

KOMBINASI PENAKSIR RASIO DAN PENAKSIR REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI MENGGUNAKAN MEDIAN DAN KOEFSIEN SKEWNESS PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sakinah^{1*}, Rustam Efendi², M. D. H. Gamal²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*sakinah5791@yahoo.co.id

ABSTRACT

In this artikel the combination of ratio estimators and ratio regression in simple random sampling using median and coefficient of skewness are discussed, which is a review and an expansion from the article J. Subramani & G. Kumarapandiyam [American Journal of Mathematics and Statistics, 2(5): 101-107]. The estimators are biased estimators and the mean square errors are determined. Estimator with the smallest mean square error is the most efficient estimator. A numerical example is given at the end of discussion.

Keywords: *simple random sampling, linear combination, median, coefficient of skewness, mean square error*

ABSTRAK

Penaksir yang dibahas merupakan kombinasi penaksir rasio dan penaksir regresi pada sampling acak sederhana menggunakan median dan koefisien skewness, yang merupakan *review* dan pengembangan sebagian dari artikel J. Subramani & G. Kumarapandiyam [American Journal of Mathematics and Statistics, 2(5): 101-107]. Masing-masing penaksir merupakan penaksir bias dan ditentukan *mean square error*. Penaksir dengan *mean square error* terkecil merupakan penaksir yang efisien. Contoh numerik diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: *sampling acak sederhana, kombinasi linier, median, koefisien skewness, mean square error*

1. PENDAHULUAN

Penaksir rasio merupakan salah satu cara metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian penaksir dengan mengambil manfaat hubungan pengamatan y_i dan x_i . Penaksir rasio sederhana untuk rata-rata populasi dinotasikan dengan \bar{Y}_R dan dirumuskan sebagai

$$\bar{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X},$$

dengan \bar{y} dan \bar{x} berturut-turut menyatakan rata-rata sampel dari populasi Y dan X serta \bar{X} menyatakan rata-rata populasi X .

Dari penaksir rasio sederhana, Subramani dan Kumarandiyani [5] memodifikasi menjadi penaksir rasio \hat{Y}_{p1} dan penaksir rasio regresi \hat{Y}_{p2} yang menggunakan median M_d dan koefisien skewness β_1 . Singh dan Tailor [4] mengkombinasikan antara penaksir rasio dan penaksir produk. Berdasarkan ide dari Singh dan Tailor, penulis mengkombinasikan antara penaksir \hat{Y}_{p1} dengan penaksir \hat{Y}_{p2} yang dinotasikan dengan \hat{Y}_{pc} . Penaksir dengan menggunakan metode rasio merupakan penaksir bias, sehingga penaksir yang efisien untuk penaksir bias adalah penaksir yang memiliki *mean square error (MSE)* terkecil [1, h.21].

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Penarikan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi dimana setiap elemen memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai unit sampel. Penarikan sampel ini adalah penarikan sampel acak tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat. Probabilitas terpilihnya anggota n dari N unit populasi sebagai unit sampel pada pengambilan pertama yaitu n/N , probabilitas pada pengambilan kedua yaitu $(n-1)/(N-1)$ sampai probabilitas pada pengambilan ke- n yaitu $1/(N-(n-1))$. Maka probabilitas seluruh n unit-unit tertentu yang terpilih dalam n pengambilan adalah $(1/C_n^N)$ [1].

Untuk menentukan bias dan MSE pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

Teorema 1 [1, h.27] Variansi rata-rata sampel \bar{y} dari sampel acak sederhana adalah

$$Var(\bar{y}) = \frac{(1-f)}{n} S_y^2,$$

dengan $f = n/N$ adalah fraksi penarikan sampel, dan $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N-1)$ adalah variansi y_i pada populasi berkarakter Y .

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [1, h.27].

Teorema 2 [1, h.29] Jika y_i, x_i , adalah sebuah pasangan yang bervariasi dalam unit dalam populasi dan \bar{y}, \bar{x} adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansinya adalah

$$Cov(y, x) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [1, h.29].

3. PENAKSIR REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Bentuk umum model regresi linear sederhana dinyatakan dalam persamaan [3, hal.38]

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i. \quad (1)$$

Dari persamaan (1) maka kekeliruan ke- i ditulis

$$\epsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i,$$

dengan demikian jumlah kuadrat kekeliruan data terhadap garis regresi ditulis

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2. \quad (2)$$

Dengan meminimalkan pada persamaan (2), maka didapat taksiran untuk α dan β berturut-turut yaitu

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad (3)$$

dan

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Apabila variabel x dan y mempunyai hubungan kausal atau hubungan sebab akibat, maka secara geometris persamaan regresi melalui titik pangkal. Dari persamaan (3) diperoleh

$$\bar{y} = b\bar{x}, \quad (4)$$

jika koefisien regresi b berlaku untuk rata-rata sampel, maka b juga berlaku untuk rata-rata populasi. Sehingga

$$\hat{Y} = b\bar{X}. \quad (5)$$

Dari pengurangan persamaan (5) dengan persamaan (4) secara aljabar, diperoleh

$$\hat{Y} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}).$$

\hat{Y} disebut penaksir regresi linier untuk rata-rata populasi yang dinotasikan dengan \hat{Y}_{LR} sehingga

$$\hat{Y}_{LR} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}).$$

4. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI

Penaksir rasio dan penaksir regresi untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana yang menggunakan median (M_d) dan koefisien skewness (β_1) adalah

$$\hat{Y}_{p1} = \bar{y} \left[\frac{\bar{X}\beta_1 + M_d}{\bar{x}\beta_1 + M_d} \right], \quad (6)$$

dengan $M_d = X_{k+1}$ dan $\beta_1 = \frac{N \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^3}{(N-1)(N-2)S^3}$.

$$\hat{Y}_{p2} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}\beta_1 + M_d} (\bar{X}\beta_1 + M_d) \quad (7)$$

dengan b menyatakan koefisien regresi regresi Y atas X . Kemudian kombinasi persamaan (6) dan persamaan (7) dirumuskan sebagai

$$\hat{Y}_{pc} = \alpha \left[\bar{y} \left[\frac{\bar{X}\beta_1 + M_d}{\bar{x}\beta_1 + M_d} \right] \right] + (1 - \alpha) \left[\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}\beta_1 + M_d} (\bar{X}\beta_1 + M_d) \right], \quad (8)$$

dengan $0 < \alpha < 1$.

Bias dan MSE penaksir rasio dan penaksir regresi untuk rata-rata populasi menggunakan median dan koefisien skewness pada sampling acak sederhana.

Bias dan MSE dari persamaan (6) adalah

$$B(\hat{Y}_{p1}) = \frac{1-f}{n} \bar{Y} (\theta_{p1}^2 C_x^2 - \theta_{p1} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{Y}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 + \theta_{p1}^2 C_x^2 - 2\theta_{p1} \rho C_y C_x) \quad (9)$$

dengan $\theta_{p1} = \frac{\bar{X}\beta_1}{\bar{X}\beta_1 + M_d}$, $C_x = \frac{S_x}{\bar{X}}$, $C_y = \frac{S_y}{\bar{Y}}$ dan $\rho = \frac{S_{yx}}{S_y S_x}$.

Bias dan MSE dari persamaan (7) adalah

$$B(\hat{Y}_{p2}) = \frac{1-f}{n} \frac{S_x^2}{\bar{Y}} R_{p2}^2$$

$$MSE(\hat{Y}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{p2}^2 S_x^2 + S_y^2 (1 - \rho^2)) \quad (10)$$

dengan $R_{p2} = \frac{\bar{Y}\beta_1}{\bar{X}\beta_1 + M_d}$.

Bias dan MSE dari persamaan (8) adalah

$$B(\hat{Y}_{pc}) = \frac{1-f}{n} \rho S_x C_y R_{p2} \alpha.$$

$$MSE(\hat{Y}_{pc}) \approx \frac{1-f}{n} (R_{p2}^2 S_x^2 - \rho^2 S_y^2 + \alpha^2 \rho^2 S_y^2 - 2\alpha R_{p2} S_{xy} + S_y^2) \quad (11)$$

5. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir yang bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari masing-masing penaksir tersebut.

1. Perbandingan antara persamaan (11) dengan persamaan (9) diperoleh $MSE(\bar{Y}_{pc}) < MSE\bar{Y}_{p2}$ jika

$$\frac{R_{p2}\rho S_x S_y - \sqrt{Q_1}}{\rho^2 S_y^2} < \alpha < \frac{R_{p2}\rho S_x S_y + \sqrt{Q_1}}{\rho^2 S_y^2} \quad (12)$$

dengan $Q_1 = (R_{p2}\rho S_x S_y)^2 - (\rho^2 S_y^2)(R_{p2}^2 S_x^2 - \rho^2 S_y^2 - \bar{Y}^2 \theta_{p1}^2 C_x^2 - 2\bar{Y}^2 \theta_{p1} \rho C_x C_y)$.

2. Perbandingan antara persamaan (11) dengan persamaan (10) diperoleh $MSE\bar{Y}_{pc} < MSE\bar{Y}_{p1}$ jika

$$\alpha < \frac{2R_{p2}S_x}{\rho S_y}. \quad (13)$$

3. Perbandingan antara persamaan (10) dengan persamaan (9) diperoleh $MSE\bar{Y}_{p2} < MSE\bar{Y}_{p1}$ jika

$$B > \frac{2R_{p2}S_x^2}{S_y^2}. \quad (14)$$

6. CONTOH

Sebagai contoh pembahasan, digunakan data [2] tentang konsumsi (Y) dan pendapatan (X) karyawan PT. Perkebunan Sawit Nusantara V Pekanbaru tahun 2006 .

Tabel 1: Data Pendapatan dan Pengeluaran(Konsumsi) 58 Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru Tahun 2006 dalam Rupiah

No.	Nama	Pendapatan	Pengeluaran (Konsumsi)
1	Suradi	1.000.000	800.000
2	Erwin Syahputra	1.000.000	900.000
3	Legiman	1.800.000	1.500.000
4	Iman	1.400.000	1.300.000
5	A. Khalidi	1.200.000	1.100.000
6	Candra	1.300.000	1.100.000
7	Arifin	1.400.000	1.200.000
8	Adi Sasono	1.500.000	1.400.000
9	Nirwan	1.600.000	1.300.000
10	Fadly	1.800.000	1.400.000
11	Rudy Ismanto	1.900.000	1.800.000
12	Heri Darma	2.000.000	1.500.000

No.	Nama	Pendapatan	Pengeluaran(Konsumsi)
13	Ridwan	2.000.000	1.700.000
14	Iwan	2.100.000	1.800.000
15	Edi Agus	2.100.000	2.000.000
16	Kelber	2.200.000	2.000.000
17	Rizaldy	2.200.000	2.000.000
18	Sriyadi	2.300.000	2.000.000
19	Yohanes	2.300.000	2.100.000
20	Charles Purba	2.400.000	2.300.000
21	Ariyanto	2.400.000	2.000.000
22	Sugiarto	2.500.000	2.300.000
23	J. Hutajulu	2.600.000	2.500.000
24	Bambang	2.800.000	2.700.000
25	Laura Muslim	2.800.000	2.400.000
26	Heriawan	2.900.000	2.600.000
27	Drajat	3.000.000	2.500.000
28	Suprpto	3.200.000	2.800.000
29	Donny	3.400.000	3.000.000
30	N. Gultom	3.300.000	3.100.000
31	Tazul Arifin	3.400.000	3.000.000
32	Sudirman	3.700.000	3.000.000
33	Fetnando	3.500.000	3.400.000
34	F. Butar-butur	3.500.000	3.300.000
35	R. Sianturi	3.600.000	3.500.000
36	E. Tarigan	3.700.000	3.400.000
37	Edy Suprianto	4.200.000	3.400.000
38	Bayu Lesmana	4.100.000	3.700.000
39	Krisna Setiawan	4.700.000	4.200.000
40	L. M. Silaban	4.900.000	3.800.000
41	Sukirman	5.200.000	4.700.000
42	Zulkiffi	5.300.000	4.800.000
43	R. Lubis	5.500.000	5.300.000
44	Hery Agusman	5.800.000	5.000.000
45	Adi Hurainah	5.600.000	5.400.000
46	Tuhu Bangun	5.700.000	5.500.000
47	Pandapotan P	5.800.000	5.700.000
48	Ali Azhar	6.100.000	5.600.000
49	Abu Bakar N	6.000.000	5.700.000
50	MT. Sagala	6.700.000	6.400.000
51	Rafaldi	7.100.000	6.900.000
52	Jati Teguh	6.300.000	6.000.000
53	B. Maniruk	6.000.000	5.900.000
54	Kasmaliza	7.700.000	7.100.000
55	Sardoltua Girsang	7.000.000	6.600.000
56	Syahrial Nasution	7.500.000	7.000.000
57	BT. Napitupulu	8.000.000	7.500.000
58	Romadka Purba	8.000.000	7.200.000
	Jumlah	200.100.000	219.000.000

Sumber [2].

Dalam mengaplikasikan contoh dalam perbandingan MSE dari penaksir (6), (7) dan (8), maka pada Tabel 1 dengan bantuan Microsoft Excel diperoleh nilai-nilai sebagai berikut

$$\begin{array}{llll}
 N = 58, & \bar{Y} = 34.5, & S_y = 19.461387, & S_{xy} = 392.8596, \\
 n = 29, & \bar{X} = 37.758, & S_x = 20.28854, & \rho = 0.99497, \\
 S_y^2 = 387.7456, & S_x^2 = 411.6249, & \theta_{p1} = 0.38857, & C_y = 0.56409, \\
 \beta_1 = 0.5638, & M_d = 33.5, & R_{p2} = 0,35504, & C_x = 0.53732, \\
 \beta = 0.95441. & & &
 \end{array}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh dari konsumsi dan pendapatan karyawan kepersamaan , dan maka diperoleh

- (i) $MSE(\hat{Y}_{pc}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$, jika $0 < \alpha < 1$.
- (ii) $MSE(\hat{Y}_{pc}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$, jika $\alpha < 0.7440$.
- (iii) $MSE(\hat{Y}_{p2}) < MSE(\hat{Y}_{p1})$, jika $0.95441 > 0.74026$.

Selanjutnya menentukan penaksir yang lebih efisien juga dapat dilihat dari nilai MSE masing-masing penaksir diberikan pada tabel berikut

Tabel 2: Nilai MSE dari Masing-masing Penaksir

No	Penaksir	MSE
1	\hat{Y}_{p1}	596686, 92
2	\hat{Y}_{p2}	96004, 95
3	\hat{Y}_{pc}	3320, 32

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa MSE penaksir \hat{Y}_{pc} merupakan MSE paling minimum, sehingga penaksir \hat{Y}_{pc} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p1} dan penaksir \hat{Y}_{p2} .

7. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai MSE dari masing-masing penaksir rasio untuk rata-rata populasi yang diajukan pada sampling acak sederhana. Kemudian membandingkan MSE dari masing-masing penaksir, sehingga dapat disimpulkan bahwa kombinasi penaksir rasio dan penaksir regresi \hat{Y}_{pc} dengan menggunakan median dan koefisien skewness lebih efisien dibandingkan dengan penaksir \bar{Y}_{p1} dan penaksir \bar{Y}_{p2} jika syarat lebih efisien terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1977. *Teknik Penarikan Sampel, 3rd Ed.* Terjemahan dari *Sampling Techniques*, oleh Radiansyah & E.R Osman. Universitas Indonesia, Jakarta.
- [2] Sinaga, C. V. D. N. 2007. Pola Konsumsi Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V (PTPN V) Pekanbaru. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [3] Sembiring, R. K. 2003. *Analisis Regresi*. Second Edition. ITB, Bandung
- [4] Singh, H. P. & R. Tailor. 2005. Estimation of Finite Population Mean with Known Coefficient of Variation of an Auxiliary Character. *Statistica, anno LXV, n.3: 301-313*.
- [5] Subramani, J. & Kumarapandiyam, G. 2012. Estimation of Population Mean Using Known Median and Co-Efficient of Skewness , *American Journal of Matematics and Statistics, 2(5): 101-107*.