PENGEMBANGAN METODE ITERASI DUA DAN TIGA LANGKAH DENGAN ORDE KONVERGENSI OPTIMAL§

Supriadi Putra, M.Si*, Dr. Syamsudhuha, M.Sc
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau
*sputra@unri.ac.id

ABSTRAK
Dalam makalah ini disajikan dua metode iterasi baru 2-langkah dan 3-langkah yang masing-masing memiliki orde kekonvergenan empat dan tujuh untuk menyelesaikan persamaan non-linear. *Conjecture* Kung-Traub mengatakan bahwa untuk mencapai orde kekonvergenan empat diperlukan tiga evaluasi fungsi, sedangkan untuk mencapai orde kekonvergenan tujuh diperlukan empat evaluasi fungsi. Melalui simulasi numerik akan ditunjukkan bahwa kedua metode ini cukup efisien dan memberikan kinerja yang sama atau bahkan lebih baik apabila dibandingkan dengan metode Newton Klasik.

Kata kunci : *Conjecture* Kung-Traub, 2-langkah, 3-langkah, kekonvergenan, metode iterasi, orde empat, orde tujuh, persamaan non-linear.

PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam saint dan teknik memerlukan penyelesaian dari persamaan non-linear $f(x)=0$ [1-9]. Salah satu cara penyelesaian terbaik untuk menyelesaikan persamaan ini adalah menggunakan Metode Newton (**MN**) dengan formulasi iterasi sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad dan \quad |f'(x_n)| \neq 0. \qquad ..... (1)$$

Metode Newton konvergen secara kuadratik [1-9]. Beberapa usaha telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya untuk memodifikasi metode ini untuk meningkatkan kekonvergenannya. Pengembangan lebih dilakukan kepada iterasi 2-langkah dan 3-langkah. Pengembangan iterasi 2-langkah yang telah dilakukan oleh Jarrat (**MJar**) memiliki kekonvergenan orde-4 [1,5] dengan bentuk iterasi

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - J_f \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}\right\} \qquad ..... (2)$$

§ Disampaikan dalam acara Seminar Bersama dan Rapat Tahunan BKS PTN Wilayah Barat, 9-10 Mei 2011 di Universitas Lambung Mangkurat, Kalimantan Selatan, Indonesia.

dimana

$$J_f = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}.$$

Sedangkan pengembangan iterasi 3-langkah memberikan kekonvergenan orde-6 sebagaimana yang telah dilakukan oleh Chun [4].

Metode Chun (**MCH**) :

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - J_f \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{\left(1 - \frac{3}{2}J_f\right)f'(x_n) + \frac{3}{2}J_f f'(y_n) - (z_n - x_n)(z_n - y_n)}, \end{aligned}\right\} \quad \text{..... (3)}$$

dimana $J_f = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}$.

Metode iterasi yang telah dibuktikan seperti pada persamaan (2) adalah metode yang optimal sedangkan metode pada persamaan (3) belum merupakan metode iterasi yang optimal karena belum memenuhi ketentuan *Conjecture* Kung-Traub [8]. Conjecture Kung-Traub mengatakan bahwa metode iterasi optimal tanpa mengingat iterasi sebelumnya (*out memory*) menggunakan n evaluasi fungsi dapat mencapai orde kekonvergenan sebesar 2^{n-1}.

Dalam makalah ini akan dilakukan review terhadap metode yang ditawarkan oleh Khattri dkk [6]. Pada metode ini diperlihatkan dua bentuk modifikasi yang baru dimana masing-masing dengan orde kekonvergenan empat dan tujuh. Untuk mencapai orde kekonvergenan empat diperlukan tiga evaluasi fungsi, sedangkan untuk mencapai orde kekonvergenan tujuh diperlukan empat evaluasi fungsi. Ide konstruksi metode baru ini adalah menyatakan bentuk turunan pada langkah berikutnya sebagai kombinasi linear dari turunan langkah sebelumnya dan kemiringan. Selanjutnya dengan mengambil pembanding metode optimal lainnya yaitu Metode Newton dan Jarrat akan dilakukan uji komputasi.

PENGEMBANGAN METODE ITERASI BARU

Perhatikan Metode Newton Ganda (**MNG**) berikut

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{aligned}\right\} \qquad ..... (4)$$

Metode Newton Ganda ini konvergen dengan orde empat. Karena Metode Newton Ganda konvergen dengan orde kekonvergenan empat, maka semestinya metode ini melakukan 3 evaluasi fungsi pada setiap iterasinya. Akan tetapi metode ini melakukan 4 evaluasi fungsi. Hal ini berarti untuk mengoptimalkannya diperlukan pendekatan dari salah satu evaluasi fungsi diantaranya. Misalkan dicari pendekatan $f'(y_n)$ dalam suku $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f(y_n)$. Misalkan $f'(y_n)$ dinyatakan sebagai kombinasi linear $f'(x_n)$ (kemiringan pada titik x_n) dan $(f(y_n) - f(x_n)/(y_n - x_n)$ (kemiringan garis yang menghubungkan titik x_n dan y_n)

$$f'(y_n) = \alpha f'(x_n) + (1-\alpha)\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

dimana $\alpha \in R$. Penggunaan persamaan ini dengan Metode Newton Ganda akan memberikan metode iterasi baru (**MB-1**) sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{\alpha f'(x_n) + (1-\alpha)\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}} \end{aligned}\right\} \qquad ..... (5)$$

Selanjutnya akan dibuktikan kekonvergenan orde empat yang merupakan bentuk khusus dari iterasi persamaan (5) dalam teorema berikut.

Teorema 1.

Misalkan γ akar dari fungsi $f : D \subset R \to R$ terdiferensialkan pada interval buka D. Jika x_0 cukup dekat dengan γ, orde kekonvergenan dari metode baru **MB-1** adalah 4 jika dan hanya jika $\alpha = -1.$ Persamaan eror untuk metode ini dinyatakan sebagai

$$e_{n+1} = -\frac{\left(c_1 c_3 - c_2^2\right)c_2}{c_1^3} e_n^4 + O(e_n^5)$$

Dalam hal ini, $e_n = x_n - \gamma, \quad c_m = \dfrac{f^m(\gamma)}{m!}$ dengan $m \geq 1$.

Bukti :

Ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ sekitar γ memberikan

$$f(x_n) = c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5) \qquad \text{..... (6)}$$

$$f'(x_n) = c_1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4) \qquad \text{..... (7)}$$

Apabila persamaan (6) dibagi dengan persamaan (7) akan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - \frac{c_2}{c_1} e_n^2 - 2\frac{c_1 c_3 - c_2{}^2}{c_1{}^2} e_n^3 - \frac{3c_4 c_1{}^2 - 7c_1 c_2 c_3 + 4c_2{}^3}{c_1{}^3} e_n^4 + O(e_n^5) \qquad \text{.....(8)}$$

Selanjutnya dengan melakukan ekpansi Taylor dari $f(y_n)$ sekitar x_n dan menggunakan langkah ke-1 dari metode **MB-1** diperoleh

$$f(y_n) = f(x_n) + f'(x_n)\left(-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) + \frac{1}{2} f''(x_n)\left(-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 + \cdots. \qquad \text{..... (9)}$$

Dengan mensubstitusikan tiga persamaan sebelumnya ke persamaan (9) diperoleh

$$f(y_n) = c_2 e_n^2 - 2\frac{c_1 c_3 - c_2{}^2}{c_1} e_n^3 - \frac{3c_4 c_1{}^2 - 7c_1 c_2 c_3 + 4c_2{}^3}{c_1{}^2} e_n^4 + O(e_n^5). \qquad \text{.....(10)}$$

Akhirnya dengan mensubstitusikan persamaan (6), (7) dan (10) pada langkah ke-2 dari metode **MB-1** diperoleh persamaan error yang diinginkan, kekonvergenan orde-4. Sebagai catatatan, metode ini juga dikenal dengan metode Otrowski's [9].

Selanjutnya dengan cara yang sama, metode dengan orde kekonvergenan lebih tinggi (**MB-2**) dapat dikonstruksi sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{-f'(x_n) + 2\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{\Psi(z_n)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.... (11)}$$

dimana $\Psi(z_n)$ didefinisikan sebagai kombinasi linear dari kemiringan dan tiga garis yang meng-hubungkan titik-titik x_n dan y_n, y_n dan z_n, x_n dan z_n

$$\Psi(z_n) = \alpha_1 \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} + \alpha_2 \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n}.$$

Teorema 2.

Misalkan γ akar dari fungsi $f: D \subset R \to R$ terdiferensialkan pada interval buka D. Jika x_0 cukup dekat dengan γ, orde kekonvergenan dari metode baru **MB-2** adalah 7 jika dan hanya jika $\alpha_1 = -1$ dan $\alpha_2 = 1$. Persamaan eror untuk metode ini dinyatakan sebagai

$$e_{n+1} = -\frac{\left(c_1 c_3 - c_2^2\right) c_2^2 c_3}{c_1^5} e_n^7 + \mathrm{O}(e_n^8).$$

Bukti :

Substitusikan persamaan (6), (7), (8) dan (10) ke persamaan (11), dan dengan menggunakan langkah ke-1 dari metode **MB-2** akan diperoleh

$$z_n = \gamma - 2\frac{\left(c_1 c_3 - c_2{}^2\right) c_2}{c_1{}^3} e_n^4 - 2\frac{c_2 c_4 c_1{}^2 + c_1{}^2 c_3{}^2 - 4 c_1 c_3 c_2{}^2 + 2 c_2{}^4}{c_1{}^4} e_n^5 + \mathrm{O}(e_n^6). \qquad .....(12)$$

Selanjutnya untuk mencari bentuk ekspansi Taylor dari $f(z_n)$, lakukan terlebih dahulu ekpansi Taylor $f(x)$ sekitar y_n sebagai berikut

$$f(z_n) = f(y_n) + f'(y_n)(z_n - y_n) + \frac{1}{2} f''(y_n)(z_n - y_n)^2 + \cdots. \qquad .....(13)$$

Dengan menggunakan langkah ke-2 dari metode **MB-2** diperoleh

$$f(z_n) = \frac{\left(c_1 c_3 - c_2{}^2\right) c_2}{c_1{}^2} e_n^4 - 2\frac{c_2 c_4 c_1{}^2 + c_1{}^2 c_3{}^2 - 4 c_1 c_3 c_2{}^2 + 2 c_2{}^4}{c_1{}^3} e_n^5 + \mathrm{O}(e_n^6). \qquad .....(14)$$

Turunan orde tinggi dari $f(x)$ pada y_n diperoleh dari menurunkan persamaan (10) terhadap e_n. Akhirnya persamaan error yang dicari diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (6), (10) dan (14) ke langkah ke-4 dari metode **MB-2** sebagai berikut

$$\begin{aligned} e_{n+1} = {} & \frac{c_2^2\left[\left(-1+\alpha_2\right) c_1 c_3 + \left(1-\alpha_2\right) c_2^2\right] e_n^5}{c_1^4} + \frac{c_2}{c_1^5}\left[2\left(1-\alpha_2\right) c_1^2 c_2 c_4 + 3\left(1-\alpha_2\right) c_1^2 c_3^2\right. \\ & \left. + \left(\alpha_1 - 10 + 12\alpha_2 - \alpha_2^2\right) c_1 c_2^2 c_3 + \left(-7\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_2^2 + 5\right) c_2^4\right] e_n^6 - \frac{1}{c_1^6}\left[3(1-\alpha_2) c_1^3 c_2^2 c_5\right. \\ & + 10(1-\alpha_2) c_1^3 c_2 c_3 + \left(19\alpha_2 - 15 - 2\alpha_2^2 + 2\alpha_1\right) c_1^2 c_2^3) c_4 + 2(1-\alpha_2) c_1^3 c_3^3 \\ & + \left(5\alpha_1 - 30 + 38\alpha_2 - 4\alpha_2^2\right) c_1^2 c_2^2 c_3^2 + \left(-\alpha_2^3 - 15\alpha_1 + 15\alpha_2^2 - 71\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2\right) c_1 c_2^4 c_3 \\ & \left. + \left(2\alpha_1\alpha_2 + 29\alpha_2 + 8\alpha_1 - 9\alpha_2^2 + \alpha_2^3 - 15\right) c_2^6\right] e_2^7 + \mathrm{O}(e_n^8), \end{aligned}$$

Kekonvergenan orde-7 dari metode **MB-2** ini dan berlaku jika dan jika $\alpha_1 = -1$ dan $\alpha_1 = 1$.

Dari hasil yang telah diperoleh, metode yang diberikan oleh persamaan (5) orde kekonvergenan 4 yang diberikan sudah optimal karena evaluasi fungsi yang dilakukan tepat tiga kali pada setiap iterasinya. Akan tetapi metode yang diberikan oleh persamaan (11) belum optimal karena untuk 4 evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, semestinya memberikan orde kekonvergenan 8 akan tetapi dalam hal ini hanya diperoleh 7.

UJI KOMPUTASI

Orde kekonvergenan p metode iterasi didefinisikan sebagai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}=c\neq 0,$$

dan lebih jauh hal ini dapat dilakukan dengan menghitung COC (computational order of convergence) dengan menggunakan pendekatan perhitungan [8,9]

$$\rho\approx\frac{\ln\left|(x_{n+1}-\gamma)/(x_n-\gamma)\right|}{\ln\left|(x_n-\gamma)/(x_{n-1}-\gamma)\right|}.$$

Kriteria pemberhentian iterasi yang digunakan adalah $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ dan $|f(x_n)|<\varepsilon$. Dalam hal ini $\varepsilon=10^{-320}$. Fungsi yang digunakan untuk menguji metode adalah

$$f_1(x)=\frac{1}{3x^4}-x^2-\frac{1}{3x}+1,\quad \gamma=1.0.$$

$$f_2(x)=(x-1)e^{-x},\quad \gamma=1.0$$

$$f_3(x)=e^{-x^2+x+2}-1,\qquad \gamma=-1.0$$

$$f_4(x)=\sin(x)-x/100,\qquad \gamma=0.0$$

Hasil perhitungan (jumlah evaluasi fungsi, COC) untuk fungsi uji di atas disajikan dalam tabel berikut. Singkatan nama metode yang digunakan adalah

- **MN** : Metode Newton [1-9]
- **MNG** : Metode Newton Ganda
- **MJar** : Metode yang dibuktikan oleh Jarrat dkk [1,5].
- **MCH** : Metode yang dibuktikan oleh Chun [4].
- **MB-1** dan **MB-2** : Metode baru yang ditawarkan [6].

Tabel 1. (Jumlah evaluasi fungsi, COC selama iterasi berlangsung) untuk fungsi uji

$f(x)$	x_0	**MN**	**MNG**	**MJar**	**MCH**	**MB-1**	**MB-2**
$f_1(x)$	0.5	22,2	24,4	(18,4)	(20,6)	(18,4)	(18,7)
$f_2(x)$	0,5	(20,2)	(20,4)	(15,4)	(20,6)	(15,4)	(14,7)
$f_3(x)$	0,0	(20,2)	(20,4)	(15,4)	(20,6)	(18,4)	(16,7)
$f_4(x)$	0,9	(14,3)	(16,9)	(15,5)	(36,6)	(15,5)	(14,9)

KESIMPULAN

Metode iterasi yang optimal untuk menyelesaikan persamaan non linear haruslah memiliki jumlah fungsi evaluasi yang paling sedikit. Dalam tabel di atas, metode yang memilik jumlah evaluasi fungsi paling kecil diberi tanda garis bawah. Berdasarkan hasil perhitungan dalam tabel di atas, metode **MB-1** dan **MB-2** yang disajikan dalam makalah ini sama optimalnya atau bahkan lebih optimal dari metode lainnya yang digunakan sebagai pembanding.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Ahmad, F., Hussain, S., Mir, NA., Rafiq, A., *New Sixth Order Jarrat Method for Solving Nonlinear Equations*. Int. Journal of Appl. Math. and Mech. 5(2009), 27-35.

[2]. Argyros, I., Convergence and applications of Newton-type iterations. New York: *Springer Verlag*, 2008.

[3]. Atkinson, K.E. 1989. An Introduction to Numerical Analysis**.** *Wiley*., New York.

[4]. Chun C. *Some improvements of jarrat's methods with sixth order convergences*. Applied Mathathematics and Computation 190(2007), 1432-1437.

[5]. Jarratt, P., *Some Fourth Order Multipoint Iterative Methods for Solving Equations*. Math. Comp. 20 (1966), 434-437.

[6]. Khattri K.S, Argyros I, *How to Develop Fourth and Seventh Order Iterative Methods?*. Novi Sad J. Math.Vol.40, No.2 (2010), 61-67.

[7]. Ostrowski, A.M., Solution of Equations and Systems of Equations. *Academic Press*, New York-London, 1966.

[8]. Traub, J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations. *Prentice Hall*, New York, 1964.

[9]. Weerakoon, S., Fernando, T.G.I., *A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence*. Appl. Math. Lett. 13 (2000), 87-93.