# 9

# PROGRAM INTEGER

Program integer adalah program linear dengan sebagian atau semua variabelnya merupakan bilangan bulat atau integer yang tidak negatif. Pada dunia nyata banyak ditemukan masalah yang harus diformulasikan sebagai program integer, yaitu masalah yang memiliki variabel satuan yang tidak bisa dinyatakan dalam bentuk pecahan. Sebagai contoh, suatu masalah dengan variabel jumlah sepeda motor yang akan diproduksi, tidak bisa dikatakan memproduksi $42\frac{1}{3}$ sepeda motor. Nanti akan terlihat bahwa menyelesaikan program integer lebih sulit daripada menyelesaikan program linear. Pada bab ini dibahas metode cabang-dan-batas untuk menyelesaikannya.

## 9.1 Tinjauan Secara Grafik

Perhatikan program integer berikut:

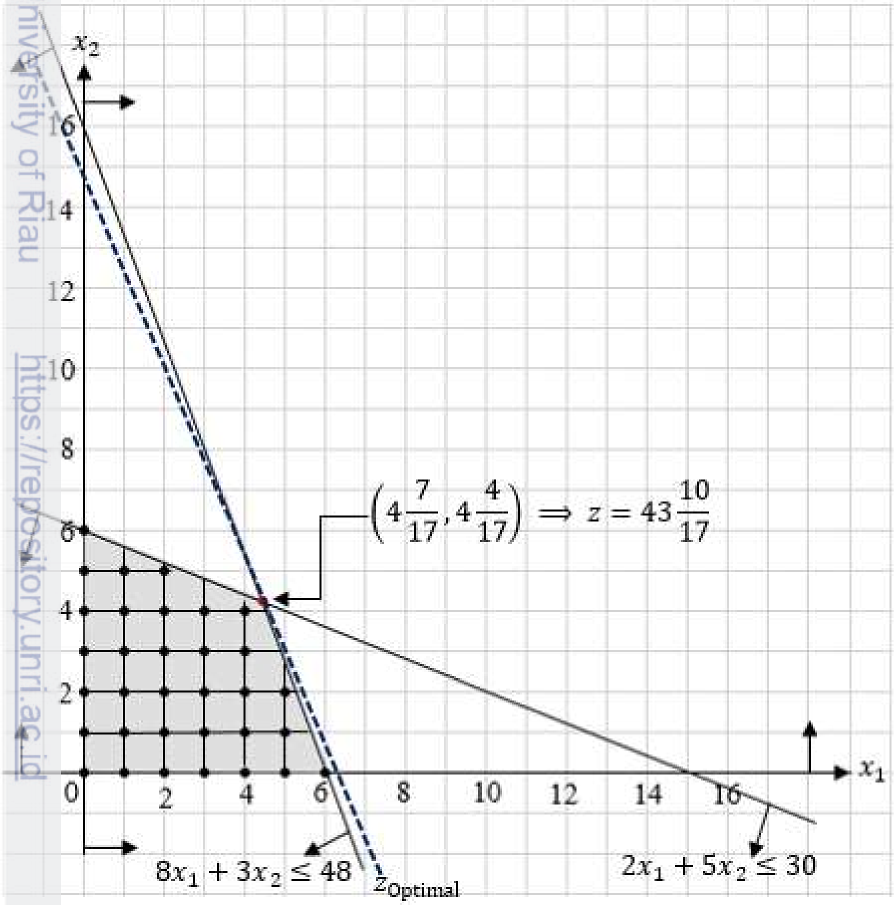
$$\left.\begin{array}{l} \text{maks } z = 7x_1 + 3x_2 \\ \text{kendala } 2x_1 + 5x_2 \le 30 \\ \qquad\qquad 8x_1 + 3x_2 \le 48 \\ \qquad\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \text{ dan integer} \end{array}\right\} \quad (9.1)$$

Dengan mengabaikan syarat integer diperoleh masalah yang dilonggarkan atau masalah relaksasi (*relaxed problem*), yaitu masalah program linear yang biasa. Grafik masalah relaksasi dari (9.1) ini dapat dilihat pada Gambar 9.1. *Tampak pada grafik bahwa daerah layak program integer pasti termuat di dalam daerah layak masalah relaksasi*. Implikasinya adalah

> Nilai fungsi tujuan optimal program linear relaksasi ≥ nilai fungsi tujuan optimal program integer.

Solusi optimal masalah relaksasi dari (9.1) adalah

$$x_1 = 4\frac{7}{17}, x_2 = 4\frac{4}{17}, \text{ dan } z = 43\frac{10}{17}.$$




**Gambar 9.1** Solusi secara grafik dari masalah relaksasi

Pada Gambar 9.1 dapat dilihat bahwa tanda ”•” di dalam daerah layak menunjukkan solusi layak integer untuk masalah (9.1) di atas. Untuk mendapatkan solusi optimal integer dapat dilakukan dengan memeriksa semua titik integer di dalam daerah layak, kemudian pasangan integer $(x_1, x_2)$ yang memberikan nilai $z$ terbesar dipilih sebagai solusi optimal. Cara ini tidak efisien, apalagi bila masalahnya berskala besar. Kenapa?

Sekarang perhatikan bagaimana jika solusi integer diperoleh dengan pembulatan. Periksa berikut ini:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 7(4) + 3(4) = 40.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tidak layak.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tidak layak.}$$

Tampak bahwa teknik pembulatan juga tidak bisa digunakan. Nanti akan ditunjukkan bahwa solusi optimal dari masalah di atas adalah $x_1 = 6, x_2 = 0$, dan $z = 42$.

## 9.2 Metode Cabang-dan-Batas

Tabel optimal dari masalah relaksasi (9.1) dapat dilihat pada Tabel 9.1.

**Tabel 9.1**

| Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | RK | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{3}{34}$ | $\frac{29}{34}$ | $\frac{741}{17}$ | Optimal |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{17}$ | $-\frac{1}{17}$ | $\frac{72}{17}$ | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{3}{34}$ | $\frac{5}{34}$ | $\frac{75}{17}$ | |

Diketahui bahwa [nilai $z$ optimal program linear relaksasi] ≥ [nilai $z$ optimal program integer], sehingga untuk program integer (9.1) di atas nilai $z$ optimalnya tidak dapat melebihi $\frac{741}{17} = 43\frac{10}{17}$. Jadi, nilai $z$ optimal masalah relaksasi $\left(z = 43\frac{10}{17}\right)$ merupakan suatu batas atas untuk program integer (9.1).

Langkah berikutnya adalah mempartisi daerah layak masalah relaksasi dalam upaya mencari lokasi dari solusi optimal program integer. Pilihlah sebarang variabel yang bernilai pecahan pada solusi optimal dari program linear relaksasi – misalkan $x_1$. Sekarang, perhatikan bahwa setiap titik di dalam daerah layak dari program integer mesti memilki $x_1 \leq 4$ atau $x_1 \geq 5$ (Kenapa tidak $4 < x_1 < 5$?). Dengan ini dalam pikiran, lakukan pencabangan pada variabel $x_1$ dan buatlah dua submasalah tambahan berikut:

**Submasalah 1**

maks $z = 7x_1 + 3x_2$

kendala $2x_1 + 5x_2 \leq 30$

$8x_1 + 3x_2 \leq 48$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

**Submasalah 2**

maks $z = 7x_1 + 3x_2$

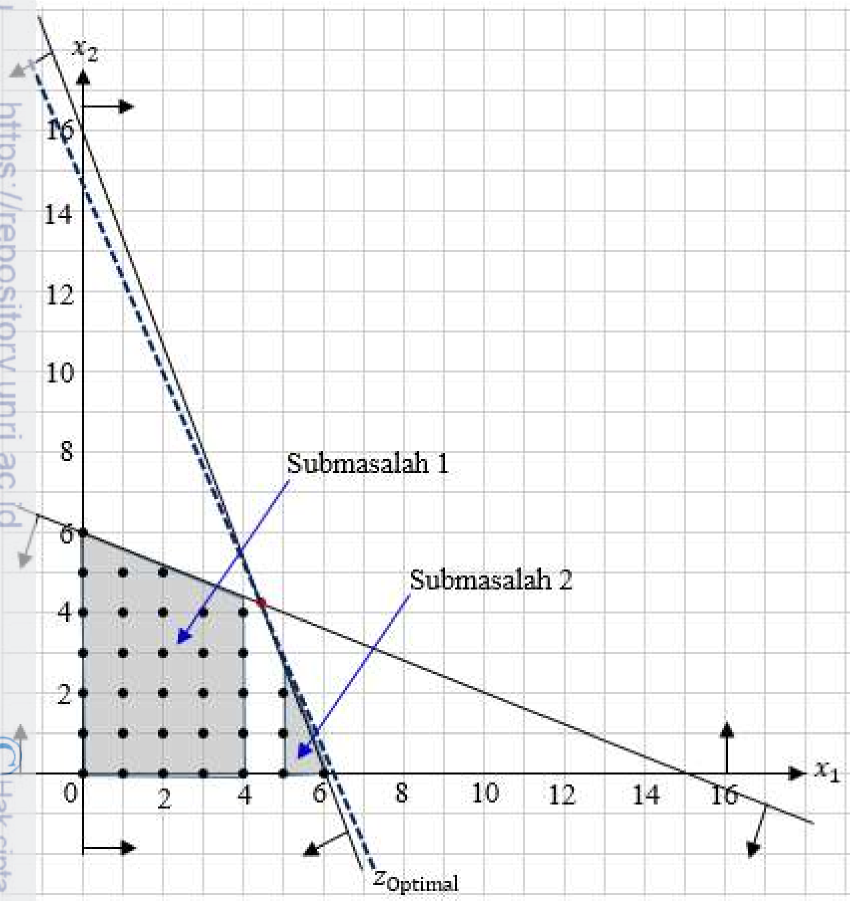
kendala $2x_1 + 5x_2 \leq 30$

$8x_1 + 3x_2 \leq 48$

$x_1 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Grafik dari submasalah ini dapat dilihat pada Gambar 9.2.




**Gambar 9.2** Daerah layak submasalah 1 dan submasalah 2

Sekarang, kedua submasalah di atas diselesaikan dengan menggunakan teknik penyisipan kendala baru yang sudah dijelaskan pada Subbab 7.4.

**Submasalah 1:** Dari tabel akhir masalah relaksasi diperoleh.

$$x_1 - \frac{3}{34}x_3 + \frac{5}{34}x_4 = \frac{75}{17},$$

$$x_1 = \frac{3}{34}x_3 - \frac{5}{34}x_4 + \frac{75}{17}.$$

Sementara dengan menambahkan variabel *slack* $x_1$ pada kendala $x_1 \leq 4$ diperoleh

$$x_1 + u_1 = 4,$$

$$\Rightarrow \frac{3}{34}x_3 - \frac{5}{34}x_4 + \frac{75}{17} + u_1 = 4,$$

$$\Rightarrow \frac{3}{34}x_3 - \frac{5}{34}x_4 + u_1 = -\frac{7}{17}.$$

Dengan teknik penyisipan variabel dan metode simplex dual, diperoleh tabel awal dan tabel akhir untuk Submasalah 1 sebagaimana yang tampak pada Tabel 9.2. Solusi optimal untuk Submasalah 1 adalah $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$ dan. $z = \frac{206}{5} = 41\frac{1}{5}$.

**Tabel 9.2** Tabel simplex Submasalah 1

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Awal | $z$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{3}{34}$ | $\frac{29}{34}$ | 0 | $\frac{741}{17}$ |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{17}$ | $-\frac{1}{17}$ | 0 | $\frac{72}{17}$ |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{3}{34}$ | $\frac{5}{34}$ | 0 | $\frac{75}{17}$ |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{34}$ | $-\frac{5}{34}$ | 1 | $-\frac{7}{17}$ |
| 1 Optimal | $z$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{56}{85}$ | 0 | $\frac{29}{5}$ | $\frac{206}{5}$ |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{22}{5}$ |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| | $x_4$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{5}$ | 1 | $-\frac{34}{5}$ | $\frac{14}{5}$ |

**Submasalah 2:** Melakukan prosedur yang sama untuk Submasalah 2 diperoleh

$$x_1 - u_1 = 5,$$

$$\Rightarrow \frac{3}{34}x_3 - \frac{5}{34}x_4 + \frac{75}{17} - u_1 = 5,$$

$$\Rightarrow \frac{3}{34}x_3 - \frac{5}{34}x_4 - u_1 = \frac{10}{17}.$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{34}x_3 + \frac{5}{34}x_4 + u_1 = -\frac{10}{17}.$$

Tabel simplex awal dan tabel simplex akhir untuk Submasalah 2 dapat dilihat pada Tabel. Solusi optimal untuk Submasalah 2 adalah $x_1 = 5$, $x_2 = 2\frac{2}{3}$, dan $z = 43$.

**Tabel 9.3** Tabel simplex awal Submasalah 2

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Awal | $z$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{3}{34}$ | $\frac{29}{34}$ | 0 | $\frac{741}{17}$ |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{4}{11}$ | $-\frac{1}{17}$ | 0 | $\frac{72}{17}$ |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{3}{34}$ | $\frac{5}{34}$ | 0 | $\frac{75}{17}$ |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{34}$ | $\frac{5}{34}$ | 1 | $-\frac{10}{17}$ |
| 1 Optimal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 43 |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{136}{51} = 2\frac{2}{3}$ |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | $\frac{85}{17} = 5$ |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{34}{3}$ | $\frac{20}{3}$ |

Gambar 9.3 menunjukkan diagram pencabangan dan solusi optimal dari sub-submasalah. Karena solusi Submasalah 2 lebih baik daripada Submasalah 1, maka pencabangan dilakukan pada Submasalah 2. Buatlah pencabangan pada variabel $x_2$, yaitu $x_2 \leq 2$ dan $x_2 \geq 3$, sehingga diperoleh Submasalah 3 dan Submasalah 4 berikut:

**Submasalah 3**

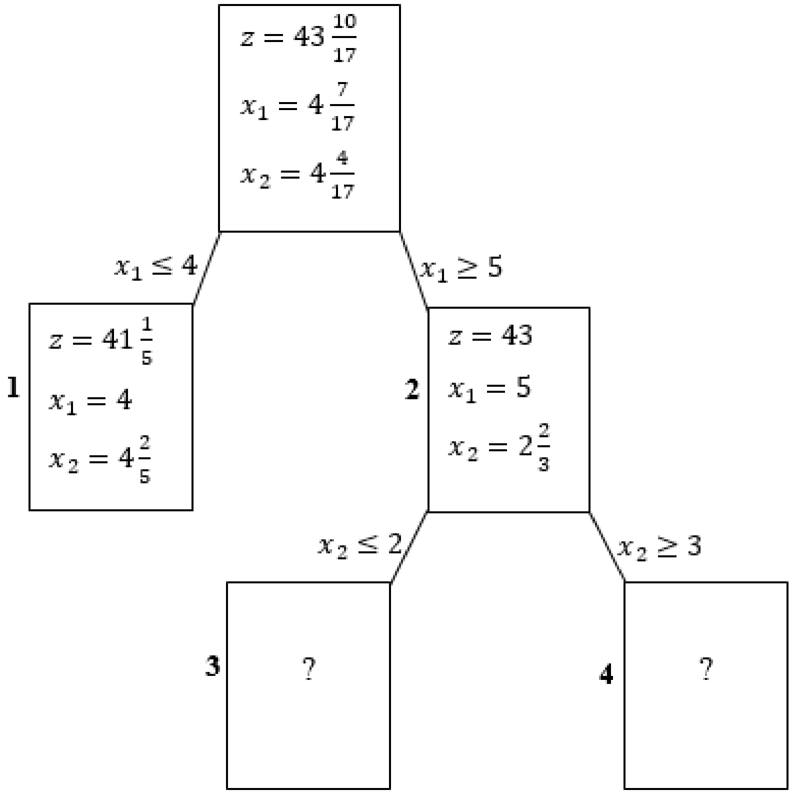
maks $z = 7x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{kendala} \quad 2x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ 8x_1 + 3x_2 &\le 48 \\ x_1 \qquad &\ge 5 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

**Submasalah 4**

maks $z = 7x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{kendala} \quad 2x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ 8x_1 + 3x_2 &\le 48 \\ x_1 \qquad &\ge 5 \\ x_2 &\ge 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$




**Gambar 9.3** Pencabangan pada Submasalah 2

**Submasalah 3:** Submasalah ini adalah Submasalah 2 yang ditambah dengan kendala $x_2 \le 2$. Berdasarkan Tabel 9.3, dilakukan prosedur yang sama sebagai berikut:

$$x_2 + u_2 = 2,$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}u_1 + u_2 = 2,$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}u_1 + u_2 = -\frac{2}{3}.$$

Kemudian kendala baru ini disisipkan ke dalam tabel optimal dari tabel simplex Submasalah 2, lalu diselesaikan dengan metode simplex dual. Tabel simplex Submasalah 3 dapat dilihat pada Tabel 9.4 (a) dan Tabel 9.4 (b).

**Tabel 9.4 (a)** Tabel simplex awal Submasalah 3

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | $u_2$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Awal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 43 |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 0 | $2\frac{2}{3}$ |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 5 |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{34}{3}$ | 0 | $6\frac{2}{3}$ |
| | $u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{8}{3}$ | 1 | $-\frac{2}{3}$ |

**Tabel 9.4 (b)** Tabel simplex optimal Submasalah 3

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | $u_2$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Optimal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | $42\frac{3}{4}$ |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $-\frac{3}{4}$ | $5\frac{1}{4}$ |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{17}{4}$ | $9\frac{1}{2}$ |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

**Submasalah 4:** Submasalah ini adalah Submasalah 2 yang ditambah dengan kendala $x_2 \geq 3$. Berdasarkan Tabel 9.3, dilakukan prosedur yang sama sebagai berikut:

$$x_2 - u_2 = 3,$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}u_1 - u_2 = 3,$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}u_1 - u_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x_4 + \frac{8}{3}u_1 + u_2 = -\frac{1}{3}.$$

Kendala dalam bentuk standar ini kemudian disisipkan ke dalam tabel optimal Submasalah 2 sebagaimana yang dapat dilihat pada Tabel 9.5.

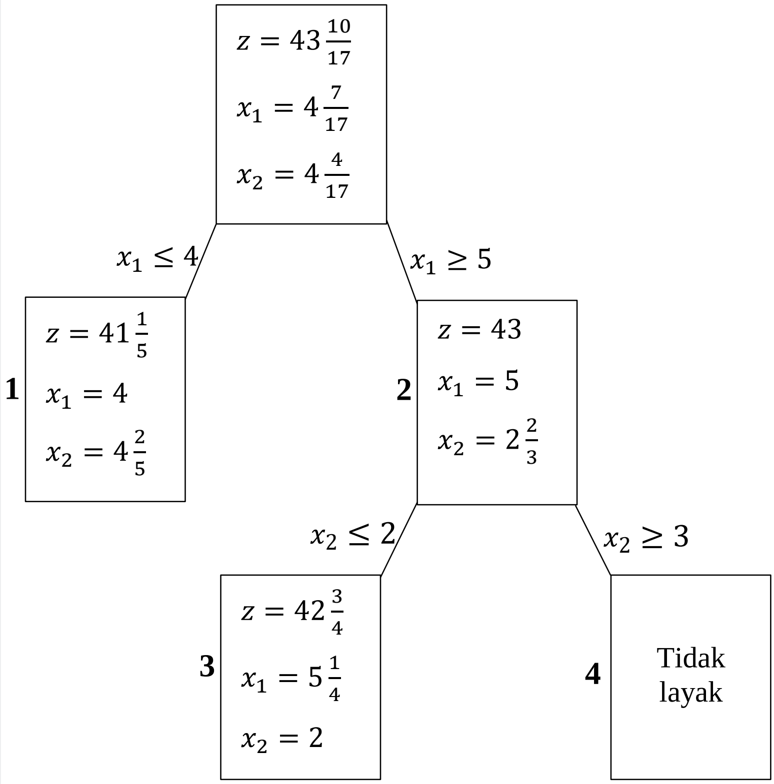
**Tabel 9.5** Tabel simplex Submasalah 4

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | $u_2$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Awal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 43 |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 0 | $2\frac{2}{3}$ |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 5 |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{34}{3}$ | 0 | $6\frac{2}{3}$ |
| | $u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 1 | $-\frac{2}{3}$ |

Ruas kanan ada yang bernilai negatif, tetapi tidak terdapat elemen negatif di sebelah kirinya, berdasarkan metode simplex dual Submasalah 4 tidak memiliki solusi atau tidak layak. Gambar 9.4 melengkapi Gambar 9.3.

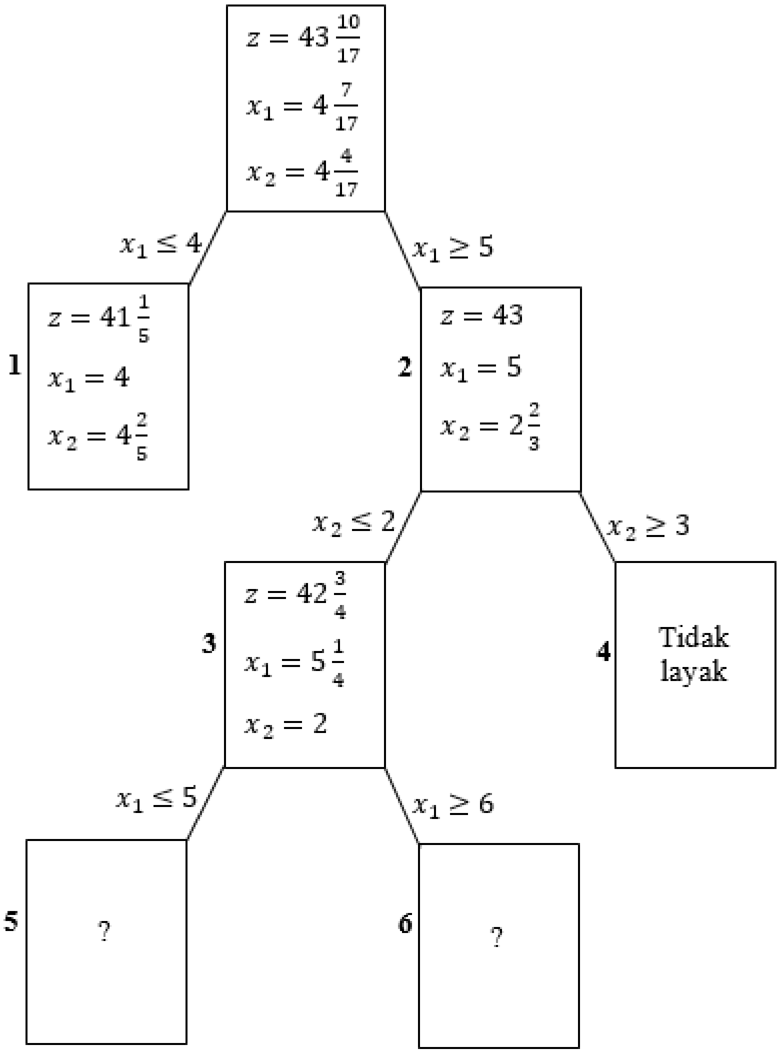
Karena Submasalah 4 tidak layak, maka hanya ada satu pencabangan, yaitu pada Submasalah 3. Solusi optimal untuk Submasalah 3 ini adalah $x_1 = 5\frac{1}{4}$, $x_2 = 2$ dan $z = 42\frac{3}{4}$. Buatlah pencabangan pada variabel $x_1$, yaitu $x_1 \leq 5$ dan $x_1 \geq 6$.

Diagram pencabangannya dapat dilihat pada Gambar 9.4. Batas atas nilai fungsi tujuan pada pencabangan ini adalah $z = 42\frac{3}{4}$.




**Gambar 9.4** Solusi Submasalah 1 sampai Submasalah 4

Karena Submasalah 4 tidak layak, maka hanya ada satu pencabangan, yaitu pada Submasalah 3. Solusi optimal untuk Submasalah 3 ini adalah $x_1 = 5\frac{1}{4}$, $x_2 = 2$ dan $z = 42\frac{3}{4}$. Buatlah pencabangan pada variabel $x_1$, yaitu $x_1 \leq 5$ dan $x_1 \geq 6$. Diagram pencabangannya dapat dilihat pada Gambar 9.5. Batas atas nilai fungsi tujuan pada pencabangan ini adalah $z = 42\frac{3}{4}$.




**Gambar 9.5**

Dari pencabangan tersebut diperoleh Submasalah 5 dan Submasalah 6 sebagai berikut:

**Submasalah 5**

maks $z = 7x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{kendala}\quad 2x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ 8x_1 + 3x_2 &\le 48 \\ x_1 \qquad &\ge 5 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 \qquad &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

**Submasalah 6**

maks $z = 7x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{kendala}\quad 2x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ 8x_1 + 3x_2 &\le 48 \\ x_1 \qquad &\ge 5 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 \qquad &\ge 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

**Submasalah 5:** Submasalah ini adalah Submasalah 3 yang ditambah dengan kendala $x_1 \le 5$. Berdasarkan Tabel 9.4, prosedur yang sama dilakukan sebagai berikut:

$$x_1 + u_3 = 5 \;\Rightarrow\; 5\frac{1}{4} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{3}{8}u_2 + u_3 = 5,$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{8}x_4 + \frac{3}{8}u_2 + u_3 = -\frac{1}{4}.$$

Kemudian kendala baru ini disisipkan ke dalam tabel optimal dari tabel simplex Submasalah 3, lalu diselesaikan dengan metode simplex dual. Tabel simplex Submasalah 5 dapat dilihat pada Tabel 9.6 (a) dan Tabel 9.6 (b). Solusi optimal untuk Submasalah 5 adalah $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ dan $z = 41$. Pada Submasalah 5 ini, solusi integer telah diperoleh, namun perlu diteruskan untuk menyelesaikan Submasalah 6 untuk melihat kemungkinan mendapatkan solusi yang lebih baik.

**Tabel 9.6 (a)** Tabel simplex awal Submasalah 5

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Awal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | 0 | $42\frac{3}{4}$ |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $-\frac{3}{8}$ | 0 | $5\frac{1}{4}$ |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{17}{4}$ | 0 | $9\frac{1}{2}$ |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | $-\frac{3}{8}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | $u_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ |

**Tabel 9.6 (b)** Tabel simplex optimal Submasalah 5

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Optimal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{45}{8}$ | 7 | 41 |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{23}{4}$ | $-2$ | 10 |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 1 | 0 |
| | $x_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $-6$ | $-8$ | 2 |

**Submasalah 6:** Submasalah ini adalah Submasalah 3 yang ditambah dengan kendala $x_1 \geq 6$. Berdasarkan Tabel 9.4, dilakukan prosedur sebagai berikut:

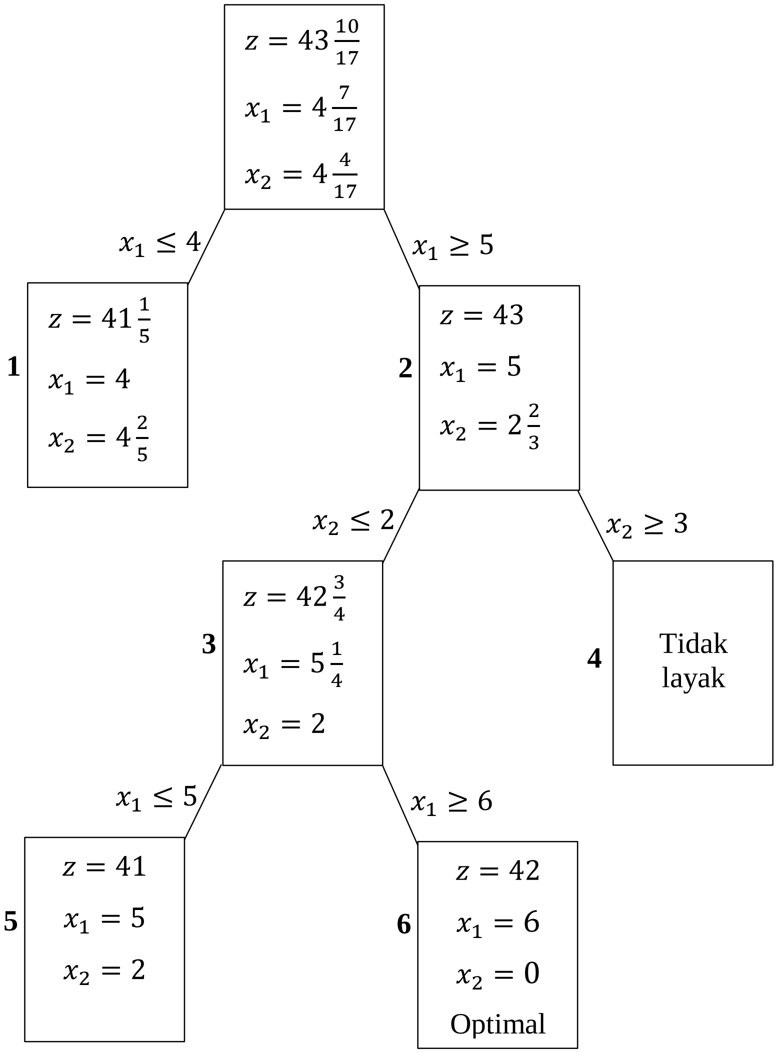
$$x_1 - u_3 = 6,$$
$$\Rightarrow 5\frac{1}{4} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{3}{8}u_2 - u_3 = 6,$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x_4 + \frac{3}{8}u_2 - u_3 = \frac{3}{4}.$$
$$\Rightarrow \frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{8}u_2 + u_3 = -\frac{3}{4}.$$

Kemudian kendala baru ini disisipkan ke dalam tabel optimal dari tabel simplex Submasalah 3, lalu diselesaikan dengan metode simplex dual. Tabel simplex Submasalah 6 dapat dilihat pada Tabel 9.7.

Dari Tabel 9.7 dapat dilihat bahwa solusi Submasalah 6 adalah solusi integer dengan $x_1 = 6, x_2 = 0$ dan $z = 42$. Solusi ini lebih baik dari solusi integer Submasalah 5. Jadi secara global solusi optimal untuk program integer (9.1) adalah $x_1 = 6, x_2 = 0$ dan $z = 42$. Keseluruhan diagram solusi program integer (9.1) dapat dilihat pada Gambar 9.5.

**Tabel 9.7** Tabel simplex Submasalah 6

| No. Iterasi | Basis | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | RK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Awal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | 0 | $42\frac{3}{4}$ |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $-\frac{3}{8}$ | 0 | $5\frac{1}{4}$ |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{17}{4}$ | 0 | $9\frac{1}{2}$ |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | $-\frac{3}{8}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | $u_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $-\frac{3}{8}$ | 1 | $-\frac{3}{4}$ |
| 1 Optimal | $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 42 |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{8}{3}$ | 0 |
| | $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 6 |
| | $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | $-\frac{34}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | 18 |
| | $u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 1 |
| | $u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | $-\frac{8}{3}$ | 2 |

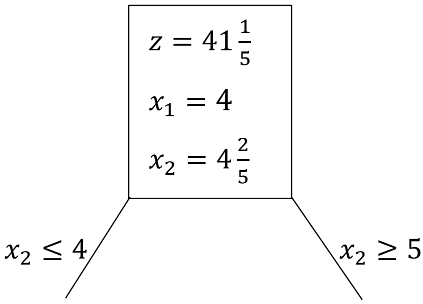



**Gambar 9.5** Diagram solusi program integer (9.1) secara keseluruhan

Misalkan solusi Submasalah 6 adalah

$$\boxed{\begin{array}{c} z = 41{,}1 \\ x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{array}}$$

Adalah memungkinkan untuk kembali ke Submasalah 1 dan melakukan pencabangan di sana, seperti tampak pada pencabangan berikut:




## Soal-Soal Latihan

1. Pertimbangkan program integer berikut:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = 5x_1 + x_2 \\ &\text{kendala } -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &\qquad x_1 - x_2 \leq 1 \\ &\qquad 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \text{ dan integer.} \end{aligned}$$

   a. Selesaikan masalah ini secara grafik.
   b. Selesaikan program linear relaksasi secara grafik. Bulatkan solusi ini ke integer ”terdekat” dan periksa apakah ianya layak. Lalu, enumerasi ”semua” solusi pembulatan (dengan membulatkan setiap nilai noninteger baik ke atas maupun ke bawah), periksa kelayakannya, dan hitung $z$ untuk yang layak. Apakah ada solusi layak pembulatan ini yang optimal untuk program integer tersebut?
   c. Gunakan metode cabang-dan-batas untuk menyelesaikan masalah ini. Untuk setiap submasalah, selesaikan program linear relaksasi secara grafik.

2. Selesaikan program integer berikut dengan metode cabang-dan-batas:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = 3x_1 + 4x_2 \\ &\text{kendala } 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \text{ dan integer.} \end{aligned}$$

3. Selesaikan program integer berikut dengan metode cabang-dan-batas:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{kendala } 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \text{ dan integer.} \end{aligned}$$

4. Selesaikan program integer berikut dengan metode cabang-dan-batas:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{kendala } x_1 + 4x_2 &\ge 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 7 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \text{ dan integer.} \end{aligned}$$

5. Selesaikan program integer campuran berikut dengan metode cabang-dan-batas:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{kendala } 5x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 4x_1 + x_2 &\le 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \text{ dan integer.} \end{aligned}$$

## REFERENSI TERPILIH

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. J. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*, 2nd Edition. Wiley India, Delhi, 2008.

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1995.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.