7

ANALISIS SENSITIVITAS

Pada bab ini dibahas bagaimana perubahan pada parameter program linear mempengaruhi solusi optimal program linear tersebut. Ini dinamakan analisis sensitivitas. Analisis sensitivitas atau analisis pasca-optimalitas (*post-optimality analysis*) memungkinkan untuk melakukan alternatif lain dalam pengambilan keputusan tanpa mengganggu keadaan optimalitas.

7.1 Analisis Sensitivitas Secara Grafik

Perhatikan kembali program linear PT Pelangi,

maks $z = 3x_1 + 2x_2$

kendala $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (1) penggunaan bahan mentah A,

$2x_1 + x_2 \leq 8$ (2) penggunaan bahan mentah B,

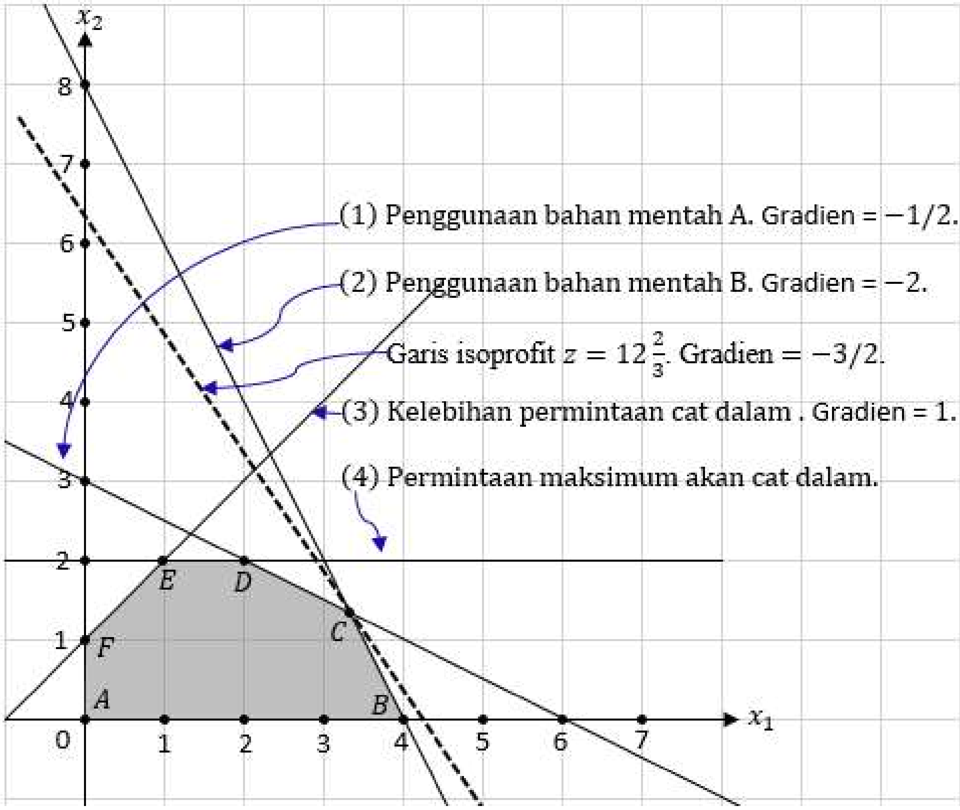
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (3) kelebihan permintaan cat dalam,

$x_2 \leq 2$ (4) permintaan maksimum akan cat dalam,

$x_1, x_2 \geq 0$ (5) kendala tak negatif,

dengan x_1 adalah jumlah (dalam ton) cat luar yang diproduksi sehari, dan x_2 jumlah (dalam ton) cat dalam yang diproduksi sehari.

Solusi optimal untuk masalah PT Pelangi adalah $z = 12\frac{2}{3}$, $x_1 = 3\frac{1}{3}$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$ (titik C pada Gambar 7.1) dan x_1, x_2, s_3 (variabel *slack* untuk kendala kelebihan permintaan cat dalam atas cat luar), dan s_4 (variabel *slack* untuk kendala permintaan maksimum cat dalam) sebagai variabel basis. Bagaimanakah perubahan pada koefisien fungsi tujuan dan ruas kanan masalah tersebut merubah solusi optimal?



Gambar 7.1 Gradien setiap garis pada grafik PT Pelangi

Analisis Grafik Pengaruh Perubahan pada Koefisien Fungsi Tujuan

Untuk melihat bagaimana perubahan pada koefisien fungsi tujuan dapat mempengaruhi solusi optimal PT Pelangi, misalkan c_1 dan c_2 berturut- turut adalah pendapatan per ton dari cat luar dan cat dalam. Jadi, fungsi tujuan dapat ditulis

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Pada Gambar 7.1 dapat dilihat bahwa bila c_1 naik (turun) atau c_2 naik (turun), dengan di-*pivot* di C, fungsi tujuan z akan berotasi se arah jarum jam (berlawanan arah jarum jam). Jadi, titik C tetap optimal selama gradien z beragam antara gradien kendala (1) dan (2). Bila gradien z bertepatan dengan gradien kendala (1), maka diperoleh dua alternatif solusi titik ekstrim, yaitu C dan D. Begitu juga bila gradien z bertepatan dengan gradien kendala (2), maka diperoleh dua alternatif solusi titik ekstrim, yaitu B dan C.

Selanjutnya akan ditentukan rentang yang dibolehkan untuk c_1 yang mempertahankan keadaan optimal pada C. Nilai c_2 ditetapkan sama dengan nilai sekarang, 2. Sekarang, setiap garis *isoprofit* mempunyai bentuk $c_1x_1 + 2x_2 =$ konstanta, atau

$$x_2 = -\frac{c_1x_1}{2} + \frac{\text{konstanta}}{2}.$$

Gambar 7.1 menunjukkan bahwa c_1 dapat dinaikkan sampai z berimpit dengan (2) atau diturunkan sampai z berimpit dengan (1). Jadi nilai minimum dan maksimum dari c_1 dapat ditentukan dengan menyamakan slope z berturut-turut dengan slope kendala (1) dan (2), yaitu

$$-\frac{c_1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{atau minimum } c_1 = 1,$$

$$-\frac{c_1}{2} = -\frac{2}{1} \quad \text{atau minimum } c_1 = 4.$$

Rentang c_1 dengan titik C tetap sebagai solusi optimal tunggal diberikan oleh

$$1 < c_1 < 4\,.$$

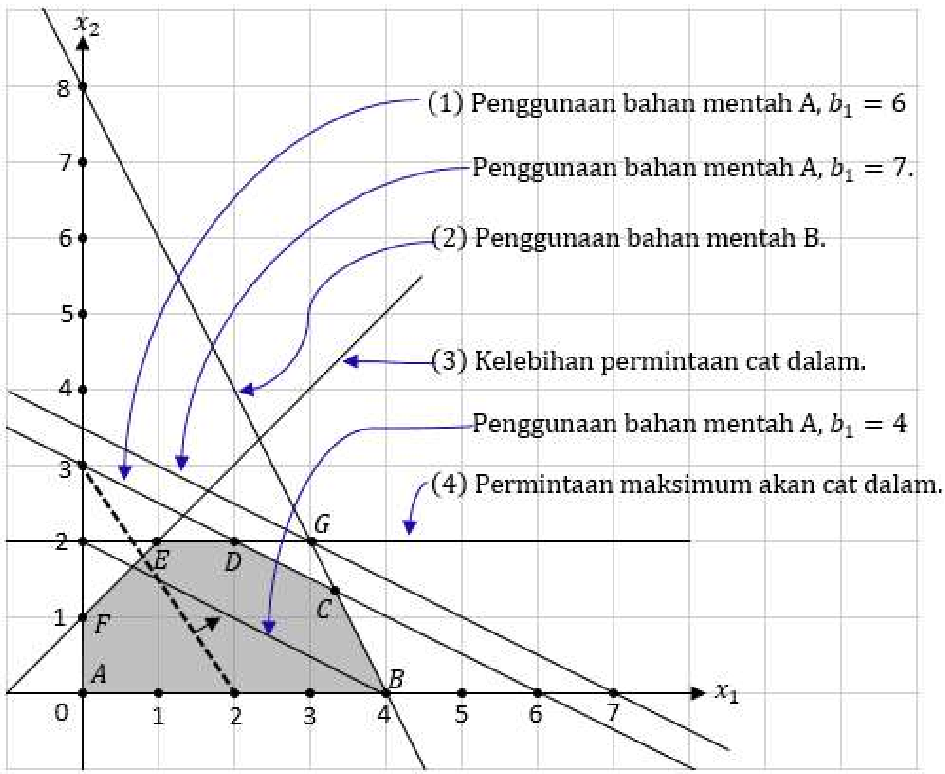
Bila $c_1 = 1$, solusi titik ekstrim optimal terjadi pada titik C atau D. Bila saja c_1 turun sedikit di bawah 1, solusi optimal bergeser ke titik D. Pembaca dapat mengembangkan interpretasi yang sama untuk $c_1 = 4$ atau naik sedikit di atas 4.

Analisis Grafik Pengaruh Perubahan pada Ruas Kanan Solusi Optimal

Analisis secara grafik juga dapat digunakan untuk menentukan apakah perubahan pada ruas kanan kendala akan menyebabkan basis sekarang tidak optimal lagi. Misalkan b_1 jumlah bahan mentah A yang tersedia dalam ton. Sekarang, $b_1 = 6$. Berapa rentang nilai b_1 agar basis sekarang tetap optimal? Dari Gambar 6.2, dapat dilihat bahwa perubahan pada b_1 akan menggeser kendala bahan mentah A paralel dengan posisinya sekarang. Solusi optimal sekarang (titik C pada Gambar 6.2) adalah dimana kendala bahan mentah A dan kendala bahan mentah B mengikat (*binding*).

Jika nilai b_1 diubah, maka *selama dimana kendala bahan mentah A dan kendala bahan mentah B yang mengikat tetap fisibel, solusi optimal akan terjadi dimana kendala bahan mentah A dan kendala bahan mentah B beririsan*. Dari Gambar 7.2

dapat dilihat jika $b_1 > 7$, titik dimana kendala bahan mentah A dan kendala bahan mentah B keduanya mengikat terletak pada bagian kendala bahan mentah B di atas titik G. Pada daerah ini, $x_2 > 2$, dan kendala permintaan maksimum terhadap cat interior terlanggar. Jadi, untuk $b_1 > 7$, basis yang sekarang tidak optimal lagi. Dengan cara yang sama, jika $b_1 < 4$, kendala bahan mentah A dan kendala bahan mentah B akan mengikat pada suatu titik tak layak dengan $x_1 < 0$, dan akibatnya basis yang sekarang tidak optimal lagi. Jadi (jika semua parameter yang lain tetap tak berubah), basis sekarang tetap optimal jika $4 \leq b_1 \leq 7$.



Gambar 7.2 Perubahan solusi secara grafik akibat perubahan ruas kanan

Perlu diketahui meskipun untuk $4 \leq b_1 \leq 7$, basis sekarang tetap optimal, namun *nilai variabel keputusan dan nilai fungsi tujuan berubah*. Sebagai contoh, jika $4 \leq b_1 < 7$, solusi optimal akan berubah dari titik C ke suatu titik pada segmen garis BG. Analisis untuk b_2, b_3, dan b_4 diserahkan kepada pembaca.

7.2 Harga Bayangan

Harga bayangan (*shadow price* atau *dual price*) dari sumber i (dinyatakan oleh y_i^*) merupakan nilai marginal dari sumber ini, yaitu laju kenaikan nilai z dengan menaikkan (sedikit) ketersediaan jumlah sumberdaya ini (b_i). Kenaikan b_i mestilah cukup kecil sehingga basis yang sekarang tetap optimal karena laju (nilai marginal) berubah jika himpunan variabel basis berubah. Metode simplex menunjukkan harga bayangan ini dengan y_i^*, yaitu koefisien variabel *slack* ke-i pada Baris 0 pada tabel simplex optimal.

Sebagai ilustrasi, tabel optimal dari masalah PT Pelangi memberikan

$y_1^* = \frac{1}{3} \coloneqq$ harga bayangan untuk bahan mentah A.

$y_2^* = \frac{4}{3} \coloneqq$ harga bayangan untuk bahan mentah B.

$y_3^* = 0 \coloneqq$ harga bayangan untuk selisih permintaan cat luar dan cat dalam.

$y_4^* = 0 \coloneqq$ harga bayangan untuk permintaan cat dalam.

Kemudian perhatikan persamaan z-optimal PT Pelangi,

$$z = 12\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}s_1 + \frac{4}{3}s_2 + 0s_3 + 0s_4\right).$$

Sebagaimana telah disinggung pada bab sebelumnya bahwa harga bayangan atau nilai variabel dual optimal y_1^*, y_2^*, y_3^*, dan y_4^* masing–masing berkorespondensi dengan nilai variabel *slack* optimal dari primal $s_1, s_2, s_3,$ dan s_4. Jika s_1 dinaikkan dari nilai nol yang sekarang ke suatu nilai positif, nilai fungsi tujuan z akan turun dengan kelajuan $y_1^* = 1/3$ puluhan juta rupiah per ton. Tetapi kenaikan pada s_1 sesungguhnya ekuivalen dengan menurunkan jumlah bahan mentah, sebagaimana yang terlihat pada kendala pertama

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa penurunan sumberdaya pertama (bahan mentah A) akan menurunkan z dengan kelajuan $1/3$ puluhan juta rupiah per ton. Karena fungsi yang dihadapi adalah linear, argumen tersebut dapat dibalik dengan menyimpulkan bahwa kenaikan pada sumberdaya pertama (ekuivalen dengan $s_1 < 0$, variabel surplus) akan menaikkan z dengan kelajuan 1/3 puluhan juta rupiah per ton. Argumen yang sama berlaku untuk sumberdaya kedua (bahan mentah B). Untuk sumber ketiga dan keempat, karena harga bayangannya nol, perubahannya tidak mempengaruhi fungsi tujuan (*abundant resources*).

Kesimpulan umum: dengan menaikkan (menurunkan) setiap b_i secara individu sebesar 1 akan menaikkan (menurunkan) nilai optimal z sebesar y_i^*.

Sebagai contoh, lihat kembali Gambar 7.2, dengan menaikkan kendala (1) sebesar 1 ton dari $x_1 + 2x_2 \leq 6$ menjadi $x_1 + 2x_2 \leq 7$, solusi optimal di titik $C\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}\right)$ dengan $z = 12\frac{2}{3}$ bergeser ke titik $G(3, 2)$ dengan $z = 13$, sehingga

$$y_1^* = \Delta z = 13 - 12\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Dengan cara yang sama, pembaca diminta untuk menentukan y_2^*. Sekali lagi ditekankan bahwa kendala (1) dan (2) mempunyai harga bayangan positif karena kedua kendala ini mengikat, sementara harga bayangan kendala (3) dan (4) bernilai nol karena keduanya tidak mengikat (*nonbinding*).

7.3 Analisis Sensitivitas Berdasarkan Tabel Simplex Optimal

Pada subbab sebelumnya telah dibahas analisis sensitivitas secara grafik. Pada subbab ini diperlihatkan bahwa metode simplex tidak hanya digunakan untuk mencari nilai optimal dari variable-variabel keputusan, tetapi lebih dari itu. Dari tabel simplex optimal dapat dilihat perubahan-perubahan yang terjadi pada solusi optimal akibat perubahan yang terjadi pada masalah asal. Disini dibahas perubahan pada vektor sumberdaya, perubahan pada vektor biaya, dan penambahan kendala baru pada masalah asal.

Perubahan pada vektor sumber

Misalkan akan diubah

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

menjadi

$$\boldsymbol{b}^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k + \Delta b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dengan penjumlahan dua buah vektor diperoleh

$$\boldsymbol{b}^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k + \Delta b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta b_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \Delta b_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{Lokasi ke-}k\text{ (sumber ke-}k) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

atau

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b} + \Delta b_k \boldsymbol{e}_k$$

dengan $\boldsymbol{e}_k$ vektor kolom yang mempunyai elemen 1 pada baris ke-k dan 0 untuk lainnya. Kemudian, dari tabel optimal ruas kanan $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ akan diubah menjadi $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^*$, yaitu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* &= \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta b_k \boldsymbol{e}_k) \geq \boldsymbol{0} \\ &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \Delta b_k \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_k \geq \boldsymbol{0} \\ &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \Delta b_k \times [\text{Kolom ke-}k \text{ dari } B^{-1}] \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Contoh 7.1 Perhatikan kembali tabel simplex optimal masalah PT Pelangi. Akan dicari rentang b_1 yang dapat diterima sedemikian tanpa menganggu optimalitas solusi yang sekarang; atau dengan kata lain solusi basis sekarang tetap optimal. Untuk itu akan diubah

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ menjadi } \boldsymbol{b}^* = \begin{bmatrix} 6 + \Delta b_1 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RK
Optimal	z	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$
	x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
	x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	s_3	0	0	0	–1	1	1	0	3
	s_4	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

Memperhatikan kembali Tabel 5.1, tabel simplex versi matriks, dan mengaitkannya dengan tabel optimal masalah PT Pelangi, diperoleh perhitungan Δb_1 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \Delta b_1 \times [\text{Kolom ke-1 dari } B^{-1}] \geq \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta b_1 \geq 0 \implies \Delta b_1 \geq -2$$

$$\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \implies \Delta b_1 \leq 10$$

$$3 - \Delta b_1 \geq 0 \implies \Delta b_1 \leq 3$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\Delta b_1 \geq 0 \implies \Delta b_1 \leq 1.$$

Solusi dari sistem pertidaksamaan di atas adalah

$$-2 \leq \Delta b_1 \leq 1$$

Jadi, basis sekarang dari masalah PT Pelangi tetap optimal selama b_1 (bahan mentah A) mempunyai rentang (dalam ton) sebagai berikut:

$$6 - 2 \leq b_1 \leq 6 + 1 \;\text{ atau }\; 4 \leq b_1 \leq 7.$$

Selanjutnya akan ditentukan rentang b_2 yang dapat mempertahankan keoptimalan solusi. Untuk itu akan diubah

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ menjadi } \boldsymbol{b}^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 + \Delta b_2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama,

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \Delta b_2 \times [\text{Kolom ke-2 dari } B^{-1}] \geq \boldsymbol{0}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \Delta b_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \implies \Delta b_2 \leq 4$$

$$\frac{10}{3} + \frac{2}{3}\Delta b_2 \geq 0 \implies \Delta b_2 \geq -5$$

$$3 + \Delta b_2 \geq 0 \implies \Delta b_2 \geq -3$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \implies \Delta b_2 \geq -2.$$

Solusi dari sistem pertidaksamaan di atas adalah

$$-2 \leq \Delta b_2 \leq 4$$

Jadi, basis sekarang dari masalah PT Pelangi tetap optimal selama b_2 (bahan mentah B) mempunyai rentang (dalam ton) sebagai berikut:

$$8 - 2 \leq b_2 \leq 8 + 4 \text{ atau } 6 \leq b_2 \leq 12.$$

Sekarang, kepada pembaca diserahkan untuk menunjukkan bahwa b_3 dan b_4 memiliki rentang tak berhingga atau $0 \leq b_3 \leq \infty$ dan $0 \leq b_4 \leq \infty$, dan coba kaitkan hasil ini dengan harga bayangan $y_3^* = 0$ dan $y_4^* = 0$.

Perubahan pada vektor biaya

Pandang kembali masalah PT Pelangi. Misalkan akan dicari rentang yang dibolehkan untuk c_1, harga penjualan per ton cat luar, yang dapat mempertahankan keoptimalan solusi yang sekarang dengan basis $B \coloneqq \{x_2, x_1, s_3, s_4\}$. Untuk itu akan diubah nilai c_1 yang sekarang, $c_1 = 3$, menjadi $c_1^* = 3 + \Delta c_1$. Lalu, hitung $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1}$ dengan $c_1^* = 3 + \Delta c_1$, yaitu

$$\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 + \Delta c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Delta c_1 & \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tampak bahwa jika $\Delta c_1 = 0$ maka $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, seperti tampak pada tabel optimal PT Pelangi.

Perhatikan kembali tabel simplex versi matriks, Baris 0 untuk variabel *slack* dihitung dengan $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1}$, sedangkan untuk variabel asli dihitung dengan $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^T$ atau $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_j$ untuk setiap j. Vektor $\boldsymbol{a}_j$ adalah kolom ke-j dari $\boldsymbol{A}$. Karena $\{x_2, x_1, s_3, s_4\}$ adalah basis, koefisien variabel tersebut pada Baris 0 harus tetap sama dengan nol. Sementara koefisien variabel nonbasis yang baru pada Baris 0 adalah

(i) Koefisien s_1 pada Baris 0 = elemen pertama dari $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Delta c_1$.

(ii) Koefisien s_2 pada Baris 0 = elemen kedua dari $\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta c_1$.

Perhatikan Baris 0. Sekarang,

$$z + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Delta c_1\right) s_1 + \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta c_1\right) s_2 = ?$$

Dari Baris 0 yang baru ini terlihat bahwa $B \coloneqq \{x_2, x_1, s_3, s_4\}$ akan tetap optimal (masalah maksimisasi) jika dan hanya jika berikut ini berlaku:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Delta c_1 \geq 0 \implies 1 - \Delta c_1 \geq 0 \implies \Delta c_1 \leq 1.$$

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta c_1 \geq 0 \implies 4 + 2\Delta c_1 \geq 0 \implies \Delta c_1 \geq -2.$$

Jadi rentang Δc_1 adalah

$$-2 \leq \Delta c_1 \leq 1,$$

dan solusi sekarang tetap optimal untuk

$$3-2 \leq c_1 \leq 3+1 \text{ atau } 1 \leq c_1 \leq 4.$$

Seterusnya pembaca diminta untuk menunjukkan bahwa solusi sekarang tetap optimal untuk $1{,}5 \leq c_2 \leq 6$.

7.4 Penambahan Kendala Baru pada Masalah Asal

Di dalam praktek masalah nyata, sering managemen harus menambahkan kendala baru karena adanya sumber yang baru. Solusi optimal yang baru tidak perlu dicari dari awal, tetapi cukup dievaluasi dari tabel optimal. Ini akan menghemat komputasi, terutama untuk masalah yang melibatkan banyak variabel. Sebagai contoh, perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 6x_1 + x_2 \\ \text{kendala } & x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tabel simplex optimal program linear di atas diberikan pada Tabel 7.1 dengan $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, dan $z = 18$.

Tabel 7.1

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK
Optimal	z	1	0	2	0	3	18
	s_1	0	0	0,5	1	– 0,5	2
	x_1	0	1	0,5	0	0,5	3

(a) Jika ditambahkan kendala baru $3x_1 + x_2 \leq 10$ pada program linear di atas, bagaimana dengan solusi optimal yang sekarang? Pertama-tama uji apakah solusi optimal memenuhi kendala baru, yaitu

$$3(3) + 1(0) \leq 10? \text{ Benar bahwa } 9 < 10.$$

Jadi, solusi optimal yang sekarang memenuhi kendala baru.

(b) Jika ditambah kendala baru $x_1 - x_2 \geq 6$, bagaimana dengan solusi yang sekarang? Uji apakah

$$1\,(3) - 1(0) \geq 6?\ \text{Bukan}, 3 \ngeq 6.$$

Jadi penambahan kendala baru tersebut tidak lagi dipenuhi solusi optimal yang sekarang. Untuk itu harus dicari solusi optimal yang baru. Jadikan kendala ini dalam bentuk standar

$$-x_1 + x_2 + s_3 = -6$$

Kemudian sisipkan kendala dalam bentuk standar ini ke dalam tabel simplex optimal, seperti terlihat pada Tabel 7.2 (a) dan (b).

Tabel 7.2 (a)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RK
0 (Eliminasi s_3 dari kolom x_1)	z	1	0	2	0	3	0	18
	s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	s_3	0	–1	1	0	0	1	– 6

Tabel 7.2 (b)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RK
0′ Proses ulang	z	1	0	2	0	3	0	18
	s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	s_3	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	– 3

Pada Tabel 7.2 tampak bahwa terdapat ruas kanan yang bertanda negatif. Namun sebelah kiri dari ruas kanan itu tidak terdapat elemen negatif. Menurut metode simplex dual, tidak terdapat solusi layak. Jadi, penambahan kendala baru ini menyebabkan program linear tidak layak.

(c) Jika ditambah kendala baru $8x_1 + x_2 \leq 12$, bagaimana dengan solusi yang sekarang? Uji apakah

$$8\,(3) + 1(0) \leq 12 \text{ Bukan, } 24 \nleq 12.$$

Jadi, penambahan kendala baru tersebut tidak lagi dipenuhi oleh solusi optimal yang sekarang. Untuk itu harus dicari solusi optimal yang baru. Jadikan kendala ini dalam bentuk standar

$$8x_1 + x_2 + s_3 = 12.$$

Kemudian sisipkan kendala dalam bentuk standar ini ke dalam tabel simplex optimal, seperti tampak pada Tabel 7.3.

Tabel 7.3

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RK
0 (Eliminasi s_3 dari kolom x_1)	z	1	0	2	0	3	0	18
	s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	s_3	0	8	1	0	0	1	12

Selanjutnya, tabel awal diproses kembali agar metode simplex dual siap diterapkan untuk menyelesaikannya. Setelah sekali iterasi diperoleh solusi optimal yang baru $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, dan $z = 10$. Silakan lihat Tabel 7.4 (a) dan Tabel 7.4 (b).

Tabel 7.4 (a)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RK
$0'$ Proses ulang	z	1	0	2	0	3	0	18
	s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	s_3	0	0	–3	0	– 4	1	–12

Tabel 7.4 (b)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RK
1	z	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	10
	s_1	0	0	0	1	$-\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
	x_2	0	0	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4

7.5 Menggunakan *Solver* untuk Melakukan Analisis Sensitivitas

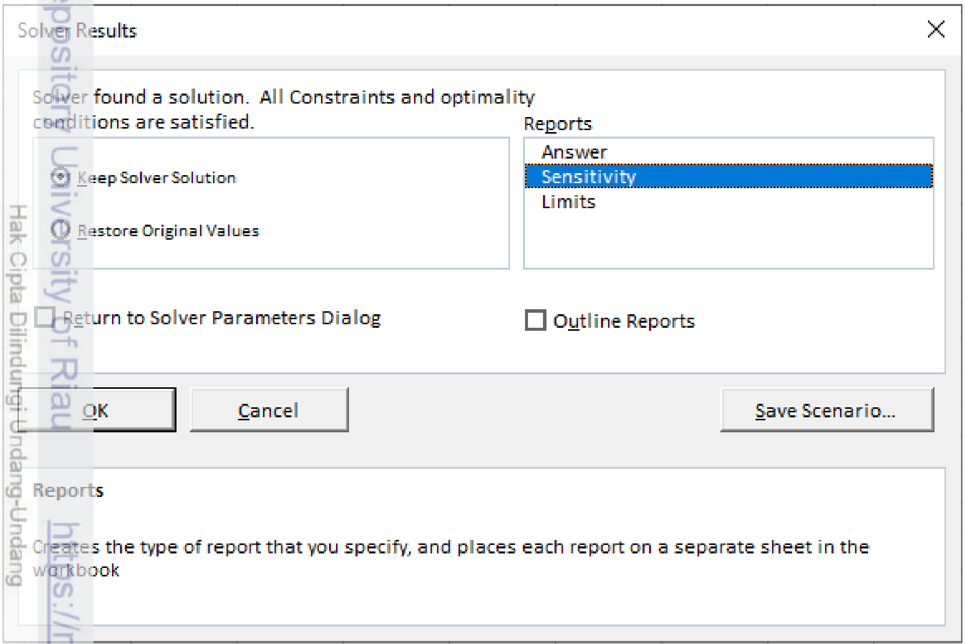
Perhatikan kembali masalah PT Pelangi. Langkah-langkah untuk melakukan analisis sensitivitas masalah PT Pelangi dengan menggunakan *Solver* adalah sebagai berikut:

(i) Pada lembar kerja Excel masukkan data masalah PT Pelangi seperti yang terlihat pada Gambar 7.3.

	A	B	C	D	E	F
1		Cat luar	Cat dalam			
2	Jumlah yang akan diproduksi (ton)	1	1			
3	Perolehan per ton dalam jutaan rupiah	3	2			
4	Kendala penggunaan bahan mentah:			Kalkulasi		Ruas kanan
5	Bahan mentah A per ton cat	1	2	3	<=	6
6	Bahan mentah B per ton cat	2	1	3	<=	8
7	Kendala lain:					
8	Kelebihan cat dalam atas cat luar	-1	1	0	<=	1
9	Permintaan terhadap cat dalam	0	1	1	<=	2
10						
11	Perolehan dari penjualan kedua jenis cat	5	(dalam puluhan jutaan rupiah)			

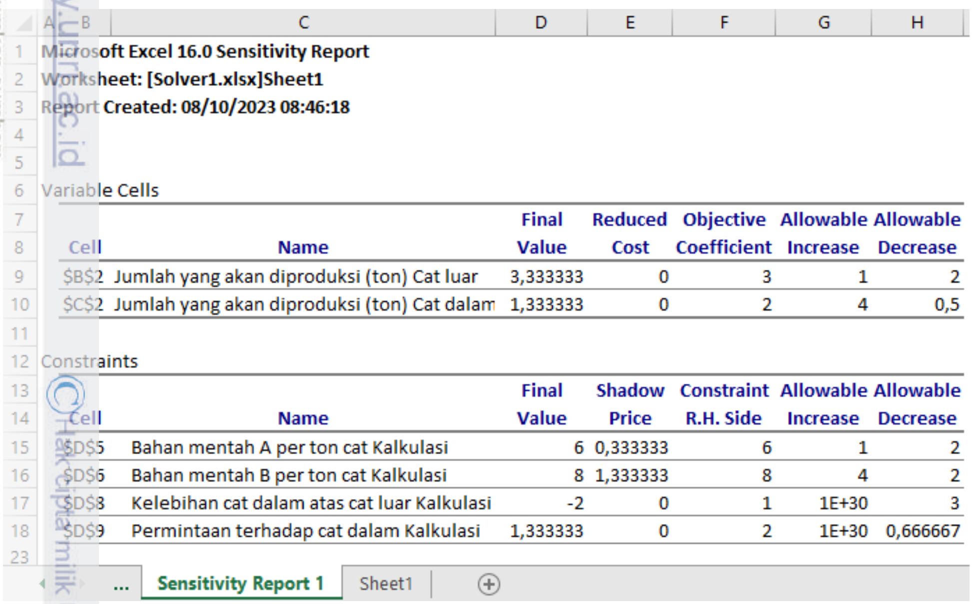
Gambar 7.3 Data masalah PT. Pelangi

(ii) Lihat subbab 4.12 sampai semua **Solver Parameters** diisi. Setelah memilih **OK** pilih **Solve**. Ketika meng-klik tombol **Solve**, muncul tampilan seperti Gambar 7.4. Lalu pilih **Sensitivity**.



Gambar 7.4 Pilihan **Sensitivity** pada **Solver Results**

Sensitivity Report dapat dilihat pada Gambar 7.5.



Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Solver1.xlsx]Sheet1
Report Created: 08/10/2023 08:46:18

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B2	Jumlah yang akan diproduksi (ton) Cat luar	3,333333	0	3	1	2
C2	Jumlah yang akan diproduksi (ton) Cat dalam	1,333333	0	2	4	0,5

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
D5	Bahan mentah A per ton cat Kalkulasi	6	0,333333	6	1	2
D6	Bahan mentah B per ton cat Kalkulasi	8	1,333333	8	4	2
D8	Kelebihan cat dalam atas cat luar Kalkulasi	-2	0	1	1E+30	3
D9	Permintaan terhadap cat dalam Kalkulasi	1,333333	0	2	1E+30	0,666667

Sensitivity Report 1 | Sheet1

Gambar 7.5 Hasil *Solver* analisis sensitivitas masalah PT Pelangi

Perhatikan Gambar 7.5 pada bagian **Variable Cells.** Menentukan rentang yang dibolehkan untuk b_i, misalnya b_1, dilakukan sebagai berikut:

$$6 - \textit{Allowable Decrease} \leq b_1 \leq 6 + \textit{Allowable Increase}$$
$$6 - 2 \leq b_1 \leq 6 + 1$$
$$4 \leq b_1 \leq 7.$$

Perhatikan Gambar 7.5 pada bagian **Constraints.** Menentukan rentang yang dibolehkan untuk c_j, misalnya c_1, dilakukan sebagai berikut:

$$3 - \textit{Allowable Decrease} \leq c_1 \leq 3 + \textit{Allowable Increase}$$
$$3 - 2 \leq c_1 \leq 3 + 1$$
$$1 \leq c_1 \leq 4.$$

Soal-Soal Latihan

1. Lakukanlah analisis sensitivitas terhadap masalah PT Bajaku secara grafik;
   a. perubahan terhadap vektor $\boldsymbol{b}$. Kemudian berikan interpretasi ekonomi.
   b. perubahan terhadap vektor $\boldsymbol{c}$. Kemudian berikan interpretasi ekonomi.
2. Lakukanlah analisis sensitivitas terhadap masalah PT Bajaku berdasarkan tabel simplex optimal;
   a. perubahan terhadap vektor $\boldsymbol{b}$.
   b. perubahan terhadap vektor $\boldsymbol{c}$.
3. Pada masalah suatu perusahaan, diketahui variabel keputusan x_1 adalah jumlah produk 1 yang diproduksi per minggu dan x_2 jumlah produk 2 yang diproduksi per minggu. Model program linearnya diberikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lrl} \text{maks} & z = 3x_1 + 2x_2 & \text{(Keuntungan dalam jutaan rupiah.)} \\ \text{kendala} & 2x_1 + x_2 \leq 100 & \text{(Kendala jam proses tahap akhir.)} \\ & x_1 + x_2 \leq 8 & \text{(Kendala jam kerja karyawan.)} \\ & x_1 \leq 40 & \text{(Maksimum permintaan produk 1.)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Tabel optimal program linear di atas diberikan sebagai berikut (x_3, x_4 dan x_5 adalah variabel *slack*):

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RK
Optimal	z	1	0	0	1	1	0	180
	x_2	0	0	1	–1	2	0	60
	x_5	0	0	0	–1	1	1	20
	x_1	0	1	0	1	–1	0	20

a. Tunjukkanlah bahwa kontribusi terhadap keuntungan untuk produk 2 adalah antara 1,5 dan 3 (dalam jutaan rupiah).

b. Jika kontribusi terhadap keuntungan untuk produk 1 adalah 2,5, berapakah solusi optimal yang baru?

4. Untuk soal no.3,

a. Tunjukkanlah bahwa jika jam kerja karyawan antara 60 dan 100, basis sekarang tetap optimal.

b. Jika tersedia jam kerja karyawan antara 60 dan 100, masihkah perusahaan tersebut memproduksi 20 produk 1 dan 60 produk 2?

5. Untuk soal no.3, tunjukkan bahwa jika permintaan terhadap produk 1 sedikitnya 20, basis sekarang tetap optimal, dan perusahaan tersebut masih memproduksi 20 produk 1 dan 60 produk 2.

6. Diketahui program linear

$$\begin{aligned}
\text{maks } & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{kendala } & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 \\
& x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa basis sekarang tetap optimal jika c_3 memenuhi $15 \leq c_3 \leq 22{,}5$. Jika $c_3 = 21$, carilah solusi optimal yang baru. Juga, jika $c_3 = 25$, carilah solusi optimal yang baru.

7. Untuk soal no.6, tunjukkanlah bahwa jika terpenuhi $b_1 \geq 24$, basis yang sekarang tetap optimal. Jika $b_1 = 30$, cari solusi optimal yang baru.
8. Anggaplah bahwa setiap kendala berikut ditambahkan ke model program linear PT Pelangi, evaluasi solusi optimal yang sekarang dan cari solusi optimal yang baru, jika ada, untuk setiap kendala yang ditambahkan.
   a. $x_1 + x_2 \leq 4$
   b. $2x_1 + 3x_2 \geq 11$
9. Perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{kendala } & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 \qquad = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan solusi awal yang terdiri dari x_3 dan sebuah variabel artifisial a pada kendala kedua, diperoleh tabel optimal berikut:

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	a	RK
Optimal	z	1	0	2	0	$-1 + M$	5
	x_3	0	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
	x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Kemudian, periksa apakah setiap kendala berikut akan mempengaruhi solusi optimal yang sekarang. Jika demikian, cari solusi yang baru.

a. $x_1 + x_2 \leq 2$
b. $2x_1 + 4x_2 \geq 10$
c. $2x_1 + x_2 = 6$
d. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

REFERENSI TERPILIH

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming*. McGraw-Hill, New York, 1990.

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*, 3rd Edition. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2011.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.