_{n-2}\, q_{n-2}) \end{aligned}$$

$$= (a_n\, p_{n-1}\, q_{n-2}) - (p_{n-2}\, a_n\, q_{n-1})$$

$$= a_n\left(p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_{n-1} \right)$$

$$= (-1)^n \quad a_n$$

untuk $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \dfrac{p_n\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_n}{q_n\, q_{n-2}}$

$$= \frac{(-1)^n \quad a_n}{q_n\, q_{n-2}}$$

■

Teorema . 3.1.4 Jika barisan $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ menuju c_0 akan memenuhi $r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \ldots \le c_0 \le \ldots < r_7 < r_5 < r_3 < r_1$ dengan kata lain $\{ r_{2n} \}$ akan membentuk barisan naik, sedangkan $\{ r_{2n-1} \}$ akan membentuk barisan turun dan $r_{2n} < r_{2j-1}$ untuk semua n, j .

Bukti :

Dari teorema 3. 1. 2 telah dibuktikan untuk $r_n - r_{n-1}$ dan $r_n - r_{n-2}$, dimana dari teorema tersebut dapat diartikan bahwa $r_{2n} < r_{2n+2},\quad r_{2n-1} < r_{2n-1}$ *dan* $r_{2n} < r_{2n+1}$, sebab nilai q_n positif untuk $n \ge 0$ dan a_n positif untuk $n > 1$, yang berarti bahwa $r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \ldots$, dan $r_1 < r_3 < r_5 < r_7 < \ldots$untuk membuktikan bahwa $r_{2n} < r_{2j-1}$ tempatkan hasil yang telah didapat secara bersaman-sama dalam bentuk :

$$r_{2n} < r_{2n+2j} < r_{2n-2j-1} < r_{2j-1}$$

■

dari hasil tersebut maka diperoleh :

$$x(n) = +1 \quad \text{jika n ganjil}$$

$$x(n) = -1 \quad \text{jika n genap}$$

■

Teorema . 3.1.6 Mediant dari dua bilangan rasional yang berurutan misalkan $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ dan $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$ adalah $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1]$

Bukti :

Dari teorema 3. 1. 1 didapat

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

maka mediant dari kedua pecahan tersebut adalah :

$$\frac{p_n}{q_n} \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-1}}{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-1}}$$

$$= \frac{(a_n + 1)\, p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1)\, q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$= [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n + 1]$$

$$= [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, 1]$$

3.2.. Kekonvergenan Pecahan Kontinu.

Pandang pecahan kontinu $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ $(0 \le n \le N)$ akan konvergen ke $[a_0, a_1, \ldots, a_N]$.

Teorema . 3.2.1

Jika p_n dan q_n didefinisikan dengan

$$p_0 = a_0,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (2 \le n \le N)$$
$$q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2 \le n \le N)$$

Maka

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

Bukti:

1. **Untuk n=0, sehingga**

$$[a_0] = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$$

n=1,
$$[a_0, a_1] = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

2. **Untuk n≤m, dimana m<N, maka**

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}}$$

dan $p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}, q_{m-2}$

hanya bergantung pada $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Maka dengan ,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}] = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right]$$

$$= \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}}$$

$$= \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}}$$

$$= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

(catatan☺)

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

sehingga

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

maka

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\ q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$
$$= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$$

Dengan mengulangi untuk *n-1, n-2, ...,* 2 dalam penempatan n, didapat

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}(p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^{n-1}$$

Sehingga (**)

$$
\begin{aligned}
p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - a_n p_{n-2} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-2} \\
&= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-2}) \\
&= (-1)^n a_n
\end{aligned}
$$

Teorema . 3.2.2

Fungsi p_n dan q_n memenuhi ;

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

atau

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$$

Bukti :

Lihat catatan☺ diatas .

Teorema . 3.2.3

Semua fungsi $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$

Bukti:

Lihat (**)