KOMBINASI METODE NEWTON DENGAN METODE ITERASI YANG DITURUNKAN BERDASARKAN KOMBINASI LINEAR BEBERAPA KUADRATUR UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Supriadi Putra[1), Agusni[1), Yudi Prima Restu[2)

sputra@unri.ac.id

[1)Laboratorium Matematika Terapan Jurusan Matematika
[2)Alumni Program Studi S1 Matematika, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293)

ABSTRAK

Kita akan mendiskusikan kombinasi metode Newton dengan metode yang diturunkan berdasarkan kombinasi beberapa kuadratur untuk menyelesaikan persamaan non linear satu variabel. Tulisan yang sama telah dilakukan sebelumnya oleh Dehghan M. dan Hajarian M. *International Journal Computational Mathematics.* 85 (1).1-6 (2008). Disini kita akan menggunakan metode yang diajukan oleh Dehghan M. dan Hajarian M. kemudian akan memperbaiki pembuktian orde kekonvergenan metode sebagai koreksi atas apa yang telah dilakukan oleh Dehghan M. dan Hajarian M. Perbandingan antara metode yang dibahas juga akan dilihat dari segi *cost* komputasinya.

Kata Kunci: Aturan Titik Tengah, Aturan Trapezium, Metode Newton, Rata-rata Harmonik.

ABSTRACT

We discuss a combination of Newton's method and a method derived by a linear combination of some quadraturs to solve a nonlinear equation of one variable. The same work has been done by Dehghan M. and Hajarian M. International Journal Computational Mathematics. 85 (1).1-6 (2008). Here we redrive a formula proposed by Dehghan M. and Hajarian M then we prove the order of convergence of the method for correcting the work done by Dehghan M. and Hajarian M. Comparison among the discussed methods is also given by considering computational costs.

Key Words**:** *Midpoint rule, Trapezoidal rule, Newton's method, Harmonic mean.*

PENDAHULUAN

Menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear satu variabel,

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

adalah masalah yang sering muncul dari penerapan matematika dalam menyelesaikan masalah teknik dan sains. Banyak metode dikembangkan untuk menyelesaikan masalah ini, dengan cara memodifikasi metode yang ada [3,5,6,13] atau mengemukakan metode baru yang mempunyai karakteristik yang sama dengan metode yang sudah ada [1].

Diantara metode yang tersedia, metode Newton adalah metode favorit yang penerapannya memerlukan satu tebakan awal, katakan x_0, dan iterasinya dinyatakan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

Metode ini mensyaratkan bahwa $f(x_n) \neq 0$, agar metode dapat diterapkan dan konvergen secara kuadratik. Metode lain yang juga populer adalah metode Halley [10,11] yang iterasinya diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f''(x_n)f(x_n)},$$
$$n = 0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

Metode Halley konvergen kubik untuk akar sederhana dan memerlukan turunan kedua dari fungsi f yang terkadang memerlukan *cost* yang besar untuk memperolehnya.

METODOLOGI PENELITIAN

Pada penelitian ini dilakukan terlebih dahulu kajian ulang terhadap hasil yang telah dilakukan oleh Dehghan and Hajarian [2] yakni dengan memeriksa kebenaran penurunan formula dan membuktikan analisis error dari metode tersebut. Selanjutnya dilakukan uji komputasi dengan membandingkan metode iterasi yang dimaksud dengan metode Newton dan Halley.

Definisi 1

Asumsikan bahwa suatu barisan $\{x_n\}$ konvergen ke α dan misalkan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n = 0,1,2,\ldots$. Jika terdapat dua buah konstanta $A \neq 0$ dan $p > 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = A,$$

p merupakan orde kekonvergenan dari barisan $\{x_n\}$ dan A disebut asimtot error.

Setelah analisa kekonvergenan dilakukan secara analitis, selanjutnya melalui uji komputasi (menggunakan software Matlab versi 7.8) akan dibandingkan hasil yang diberikan oleh masing-masing metode iterasi. Jumlah iterasi pada setiap contoh persamaan nonlinear yang digunakan akan dijadikan acuan pembanding.

HASIL DAN PEMBAHSAN

Metode Iterasi Berdasarkan Kombinasi Linear Beberapa Kuadratur

Bila dipandang x_{n+1} sebagai akar dari model linear dari f sekitar x_n [7]

$$M(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n), \qquad (4)$$

maka dengan menggunakan integral sebagian, model linear ini dapat dipandang sebagai identitas berikut [4],

$$f(x) = f(x_n) - \int_{x_n}^{x} f'(s)ds. \qquad (5)$$

Metode Newton diperoleh dengan mengaproksimasi integral di ruas kanan (5) dengan menggunakan jumlah Reimann kiri pada satu interval. Integral di ruas kanan (5) juga dapat ditaksir dengan aturan Trapezium yang diberikan oleh

$$\int_{x_n}^{x} f'(s)ds = \left(\frac{f'(x_n) + f(x_n)}{2}\right)(x - x_n) \qquad (6)$$

yang digunakan Weerakoon and Fernando [12] untuk mendapatkan metode Newton berdasarkan aturan Trapezium. Bila ditaksir integral diruas kanan (5) dengan aturan titik tengah, yaitu,

$$\int_{x_n}^{x} f'(s)ds = f'\left(\frac{x_n + x}{2}\right)(x - x_n), \qquad (7)$$

Dapat diturunkan metode Newton sebagaimana ditunjukkan oleh Ozban [8]. Selanjutnya bila dipandang $\frac{f'(x_n) + f'(x)}{2}$ sebagai rata-rata aritmatik dari dua nilai, maka apabila rata-rata aritmatik ini ditaksir dengan rata-rata harmonik [9], maka diperoleh

$$\int_{x_n}^{x} f'(s)ds = \left(\frac{2f'(x_n)f'(x)}{f'(x_n) + f'(x)}\right)(x - x_n), \qquad (8)$$

Sekarang integral di ruas kanan persamaan (5) ditaksir dengan kombinasi linear dari persamaan (6), persamaan (7) dan persamaan (8) diperoleh

$$\int_{x_n}^{x} f'(s)ds = (x - x_n)\left(\frac{1}{A}\left(\frac{2f'(x_n)f'(x)}{f'(x_n) + f'(x)}\right) + \frac{1}{B}f'\left(\frac{x_n + x}{2}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{f'(x_n) + f'(x)}{2}\right)\right) \qquad (9)$$

dengan A, B, C adalah bilangan real yang tidak sama dengan nol. Apabila persamaan (9) disubstitusikan ke persamaan (5) dengan mengingat $f(x) = 0$, maka setelah disederhanakan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - A\frac{f(x_n)\left(f'(x_n)+f(x)\right)}{2f'(x_n)f(x)} - B\frac{f(x_n)}{f'\left((x_n+x)/2\right)} - C\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f(x)} \tag{10}$$

Selanjutnya apabila nilai x diruas kanan ditaksir dengan metode Newton, maka dapat diusulkan metode iterasi lain dengan bentuk

$$x^*_{x+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{11}$$

Perhatikan bahwa metode iterasi yang diusulkan ini tidak memerlukan turunan kedua dari *f*. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa metode iterasi yang di usulkan ini memiliki kekonvergenan orde 4 untuk nilai *A, B,* dan *C* tertentu sebagaimana diberikan Teorema berikut.

Analisa Kekonvergenan

Teorema 1

Misalkan $\alpha \in D$ adalah akar sederhana dari fungsi terdiferensialkan secukupnya $f : D \subseteq R \to R$ untuk interval buka *D*. Jika x_0 cukup dekat ke α maka metode pada persamaan (11) dan (12) memiliki kekonvergenan orde empat apabila $A = 1$, $B = \frac{2}{3}$, dan $C = -\frac{2}{3}$ yang memenuhi persamaan error sebagai berikut

$$e_{n+1} = \frac{\left(f''(\alpha)\right)^3}{8\left(f'(\alpha)\right)^3}e_n^4 + O(e_n^5), \tag{13}$$

Bukti:

Misalkan α adalah akar sederhana dari $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ adalah

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!}e_n^4 + O(e_n^5)$$

dengan $x_n = \alpha + e_n$. Karena $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$ maka setelah disederhanakan persamaan (14) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!f'(\alpha)}e_n^4 + \frac{O(e_n^5)}{f'(\alpha)}\right)$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + O(e_n^5)\right) \tag{15}$$

dengan $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$. Dengan cara yang sama diperoleh ekspansi Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ adalah

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + 5C_5e_n^4 + O(e_n^5)\right) \tag{16}$$

Penyederhanaan hasil bagi persamaan (15) dan persamaan (16) dengan menggunakan deret geometri adalah

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 - (4C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (17) kepersamaan (11) dan mengingat $x_n = \alpha + e_n$ akan diperoleh

$$x^*_{n+1} = \alpha + C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + (4C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{18}$$

Kemudian, dihitung $\dfrac{x_n + x^*_{n+1}}{2}$ dengan menggunakan (18), dan setelah penyederhanaan diperoleh

$$\frac{x_n + x^*_{n+1}}{2} = \alpha + \frac{1}{2}\left(C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + (4C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_n^4\right) + O(e_n^5) \tag{19}$$

Selanjutnya dengan mengikuti langkah menemukan ekspansi Taylor Taylor dari

$f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, diperoleh ekspansi Taylor dari $f'(x_{n+1}^*)$ disekitar $x_{n+1}^* = \alpha$, setelah memperhatikan persamaan (18) sebagai berikut

$$f'(x_{n+1}^*) = f'(\alpha)\big(1 + 2C_2^2 e_2^2 + (4C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + 6C_2C_4 + 8C_2^4 - 11C_2^2C_3)e_n^4\big) + O(e_n^5) \quad (20)$$

Dengan cara yang sama ekspansi Taylor dari $f'\left(\frac{x_n + x_{n+1}^*}{2}\right)$ disekitar $\frac{x_n + x_{n+1}^*}{2} = \alpha$, adalah $f'\left(\frac{x_n + x_{n+1}^*}{2}\right)$

$$= f'(\alpha)\big(1 + 2C_2 e_n + (\tfrac{3}{4}C_3 + C_2^2)e_n^2 + \left(\tfrac{7}{2}C_2C_3 - 2C_2^3 + \tfrac{1}{2}C_4\right)e_n^3 + \left(\tfrac{9}{2}C_2C_4 + 4C_2^4 + 3C_3^2 - \tfrac{37}{4}C_2^2C_3 + \tfrac{10}{29}C_5\right)e_n^4\big) + O(e_n^5) \quad (21)$$

Selanjutnya menggunakan persamaan (16) dan (20) dapat dihitung

$$f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*) = f'(\alpha)\big(2 + 2C_2e_n + (3C_3 + 2C_2^2)e_n^2 + \left(4C_4 + 4C_2C_3 - 4C_2^3\right)e_n^3 + \left(6C_2C_4 + 8C_2^4 - 11C_2^2C_3 + 5C_5\right)e_n^4\big) + O(e_n^5) \quad (22)$$

dan

$$f'(x_n)f'(x_{n+1}^*) = f'(\alpha)^2\big(1 + 2C_2e_n + (3C_3 + 2C_2^2)e_n^2 + \left(4C_4 + 4C_2C_3\right)e_n^3 + \left(3C_2^2C_3 + 6C_2C_4 + 5C_5\right)e_n^4\big) + O(e_n^5) \quad (23)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (15) dan (22), diperoleh pula

$$f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)\right) = f'(\alpha)^2\big(2e_n + 4C_2e_n^2 + \left(5C_3 + 4C_2^2\right)e_n^3 + \left(-2C_2^2 + 9C_2C_3 + 6C_4\right)e_n^4\big) + O(e_n^5) \quad (24)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (23) dan (24) diperoleh bentuk penyederhanaan sebagai berikut.

$$\frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)\right)}{2f'(x_n)f(x_{n+1}^*)} = e_n - \tfrac{1}{2}C_2e_n^3 + (-C_2^3 + \tfrac{3}{2}C_2C_3 - C_4)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (25)$$

Demikian juga dengan menggunakan persamaan (15) dan (21) juga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'((x_n + x_{n+1}^*)/2)} = e_n + \left(\tfrac{1}{4}C_3 - C_2^2\right)e_n^3 + (3C_2^3 - \tfrac{15}{4}C_2C_3 + \tfrac{1}{2}C_4)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (26)$$

Serta dengan dengan menggunakan persamaan (15) dan (22) diperoleh

$$\frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f(x_{n+1}^*)} = e_n + \left(-C_2^2 - \tfrac{1}{2}C_3\right)e_n^3 + (3C_2^3 - \tfrac{3}{2}C_2C_3 - C_4)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (27)$$

Akhirnya hasil yang diperoleh pada persamaan (25), (26) dan (27) apabila disubstitusikan ke persamaan (12) akan diperoleh nilai

$$A = 1, \quad B = \tfrac{2}{3}, \text{dan } C = -\tfrac{2}{3},$$

yang memenuhi persamaan error

$$e_{n+1} = \frac{\left(f''(\alpha)\right)^3}{8\left(f'(\alpha)\right)^3}e_n^4 + O(e_n^5). \blacksquare$$

Contoh Komputasi

Pada bagian ini, akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan jumlah iterasi pada metode Newton (NM), metode Halley (HM), dan metode iterasi berdasarkan kombinasi beberapa kuadratur (CCM), dengan nilai $A = 1$, $B = \frac{2}{3}$, dan $C = -\frac{2}{3}$, seperti ditunjukkan pada Teorema 1. Dalam melakukan perbandingan komputasi dilakukan dengan menggunakan MATLAB versi 7.6. Berikut ini adalah dua buah persamaan nonlinier [2] yang digunakan dalam membandingkan metode-metode yang dimaksud.

1. $f_1(x) = \cos(x) - xe^x + x^2$ dengan $\alpha = 0.63915409633201$.
2. $f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan $\alpha = 1.36523001341410$.

Dalam menentukan solusi numerik, kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang digunakan adalah sama untuk semua metode, yaitu

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < toleransi \text{ dan } |f(x_{n+1})| < eps$$

dengan toleransi sebesar 1×10^{-14} dan jumlah iterasi (n) maksimum sebanyak 100 iterasi. Sedangkan nilai *eps* yang diberikan oleh

Matlab adalah 2.22 $\times 10^{-16}$. Hasil komputasi dari metode yang dibandingkan disajikan Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Perbandingan Hasil Komputasi Beberapa Metode Iterasi

f_i	Metode	x_0	n	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\left\lvert \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n} \right\rvert$
1.	NM	-0.5	7	1.11022e-016	2.20775e-013
	HM	-0.5	5	1.11022e-016	2.47262e-009
	CCM	-0.5	4	1.11022e-016	1.62238e-013
2.	NM	1.0	5	0.00000e+000	1.55797e-011
	HM	1.0	3	0.00000e+000	2.70918e-007
	CCM	1.0	3	0.00000e+000	1.28769e-010

KESIMPULAN

Pada persamaan nonlinier

$$\cos(x) - xe^x + x^2 = 0$$

dengan tebakan awal $x_0 = -0.5$ secara keseluruhan metode Iterasi berdasarkan kuadratur lebih unggul dibandingkan metode Newton karena jumlah iterasi metode iterasi baru lebih sedikit. Sedangkan pada persamaan nonlinier

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

dengan tebakan awal $x_0 = 1.0$ secara keseluruhan metode iterasi berdasarkan kombinasi beberapa kuadratur juga masih unggul dibandingkan metode Newton. Sedangkan metode berdasarkan kuadratur jika dibandingkan dengan metode Halley secara keseluruhan samabaiknya dengan metode berdasarkan kuadratur, hanya saja pada metode Halley diperlukan turunan kedua dari *f*. Dari Tabel 1 juga terlihat bahwa semua iterasi dari metode yang dibandingkan berhenti disebabkan kondisi $\lvert f(x_{n+1})\rvert < eps$ terpenuhi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini terselenggara dengan biaya yang berasal dari Dana DIPA Universtas Riau melalui Hibah Penelitian Laboratorium dengan kontrak Nomor: 71/UN.19.2/PL/2011 tanggal 1 April 2011.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abu-Alshaikh, I. 2005. A New Iterative Method for Solving Nonlinear Equations. *Enformatika*. 5:190–193.

[2]. Dehghan M. danHajarian M. (2008) New iterative method for solving nonlinear equations with fourth-order convergence. *International Journal Computational Mathematics.***85** (1). 1-6.

[3]. Gerlach, J. 1994. Accelerate Convergence in Newton's Method. *Siam Review*. 36(2): 272–276.

[4]. Hamming, R. H. 1973. *Numerical Method for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Inc. New York. Republished by Dover, New York.

[5]. Hasanov, V.I., Ivanov, I. G. and Nedjibov, G. 2002. A new modification of Newton's Method. *Application of Mathematics in Engineering and Economics*, Heron Press, Sofia, 278–286.

[6]. Kanwar, V. Sharma, J. R. and Mamta. 2005. A new family of Secant-like method with superlinear convergence. *Applied Mathematics and Computation*. 171:104– 107.

[7]. Kelley, C. T. 1995.*Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Frontier in Applied Mathematics 16. SIAM, Philadelphia.

[8]. Ozban A.Y. (2004) *Some New Variants of Newton Methods*. Appl. Math. Lett. **17**, 677-682.

[9]. Spiegel, M.R. 1968. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*Mcgraw-Hill Book Company. New York.

[10]. Traub, J.F. (1964) Iterative Methods for the Solution of Equations. *Prentice Hall*, New York.

[11]. Wait, R. (1979) The numerical solution of algebraic equations. John Wiley & Sons, Chichester.

[12]. Weerakoon, S. & Fernando, T. G. I. 2000. A variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*. 13: 87–93.