HUBUNGAN SEGITIGA GERGONNE DENGAN SEGITIGA ASALNYA

Sandra Oriza[1*], Mashadi[2], M. Natsir[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*sandraoriza@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses the relationship between Gergonne triangle with its original triangle, namely any triangle that contains the incircle of triangle. The discussion consists of Gergonne triangle area and the length of Gergonne line based on its original triangle side.

Keywords: *Gergonne line, Gergonne triangle, incircle of triangle*.

ABSTRAK

Artikel ini membahas hubungan segitiga Gergonne dengan segitiga asalnya, yaitu segitiga sebarang yang memuat lingkaran dalam segitiga. Pembahasan yang dilakukan meliputi luas segitiga Gergonne dan panjang garis Gergonne berdasarkan panjang sisi segitiga asal.

Kata kunci: *garis Gergonne, lingkaran dalam segitiga, segitiga Gergonne*.

1. PENDAHULUAN

Pada sebuah sebarang segitiga dapat dibentuk lingkaran dalam segitiga [3, h. 150] dan lingkaran luar segitiga [3, h. 141]. Lingkaran dalam segitiga adalah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga dan titik pusat dari lingkaran dalam tersebut adalah *incenter*, sedangkan lingkaran luar segitiga adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut dan titik pusatnya adalah *circumcenter*.

Dalam segitiga terdapat konsep konkuren garis lurus [1, h. 481]. Konkuren adalah perpotongan tiga buah garis lurus di satu titik dan titik perpotongannya ini disebut titik konkurensi. Salah satu contoh kekonkurenan garis yang terdapat dalam segitiga adalah kekonkurenan garis Gergonne yang dimuat dalam teorema Gergonne [2], sedangkan titik konkurensi dari garis Gergonne disebut titik Gergonne [2].

Segitiga yang memiliki lingkaran dalam akan memuat semua titik singgung dari ketiga sisi segitiga tersebut. Dengan menghubungkan ketiga titik singgung tersebut, maka diperoleh sebuah segitiga dalam yang disebut dengan segitiga singgung dalam (*intouch triangle*) [5]. Segitiga singgung dalam juga disebut dengan segitiga Gergonne (*Gergonne triangle*) [5], sehingga luas dari kedua segitiga tersebut adalah sama.

Pembahasan mengenai hubungan segitiga Gergonne dengan segitiga asalnya diperoleh dengan menentukan luas dari segitiga Gergonne dan panjang garis Gergonne. Salazar, J. C [4] telah membahas luas dari segitiga singgung dalam dengan menggunakan koordinat barisentrik. Pada artikel ini, luas dari segitiga Gergonne ditentukan dengan menghitung panjang sisi-sisi segitiga Gergonne berdasarkan aturan kosinus [6]. Dalam menentukan luas segitiga Gergonne dibutuhkan perhitungan luas segitiga asal dengan menggunakan formula Heron [6]. Selanjutnya, panjang garis Gergonne ditentukan berdasarkan panjang sisi-sisi segitiga asal dengan menggunakan aturan kosinus.

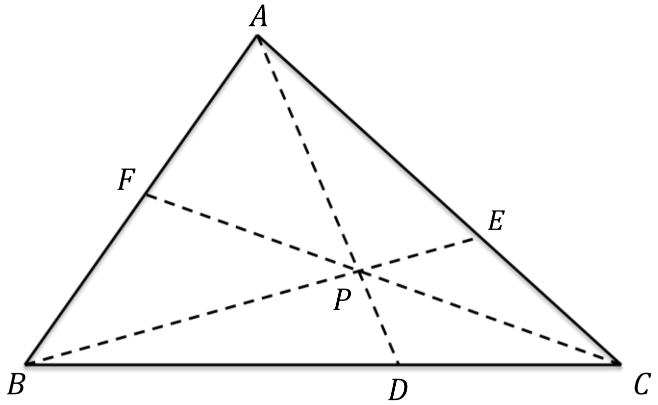
2. TEOREMA GERGONNE DAN SEGITIGA GERGONNE

Pada bagian ini dibahas mengenai kekonkurenan garis Gergonne dan pengertian segitiga Gergonne. Misalkan terdapat sebuah sebarang segitiga ABC (ΔABC) yang disebut dengan segitiga asal, yang mana segitiga tersebut memuat lingkaran dalam, maka terdapat tiga buah titik singgung lingkaran yang menyinggung sisi-sisi segitiga tersebut. Dengan menghubungkan ketiga titik singgung lingkaran dalam ke masing-masing titik sudut ΔABC di hadapannya, maka akan terbentuk tiga buah garis, yaitu garis Gergonne yang berpotongan di satu titik. Titik perpotongan ketiga garis tersebut disebut titik Gergonne [2]. Untuk membuktikan kekonkurenan garis Gergonne, maka digunakan teorema Ceva [3, h. 238].

Teorema 1 (Teorema Ceva) Jika D, E, dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA, dan AB pada ΔABC. Maka garis AD, BE, dan CF adalah konkuren (berpotongan di satu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1. \tag{1}$$

Bukti: ($\Longrightarrow$) Misalkan garis AD, BE, dan CF berpotongan di titik P, maka akan dibuktikan persamaan (1) berlaku.



Gambar 1. Garis AD, BE, dan CF berpotongan di titik P.

Perhatikan ΔACF dan ΔFCB serta ΔAPF dan ΔFPB pada Gambar 1, misalkan $L\Delta ABC$ menyatakan luas segitiga ABC, maka perbandingan AF dengan FB adalah

$$\frac{AF}{FB} = \frac{L\Delta ACF}{L\Delta FCB} = \frac{L\Delta APF}{L\Delta FPB}$$

$$= \frac{L\Delta ACF - L\Delta APF}{L\Delta FCB - L\Delta FPB}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{L\Delta APC}{L\Delta BPC}. \tag{2}$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (2), maka diperoleh perbandingan BD dengan DC dan CE dengan EA, yaitu

$$\frac{BD}{DC} = \frac{L\Delta BPA}{L\Delta APC} \tag{3}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{L\Delta BPC}{L\Delta BPA}. \tag{4}$$

Dengan mengalikan persamaan (2), (3), dan (4) diperoleh

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = \frac{L\Delta APC}{L\Delta BPC}\frac{L\Delta BPA}{L\Delta APC}\frac{L\Delta BPC}{L\Delta BPA} = 1,$$

sehingga persamaan (1) terpenuhi.

($\Leftarrow$) Sebaliknya, jika diketahui persamaan (1), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis AD, BE, dan CF berpotongan di titik P. Misalkan garis BE dan CF berpotongan di titik P. Selanjutnya, buat garis AP dan perpanjang sehingga memotong sisi BC, katakanlah titik potongnya adalah titik D', maka berlaku

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD'}{D'C}\frac{CE}{EA} = 1,$$

sehingga diperoleh

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{FB}{AF}\frac{EA}{CE}. \tag{5}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) dan (4) ke persamaan (5), maka persamaan (5) menjadi

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{L\Delta BPC}{L\Delta APC}\frac{L\Delta BPA}{L\Delta BPC}$$

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{L\Delta BPA}{L\Delta APC}. \tag{6}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke persamaan (6), maka diperoleh

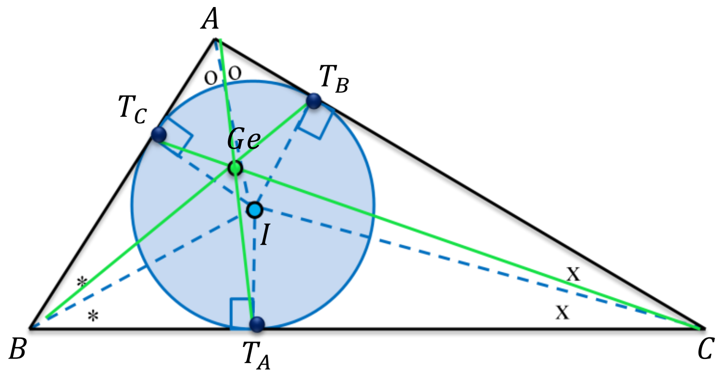
$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}.$$

Oleh karena itu, titik $D' = D$ dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari titik sudut A yang memotong garis BE dan CF tepat di titik P yaitu garis AD. Jadi, garis AD, BE, dan CF berpotongan di titik P. ■

Adapun teorema yang menjelaskan kekonkurenan garis Gergonne tersebut adalah teorema Gergonne [2].

Teorema 2 (Teorema Gergonne) Lingkaran dalam ΔABC menyinggung sisi BC, AC, dan AB pada titik T_A, T_B, dan T_C. Maka garis AT_A, BT_B, dan CT_C adalah konkuren. Titik perpotongan garis-garis tersebut disebut titik Gergonne.

Bukti: Misalkan titik T_A, T_B, dan T_C merupakan titik singgung dari lingkaran dalam ΔABC pada sisi BC, AC, dan AB, maka akan ditunjukkan bahwa garis AT_A, BT_B, dan CT_C berpotongan di titik Gergonne (Ge).



Gambar 2. Garis AT_A, BT_B, dan CT_C konkuren di titik Ge.

Pada Gambar 2, dari konsep kekongruenan antara dua buah segitiga, maka $\Delta AT_BI \cong \Delta AT_CI$, $\Delta BT_AI \cong \Delta BT_CI$, dan $\Delta CT_AI \cong \Delta CT_BI$, sehingga

$$AT_C = AT_B \Longrightarrow \frac{AT_C}{AT_B} = 1 \tag{7}$$

$$BT_A = BT_C \Longrightarrow \frac{BT_A}{BT_C} = 1 \tag{8}$$

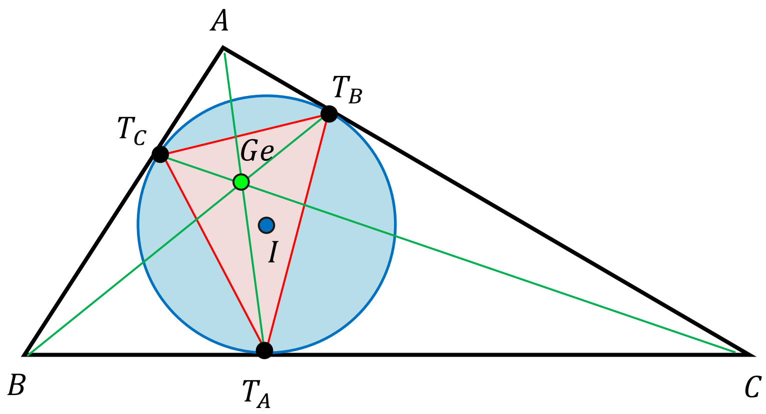
$$CT_B = CT_A \Longrightarrow \frac{CT_B}{CT_A} = 1. \tag{9}$$

Dengan mengalikan persamaan (7), (8), dan (9), maka diperoleh

$$\frac{AT_C}{AT_B}\frac{BT_A}{BT_C}\frac{CT_B}{CT_A} = 1.$$

Berdasarkan Teorema 1, maka garis AT_A, BT_B, dan CT_C berpotongan di satu titik yaitu titik Gergonne (Ge). ■

Pada Gambar 2, dengan menghubungkan titik T_A, T_B, dan T_C, maka diperoleh $\Delta T_A T_B T_C$ yang disebut dengan segitiga Gergonne. Segitiga Gergonne dilambangkan dengan titik-titik sudutnya yang merupakan titik singgung dari lingkaran dalam ΔABC dimana T_A di hadapan $\angle A$, T_B di hadapan $\angle B$, dan T_C di hadapan $\angle C$. Segitiga Gergonne juga dikenal sebagai segitiga singgung dalam. Oleh karena itu, luas segitiga Gergonne akan sama dengan luas segitiga singgung dalam.



Gambar 3. Segitiga Gergonne atau $\Delta T_A T_B T_C$.

3. LUAS SEGITIGA GERGONNE

Pada bagian ini dibahas mengenai luas segitiga Gergonne. Untuk menentukan luas sebuah segitiga diperlukan panjang sisi-sisinya. Panjang sisi segitiga Gergonne telah dinyatakan dalam [5]. Sedangkan pada kertas kerja ini, panjang sisi-sisi segitiga Gergonne ditentukan dengan menggunakan aturan kosinus.

Perhatikan ΔAT_BT_C, ΔBT_AT_C, dan ΔCT_AT_B pada Gambar 3, dari persamaan (7), (8), dan (9) terlihat bahwa ketiga segitiga tersebut adalah segitiga sama kaki. Misalkan panjang sisi BC, CA, dan AB berturut-turut adalah a, b, dan c, serta semiperimeter ΔABC dinyatakan dalam rumus $s = (a + b + c)/2$, maka

$$AT_C = AT_B = s - a$$

$$BT_A = BT_C = s - b$$

$$CT_B = CT_A = s - c.$$

Perhatikan ΔAT_BT_C pada Gambar 3, dengan menggunakan aturan kosinus, maka berlaku

$$T_BT_C{}^2 = AT_B{}^2 + AT_C{}^2 - 2\,AT_B\,AT_C\,\cos A$$

$$T_BT_C{}^2 = (s-a)^2 + (s-a)^2 - 2(s-a)(s-a)\cos A$$

atau dapat ditulis

$$T_BT_C{}^2 = 2(s-a)^2 - 2(s-a)^2\cos A,$$

$$T_BT_C{}^2 = 2(s-a)^2(1-\cos A)$$

$$T_BT_C = 2(s-a)\sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}. \tag{10}$$

Nilai $(1-\cos A)/2$ pada persamaan (10) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos A)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\right)$$

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}, \tag{11}$$

keliling segitiga dinyatakan dengan rumus $a+b+c=2s$, maka

$$a-b+c = 2(s-b) \tag{12}$$

$$a+b-c = 2(s-c). \tag{13}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (12) dan (13) ke persamaan (11), maka diperoleh

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}. \tag{14}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (10), maka persamaan (10) menjadi

$$T_BT_C = 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \tag{15}$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (15), maka panjang sisi T_AT_C yaitu

$$T_AT_C = 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \tag{16}$$

sedangkan panjang sisi T_AT_B adalah

$$T_AT_B = 2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \tag{17}$$

Selanjutnya, untuk menentukan $L\Delta T_A T_B T_C$ digunakan persamaan luas segitiga yang memiliki lingkaran luar, yaitu $L\Delta ABC = abc/4R$ [3, h. 142]. Pada persamaan tersebut, R merupakan jari-jari lingkaran luar ΔABC sedangkan jari-jari lingkaran luar untuk $\Delta T_A T_B T_C$ adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC yang disimbolkan dengan r, maka $L\Delta T_A T_B T_C$ adalah

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{T_B T_C \ T_A T_C \ T_A T_B}{4r}. \tag{18}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (16), (17), dan (18) serta $r = L\Delta ABC/s$ [6] ke persamaan (18), maka persamaan (18) menjadi

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{4} \times \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{L\Delta ABC}. \tag{19}$$

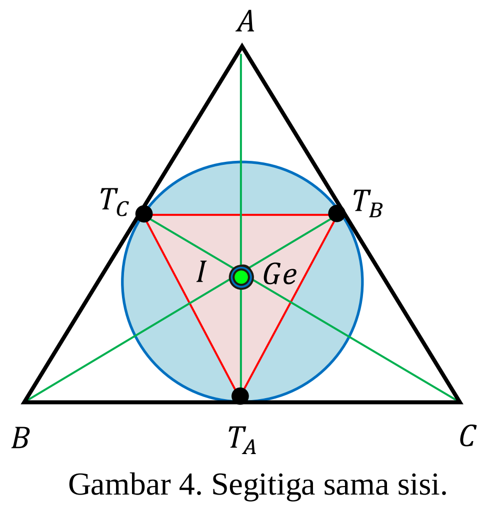
Formula Heron untuk ΔABC adalah $L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, maka $s(s-a)(s-b)(s-c) = L\Delta ABC^2$, sehingga persamaan (19) menjadi

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2\ L\Delta ABC^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\frac{(s-a)(s-c)}{ac}\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{L\Delta ABC},$$

Kemudian luas segitiga Gergonne dinyatakan dengan rumus

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} L\Delta ABC\ . \tag{20}$$

Contoh 1 Sebuah ΔABC sama sisi seperti pada Gambar 4, dengan panjang sisi $AB = BC = AC = 18\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.



Gambar 4. Segitiga sama sisi.

Penyelesaian:
Semiperimeter segitiga dihitung berdasarkan rumus $s = (a + b + c)/2$, maka $s = 27\ cm$. Untuk menghitung $L\Delta ABC$ digunakan rumus Heron, maka diperoleh

$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L\Delta ABC = \sqrt{27(27-18)(27-18)(27-18)}$$

$$L\Delta ABC = \sqrt{19683} = 81\sqrt{3}\ cm^2.$$

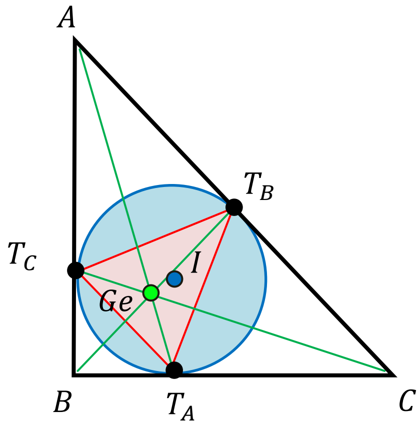
Adapun $L\Delta T_A T_B T_C$ dihitung berdasarkan persamaan (20), maka diperoleh

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} L\Delta ABC$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(27-18)(27-18)(27-18)}{18 \times 18 \times 18} \times 81\sqrt{3}$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{81\sqrt{3}}{4}\ cm^2.$$

Contoh 2 Sebuah ΔABC siku-siku sebarang seperti pada Gambar 5, dengan panjang sisi $AB = 20\ cm$, $BC = 15\ cm$, dan $AC = 25\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.



Gambar 5. Segitiga siku-siku sebarang.

Penyelesaian:
Dengan cara yang sama pada Contoh 1 untuk memperoleh $L\Delta T_A T_B T_C$, maka diperoleh

$$s = 30\ cm$$

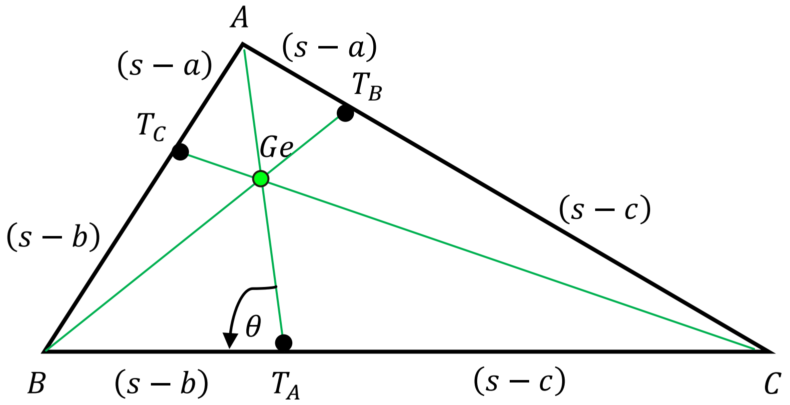
$$L\Delta ABC = 150\ cm^2,$$

sehingga

$$L\Delta T_A T_B T_C = 30\ cm^2.$$

4. PANJANG GARIS GERGONNE

Pada bagian ini dibahas hubungan antara panjang garis Gergonne dengan panjang sisi segitiga asal yaitu ΔABC. Garis Gergonne yang dimaksud adalah ketiga garis yang berpotongan di titik Gergonne yaitu garis AT_A, BT_B, dan CT_C seperti yang terlihat dalam Gambar 6.



Gambar 6. Garis Gergonne.

Perhatikan Gambar 6, misalkan panjang sisi-sisi ΔABC adalah $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$. Dimisalkan juga $m\angle AT_AB = \theta$, dengan menggunakan aturan kosinus untuk ΔAT_AB, maka panjang garis AT_A dijabarkan sebagai

$$\cos\theta = \frac{AT_A^2 + {BT_A}^2 - AB^2}{2AT_A\, BT_A}$$

$$\cos\theta = \frac{AT_A^2 + (s-b)^2 - c^2}{2AT_A(s-b)}. \quad (21)$$

Perhatikan ΔAT_AC, karena $m\angle AT_AC = 180^{\circ} - \theta$ maka $\cos(180^{\circ} - \theta) = -\cos\theta$, dengan menggunakan aturan kosinus maka diperoleh

$$\cos\theta = \frac{b^2 - AT_A^2 - (s-c)^2}{2AT_A(s-c)}. \quad (22)$$

Dari persamaan (21) dan (22) diperoleh

$$AT_A^2 = \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a}. \quad (23)$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (23), maka panjang garis Gergonne yang memotong sisi AC adalah

$$BT_B^2 = \frac{a^2(s-a) + c^2(s-c) - b(s-a)(s-c)}{b}.$$

Adapun garis Gergonne yang memotong sisi AB, yaitu

$$CT_C^2 = \frac{a^2(s-a) + b^2(s-b) - c(s-a)(s-b)}{c}.$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada artikel ini, maka dapat diambil kesimpulan bahwa hubungan segitiga Gergonne dengan segitiga asalnya diperoleh dari perhitungan luas segitiga Gergonne. Segitiga Gergonne memiliki lingkaran luar yang merupakan lingkaran dalam segitiga asal. Oleh karena itu, luas segitiga Gergonne ditentukan dengan menggunakan rumus luas segitiga yang memiliki lingkaran luar. Sedangkan untuk menentukan panjang sisi-sisi segitiga Gergonne digunakan aturan kosinus. Selain itu, hubungan lain yang diperoleh adalah panjang garis Gergonne dapat ditentukan berdasarkan panjang sisi-sisi segitiga asal.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC., Reading.

[2] Hoskins, A & Crystal Martin. Essay 2: Gergonne Point. 4 hal. http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Martin/essays/essay2.html. Diakses pada 12 September 2013.

[3] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

[4] Salazar, J. C. 2004. On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles. *Forum Geometricorum*, **4** (2004): 61-65.

[5] Weisstein, E. W. Contact Triangle. 2 hal. http://mathworld.wolfram.com/ContactTriangle.html. Diakses pada 2 April 2013.

[6] Yiu, P. 1998. Euclidean Geometry. 174 hal. http://ohkawa.cc.it-hiroshima.ac.jp/AoPS.pdf/euclideangeometrynotes-paul.pdf. Diakses pada 29 April 2013.