BAB 2
MODEL MATEMATIKA PERSOALAN PEMOTONGAN STOK

2.1 Model Khusus

Pandang kembali contoh persoalan sebelumnya. Semua pola pemotongan yang mungkin disenaraikan pada Tabel 2 (sisa pemotongan harus lebih kecil dari 1,5m).

Tabel 2. Pola pemotongan

Pola (j)	Jumlah Panjang 1,5m (batang)	Jumlah Panjang 2m (batang)	Jumlah Panjang 3m (batang)	Sisa (meter)
1	4	0	0	1
2	3	1	0	0,5
3	2	2	0	0
4	2	0	1	1
5	1	1	1	0,5
6	0	3	0	1
7	0	2	1	0
8	0	0	2	1

Definisikan

$$x_j = \text{Jumlah panjang standar 7m yang dipotong menurut pola } j\text{ ; } j = 1, 2, \ldots, 8,$$

dan rumuskan persoalan Program Linear sebagai berikut:

Sisa pemotongan + total permintaan pelanggan= total panjang kayu yang dipotong

Total permintaan pelangan (m) $= 25\ (1{,}5) + 20(2) + 15(3) = 122{,}5$

Total panjang kayu yang dipotong (m) $= 7(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$

Sisa pemotongan (m) $= 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 7x_5 + 7x_6 + 7x_7 + 7x_8 - 122{,}5$

Maka fungsi tujuan persoalan ini adalah meminimumkan

$$z = 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 7x_5 + 7x_6 + 7x_7 + 7x_8 - 122{,}5$$

Tanpa mempengaruhi optimisasi, fungsi tujuan di atas dapat ditulis sebagai

$$\text{minimumkan } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

Ini berarti bahwa sisa pemotongan bisa diminimumkan dengan cara meminimumkan jumlah panjang standar 7m yang dipotong.

Selanjutnya terdapat tiga kendala (*constraint*) sebagai berikut:

Kendala 1 paling sedikit 25 batang panjang 1,5m harus dihasilkan.

Kendala 2 paling sedikit 20 batang panjang 2m harus dihasilkan.

Kendala 3 paling sedikit 15 batang panjang 3m harus dihasilkan.

Karena jumlah total panjang 1,5m yang dipotong diberikan oleh $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5$, maka

Kendala 1 menjadi $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25$.

Dengan cara yang sama,

Kendala 2 menjadi $x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 + 2x_7 \geq 20$ dan

Kendala 3 menjadi $x_4 + x_5 + x_7 + 2x_8 \geq 15$.

Jadi, model program linear dari persoalan pemotongan stok untuk persoalan khusus di atas adalah

$$
\begin{aligned}
&\text{minimumkan (min) } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\
&\text{kendala } 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \\
&\qquad x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 + 2x_7 \geq 20 \\
&\qquad x_4 + x_5 + x_7 + 2x_8 \geq 15 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \text{ dan integer}
\end{aligned}
$$

2.2 Model Umum

Misalkan

L = panjang standar,

n = banyaknya pola pemotongan yang mungkin.

x_j = banyak panjang standar yang dipotong menurut pola j,

a_{ij} = banyak potongan untuk panjang l_i dengan pola j,

b_i = banyaknya pesanan untuk panjang l_i; $l_i \leq L$,

maka bentuk umum persoalan pemotongan stok dalam upaya meminimumkan sisa pemotongan adalah

$$
\begin{aligned}
&\min \ z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\text{kendala } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, m \\
&\qquad x_{ij} \geq 0 \text{ dan integer}, \ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

2.3 Teori Program Linear

Ada dua faktor yang menyebabkan rumusan persoalan pemotongan stok ini tidak praktis (Gilmore dan Gomory, 1961). Pertama, banyaknya n pola pemotongan bisa berukuran sangat besar jika banyaknya m pesanan berukuran besar. Kedua, pembatasan terhadap bilangan bulat (*integer*). Pada laporan ini dibahas teknik untuk mengatasi faktor yang pertama, banyaknya n

pola pemotongan berukuran besar, dengan mengabaikan syarat pembatas bilangan bulat. Kemudian solusi yang diperoleh, dibulatkan ke atas kebilangan bulat terdekat.

Gamal dan Zaiful Bahri (2003) melakukan pendekatan program linear untuk menyelesaikan persoalan pemotongan stok pola pemotongan satu dimensi. Pola pemotongan dibangkitkan dengan menggunakan teknik pembangkit kolom dengan bantuan komputasi *LINDO.* Gamal, Senni, dan Nababan (2004) menyelesaikan persoalan pemotongan stok dari beberapa panjang standar dengan mengadopsi teknik yang digunakan oleh Dyckhoff (1982) dan meyelesaikannya dengan paket *LINDO student's version.*

Pandang kembali model umum persoalan pemotongan stok. Model itu dapat ditulis dalam bentuk umum persoalan program linear sebagai:

$$\min \; z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \text{ dan integer}, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

dengan $c_j = 1$ untuk setiap j. Dalam bentuk matriks persoalan ini dapat ditulis

$$\begin{aligned} &\min \; z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ &\text{kendala } \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ dan integer} \end{aligned}$$

dengan c adalah vektor baris berdimensi n, $\mathbf{x}$ adalah vektor kolom berdimensi n, $\mathbf{b}$ vektor kolom berdimensi m, dan $\mathbf{A}$ matriks berordo $m \times n$. Dalam bentuk standar, bentuk terakhir ditulis sebagai

$$\begin{aligned} &\min \; z = \mathbf{c_B}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}\mathbf{x_N} \\ &\text{kendala } \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad \mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0} \text{ dan integer.} \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{x_B}$ adalah variabel basis, $\mathbf{x_N}$ variabel tak basis, dan $\mathbf{B}$ dan $\mathbf{N}$ berturut-turut adalah kolom matriks yang berkaitan dengan variabel $\mathbf{x_B}$ dan $\mathbf{x_N}$.

Pada sebarang iterasi metode simplex, misalkan basis yang terkait didefinisikan oleh

$$\mathbf{B} = (\, \mathbf{P}_1, \ldots \mathbf{P}_i, \ldots \mathbf{P}_m \,)$$

dengan $\mathbf{P}_i$ vektor kolom berdimensi m, i = 1, 2, . . . , m. Misalkan $\mathbf{c_B} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ koefisien fungsi tujuan yang berkaitan dengan $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . $\mathbf{P}_m$. Pola pemotongan j memberikan harapan untuk perbaikan solusi program linear jika nilai penciutannya (*reduced cost*) (Taha, 1975 dan Taha, 1982)

$$z_j - c_j = \mathbf{c_B B^{-1} P}_j - c_j$$

yang berkorespondensi bernilai positif (persoalan minimisasi), dengan

$$\mathbf{P}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$$

adalah vektor yang menunjukkan banyaknya potongan dengan panjang l_i , i = 1, 2, . . ., m, yang dihasilkan dari pola pemotongan j.

Sampai disini elemen $\mathbf{P}_j$ tidak diketahui; yaitu, pola pemotongan yang baru belum diketahui. Dari teori program linear, pola yang paling memberikan harapan adalah pola yang memberikan nilai $z_j - c_j$ terbesar diantara semua pola (tak basis) yang mungkin. Tetapi pada persoalan pemotongan stok berkala besar, yang melibatkan banyak variabel, menghitung nilai $z_j - c_j$ untuk semua variabel tak basis merupakan pekerjaan yang membosankan. Disinilah diperlukan teknik pembangkit kolom (*column generation technique*). Pada persoalan pemotongan stok, setiap kolom atau variabel menunjukkan sebuah pola pemotongan sebatang panjang standar L. Pada contoh persoalan sebelumnya, sebuah variabel dinyatakan oleh y_1, y_2 dan y_3 dengan y_i adalah jumlah potongan berturut-turut dengan panjang 1,5m , 2m , dan 3m yang dihasilkan dari pemotongan panjang standar 7 meter. Sebagai contoh, x_5 dinyatakan oleh y_1 = 1, y_2 = 1 dan y_3 = 1, yaitu stok standar dipotong menjadi 1 batang panjang 1,5m, 1 batang panjang 2m dan 1 batang panjang 3m dengan sisa 0,5m. Jadi teknik pembangkit kolom adalah suatu teknik untuk memperoleh kolom yang dapat memberikan nilai $z_j - c_j$ terbaik (positif pada persoalan minimisasi). Ini ekivalen dengan menyelesaikan subpersoalan

$$\text{maks} \quad w = \sum_{i=1}^{m} d_i\, y_i - 1$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{i=1}^{m} l_i y_i \le L$$

$$y_i \ge 0 \text{ dan integer.}$$

karena $c_j = 1$ untuk semua j dengan koefisien d_i elemen ke i dari $\mathbf{c_B B^{-1}}$. Subpersoalan ini dinamakan persoalan *knapsack*; yaitu, persoalan program linear dengan sebuah kendala. Nilai d_i disebut juga nilai dual (*dual prices*) (Taha, 1975 dan Taha, 1982). Tanpa meubah optimisasi, subpersoalan *knapsack* di atas untuk menghasil pola pemotongan yang baik dapat ditulis sebagai

$$\text{maks} \quad w = \sum_{i=1}^{m} d_i\, y_i$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{i=1}^{m} l_i y_i \le L$$

$$y_i \geq 0 \text{ dan integer.}$$

Pada bab berikutnya akan ditunjukkan pemakaian metode pembangkit kolom ini melalui sebuah contoh.