INVERS MATRIKS SIRKULASI REGULAR MELALUI TEOREMA ADJOIN

Frans Palentino N[1*], Rolan Pane[2], Musraini M[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*frans.palentino@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses how to get an inverse of a regular circulant matrix of order *n*, whose elements are in the form of an arithmetic sequence. The process begins with calculating the determinant and adjoint of the regular circulation matrix. Then, the results are applied into the adjoint theorem, so that the simple formula for the invers is obtained.

Keywords: *adjoint, arithmetic sequence, determinant, inverse, regular circulant matrix*.

ABSTRAK

Di dalam makalah ini didiskusikan suatu cara untuk mendapatkan invers dari suatu matriks sirkulasi regular berorde *n* yang elemen-elemennya berbentuk suku-suku barisan aritmatika. Prosesnya dimulai dengan menghitung adjoin dan determinan dari matriks sirkulasi regular. Kemudian hasil perhitungan diterapkan ke teorema adjoin, sehingga diperoleh suatu invers dengan formula yang sederhana.

Kata kunci: *adjoin, barisan aritmatika, determinan, invers, matriks sirkulasi regular*.

1. PENDAHULUAN

Di dalam aljabar linear invers suatu matriks merupakan hal yang sering dibicarakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, yang sudah dinyatakan dalam bentuk matrik. Bila sistem ini dibentuk oleh n buah persamaan dengan n variabel bebas, maka matrik yang terbentuk adalah berukuran $n \times n$. Salah satu bentuk matrik yang dihasilkan adalah matriks sirkulasi yaitu suatu matrik yang setiap barisnya memiliki elemen yang sama, tetapi posisi elemen setiap barisnya mempunyai aturan tertentu. Matrik sirkulasi yang sering ditemui dalam aplikasi adalah matrik sirkulasi regular, matrik regular simetris dan matrik simetris.

Pada makalah ini didiskusilkan suatu cara untuk mendapatkan invers matriks sirkulasi regular yang berbentuk

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

dengan elemen-elemennya berbentuk barisan aritmatika, yaitu $C_{a,r} = (c_{ij})$ dengan $c_{ij} = a + (j - i \bmod n)r$, a dan r bilangan real [2], dengan teorema adjoin. Pembahasan ini review tulisan Bahsi, M dan Solak, S yang berjudul "*On the Circulant Matrices with Arithmetic Sequence* [2]".

2. DETERMINAN, ADJOIN, INVERS MATRIKS DAN BARISAN ARITMATIKA

Determinan matriks adalah bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi elemen matriks bujur sangkar.

Definisi 1 [1, h.63] Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah $\det(A)$ dinamakan determinan A. Selanjutnya dinotasikan $\det(A) = |A|$.

Definisi 2 [1, h.77] Jika A adalah matriks kuadrat, maka minor elemen a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh K_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Selanjutnya matriks berukuran $n \times n$ dapat ditentukan determinannya dengan kofaktor .

Teorema 3 [1, h.79] Determinan matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam satu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan yakni, untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{2}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-i).

Teorema 4 [1, h.73] Misalkan A, A', A'' adalah matriks $n \times n$ yang berbeda dalam baris tunggal, katakanlah baris ke r, dan anggaplah bahwa baris ke r dari A'' dapat diperoleh dengan menambahakan entri-entri yang bersesuaian dalam baris ke r dari A dan dalam baris ke r dari A', Maka

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A').$$

Teorema 5 [1, h.71] Jika A adalah sebarang matriks kuadrat, maka

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Teorema 6 [1, h.67] Misalkan A adalah sebarang matriks $n \times n$

i. jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal A dikalikan oleh konstata k maka $\det(A') = k\ \det(A)$.
ii. jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris A dipertukarkan, maka $\det(A') = -\det(A)$.

iii. jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan satu baris A ditambahkan pada baris lain, maka $\det(A') = \det(A)$.

Teorema 7 [4, h.85] Misalkan A suatu matriks $n \times n$.

(i) Jika A memiliki baris atau kolom yang semua elemennya adalah nol, maka
$$\det(A) = 0$$

(ii) Jika A memiliki dua baris yang identik atau dua kolom yang identik, maka
$$\det(A) = 0.$$

Selanjutnya diberikan definisi adjoin dan invers matriks.

Definisi 8 [1, h.81] Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij} maka matriks $\left(C_{ij}\right)$, disebut matriks kofaktor A dengan $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Transpose matriks ini dinamakan adjoin A dan dapat dinyatakan dengan $adj(A)$.

Definisi 9 [1, h.34] Jika A adalah matriks kuadrat, dan jika dapat dicari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible)* dan B dinamakan invers(*inverse*) dari A.

Teorema 10 [1, h.74] Sebuah matriks A kuadrat dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Teorema 11 [1, h.82] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \tag{3}$$

3. INVERS MATRIKS SIRKULASI REGULAR

Matriks sirkulasi regular adalah matriks berukuran $n \times n$ dan setiap barisnya mempunyai elemen yang sama, tetapi posisi elemen setiap baris ditentukan oleh aturan yang sama, hal ini didefinisikan sebagai berikut

Definisi 12 [3, h.234] Misalkan C adalah matriks $n \times n$ dengan elemen c_{ij}, matriks dikatakan sebagai matriks sirkulasi regular jika dan hanya jika $(j-i)|n = (q-p)|n$ sehingga $c_{ij} = c_{pq}$.

Didalam [2] didefinisikan elemen matriks sirkulasi C adalah suku-suku barisan aritmatika, sehingga diperoleh elemen $C = \left(c_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ dimana $c_{ij} = a + (j - i \bmod n)r$ dengan a suku awal, r selisih antar suku, dan n banyaknya suku barisan aritmatika.

Selanjutnya matriks sirkulasi ditulis
$$C_{a,r} = \begin{bmatrix} a & a+r & a+2r & a+3r & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ a+(n-1)r & a & a+r & a+2r & \cdots & a+(n-4)r & a+(n-3)r & a+(n-2)r \\ a+(n-2)r & a+(n-1)r & a & a+r & \cdots & a+(n-5)r & a+(n-4)r & a+(n-3)r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+2r & a+3r & a+4r & a+5r & \cdots & a+(n-1)r & a & a+r \\ a+r & a+2r & a+3r & a+4r & \cdots & a+(n-2)r & a+(n-1)r & a \end{bmatrix} \tag{4}$$

Secara singkat persamaan (4) dapat ditulis menjadi

$$C_{a,r} = cir\left(a, a+r, a+2r, \cdots, a+(n-1)r\right)$$

Teorema 13 [2] Jika $C_{a,r}$ adalah matriks sirkulasi regular $n \times n$, maka determinannya

$$\left|C_{a,r}\right| = (-1)^{n-1} n^{n-1} r^{n-1}\left[a + \frac{n-1}{2} r\right]. \tag{5}$$

Bukti

Dengan menggunakan sifat-sifat determinan untuk matriks untuk matriks $C_{a,r}$ pada persamaan (4) diperoleh

$$\left|C_{a,r}\right| = \begin{vmatrix} a & a & a+2r & a+3r & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ (n-1)r & -r & -r & -r & \cdots & -r & -r & -r \\ (n-2)r & (n-2)r & -2r & -2r & \cdots & -2r & -2r & -2r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3r & 3r & 3r & 3r & \cdots & (3-n)r & (3-n)r & (3-n)r \\ 2r & 2r & 2r & 2r & \cdots & 2r & (2-n)r & (2-n)r \\ r & r & r & r & \cdots & r & r & (1-n)r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & r & 2r & 3r & \cdots & (n-3)r & (n-2)r & (n-1)r \\ r & -nr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & -nr & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & -nr & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nr & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -nr \end{vmatrix}, \tag{6}$$

Dengan menggunakan persamaan (2) maka determinan dari persamaan (6) adalah

$$\begin{aligned} \left|C_{a,r}\right| &= a(-nr)^{n-1} - r^2(-nr)^{n-2} - 2r^2(-nr)^{n-2} - \cdots - (n-1)r^2(-nr)^{n-2} \\ &= (-nr)^{n-2}\left[-\left(anr + r^2 + 2r^2 + 3r^2 + \cdots + (n-1)r^2\right)\right] \\ &= (-1)^{n-1}(nr)^{n-2}\left[anr + \frac{n(n-1)}{2} r^2\right] \\ \left|C_{a,r}\right| &= (-1)^{n-1} n^{n-1} r^{n-1}\left[a + \frac{(n-1)}{2} r\right] \end{aligned}$$

■

Teorema 14 [2] Jika $C_{a,r}$ adalah matriks sirkulasi regular $n \times n$ dengan elemen-elemennya adalah suku-suku sebuah barisan aritmatika maka rumus adjoin matriks sirkulasi regular $n \times n$ adalah

$$adj\left(C_{a,r}\right) = (-1)^n cir\begin{pmatrix} n^{n-2}r^{n-2}a + n^{n-3}r^{n-1}\dfrac{n^2-n-2}{2}, -n^{n-2}r^{n-2}a - n^{n-3}r^{n-1}\dfrac{n^2-n+2}{2}, -n^{n-3}r^{n-1}, \\ \cdots, -n^{n-3}r^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Bukti

Karena adjoin matriks sirkulasi regular juga sirkulasi regular, maka dapat dihitung kofaktor dari elemen kolom pertama dari matriks $C_{a,r}$, sehigga ditemukan elemen baris pertama dari matriks $Adj(C_{a,r})$. Selanjutnya diperoleh kofaktor elemen $c_{j1}\ (j=1,2,\dots,n)$ dari matriks $C_{a,r}$ diperoleh

$$(-)^n\left(n^{n-2}r^{n-2}a+n^{n-3}r^{n-1}\frac{n^2-n-2}{2}\right),\ (-1)^n\left(-n^{n-2}r^{n-2}a-n^{n-3}r^{n-1}\frac{n^2-n+2}{2}\right),$$
$$(-1)^n\left(-n^{n-3}r^{n-1}\right),\ (-1)^n\left(-n^{n-3}r^{n-1}\right),\dots,\ (-1)^n\left(-n^{n-3}r^{n-1}\right). \tag{8}$$

Karena (8) adalah elemen baris pertama dari kofaktor matriks $C_{a,r}$ yg di transposkan Sehingga diperoleh persamaan (7)

Teorema 15 [2] Invers matriks sirkulasi regular $n\times n$

$$C^{-1}_{\mathrm{a,r}}=\frac{1}{n^2\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)}cir\left(-\frac{na+\frac{n^2-n-2}{2}r}{r}\ \frac{na+\frac{n^2-n+2}{2}r}{r},1,1,\cdots,1\right). \tag{9}$$

Bukti

Berdasarkan persamaan (3) maka

$$C^{-1}_{a,r}=\frac{Adj(C_{a,r})}{\det(C_{a,r})}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (5) dan persamaan (7) diperoleh (9).

Dari persamaan (9), terlihat bahwa rumus invers matriks sirkulasi regular yang diperoleh adalah sederhana untuk diterapkan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linier Elementer*, *Edisi Kelima*. Terj. dari *Elementary Linear Algebra, Fifth Edition,* oleh Silaban, P & Susila, I.N. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Bahsi, M. & Solak, S. 2010. On The Circulant Matrices With Arithmetic Sequence. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5 (25): 1213-1222.

[3] Graybill, F.A. 1969. *Matrices With Applications in Statistics*, Second Edition. The Wadsworth, Belmont.

[4] Leon, S. J. 2001. *Aljabar linear dan Aplikasinya*, *Edisi Kelima*. Terj. dari *Linear Algebra with Applications*, *Fifth Edition*, oleh Bondan A. Penerbit Erlangga, Jakarta.