6

MASALAH DUAL

Pada bab ini dibahas masalah dual atau rangkap dari sebarang program linear. Memahami hubungan antara program linear dengan dualnya serta penafsirannya sangat penting dalam memahami topik-topik lanjut dari program linear dan nonlinear. Juga hubungan ini sangat penting karena dapat memberikan interpretasi ekonomi yang menarik. Konsep dualitas mempunyai keterkaitan dengan analisis sensitivitas atau analisis setelah solusi optimal diperoleh (*post optimality analysis*). Analisis sensitivitas memungkinkan untuk melakukan alternatif lain dalam pengambilan keputusan tanpa mengganggu keadaan optimalitas.

6.1 Pengertian Dual

Masalah dual merupakan masalah rangkap program linear yang didefinisikan secara langsung dan sistematis dari masalah asal atau primal. Pada perlakuan program linear pada umumnya, dual didefinisikan untuk berbagai bentuk dari primal yang bergantung pada jenis kendala, tanda variabel, dan jenis optimisasi (min atau maks).

Secara umum bentuk standar dari primal didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (\text{maks atau min})\ z &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{kendala}\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Kendala dalam bentuk persamaan sudah memuat variabel *slack* dan surplus. Dalam bentuk notasi sigma ditulis

$$(\text{maks atau min})\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

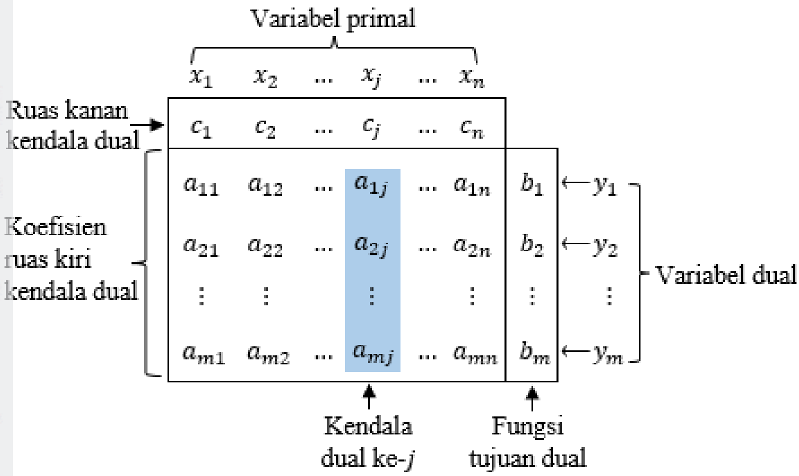
$$\text{kendala}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Untuk maksud pembentukan dual, secara skematis koefisien primal disusun seperti tampak pada Gambar 6.1. Diagram tersebut menunjukkan bahwa dual diperoleh secara simetris dari primal berdasarkan aturan berikut:

(i) Untuk masing-masing kendala primal terdapat sebuah variabel dual.

(ii) Untuk masing-masing kendala dual terdapat sebuah variabel primal.

(iii) Koefisien kendala dari sebuah variabel primal membentuk koefisien ruas kiri dari kendala dual yang berkorespondensi; dan koefisien fungsi tujuan dari variabel yang sama menjadi ruas kanan kendala dual tersebut.



Gambar 6.1 Diagram hubungan primal-dual

Aturan ini menunjukkan bahwa masalah dual memilki m variabel $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ dan n kendala (yang berkorespondensi dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$).

6.2 Mencari Dual Program Linear

Perhatikan kembali program linear PT Pelangi,

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{kendala } x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Dalam bentuk matriks:

$$\text{maks } z = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

kendala

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalam notasi matriks:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ &\qquad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Dual dari masalah PT Pelangi di atas adalah

$$\begin{aligned} \min \bar{z} &= 6y_1 + 8y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{kendala } \ y_1 + 2y_2 - y_3 &\qquad\quad \ge 3 \\ 2y_1 + \ y_2 + y_3 + y_4 &\ge 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

Dalam bentuk matriks:

$$\min \bar{z} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

kendala

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalam notasi matriks:

$$\begin{aligned} &\min \bar{z} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ &\qquad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Jadi, dari penjelasan di atas diperoleh hasil sebagai berikut:

Jika primal berbentuk

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \qquad \text{(P)} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

maka dual-nya berbentuk

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \qquad \text{(D)} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Sekarang, apakah dual dari dual? Untuk menjawab pertanyaan ini, pandang masalah (D) sebagai primal.

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Ubah bentuk ini menjadi

$$\begin{aligned} &\text{maks } (-\bar{z}) = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ &\text{kendala } -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \le -\boldsymbol{c} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Dual dari masalah maks ini adalah

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{\bar{z}} = (-\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{w} \\ &\text{kendala } \left(-\boldsymbol{A}^T\right)^T\boldsymbol{w} \ge -\boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{w} \ge \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

atau dalam masalah maks berbentuk

$$\begin{aligned} &\text{maks } z' = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} \le \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{w} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Dari proses di atas, lihatlah masalah maks yang terakhir, tampak bahwa dual dari dual adalah primal.

Contoh 6.1 Pandang kembali bentuk dual masalah PT Pelangi dan tulis kembali dalam bentuk maks dan pertimbangkan sebagai masalah primal.

$$
\begin{aligned}
\text{maks } (-\bar{z}) &= -6y_1 - 8y_2 - y_3 - y_4 \\
\text{kendala } -y_1 - 2y_2 + y_3 \quad &\leq -3 \\
-2y_1 - y_2 - y_3 - y_4 &\leq -2 \\
y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Dengan w sebagai variabel dual, masalah dual dari program linear ini adalah

$$
\begin{aligned}
\text{min } \bar{\bar{z}} &= -3w_1 - 2w_2 \\
\text{kendala } -w_1 - 2w_2 &\geq -6 \\
-2w_1 - w_2 &\geq -8 \\
w_1 - w_2 &\geq -1 \\
- w_2 &\geq -2 \\
w_1, w_2 &\geq 0,
\end{aligned}
$$

atau dalam bentuk maks,

$$
\begin{aligned}
\text{maks } (-\bar{\bar{z}}) &= 3w_1 + 2w_2 \\
\text{kendala } w_1 + 2w_2 &\leq 6 \\
2w_1 + w_2 &\leq 8 \\
w_1 + w_2 &\leq 1 \\
w_2 &\leq 2 \\
w_1, w_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Tampak bahwa bentuk maks yang terakhir tiada lain adalah bentuk primal dari masalah PT Pelangi.

Contoh 6.2 Akan dicari dual dari program linear

$$
\begin{aligned}
\text{maks } z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{kendala } 4x_1 + 5x_2 &= 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Tulis kembali bentuk primal di atas sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\text{maks } z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{kendala } 4x_1 + 5x_2 &\leq 6 \\
-4x_1 - 5x_2 &\leq -6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dual dari bentuk yang terakhir di atas adalah

$$\min \bar{z} = 6y_1 - 6y_2$$
$$\text{kendala } 4y_1 - 4y_2 \geq 2$$
$$5y_1 - 5y_2 \geq 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0,$$

atau

$$\min \bar{z} = 6(y_1 - y_2)$$
$$\text{kendala } 4(y_1 - y_2) \geq 2$$
$$5(y_1 - y_2) \geq 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Misalkan $y_1 - y_2 = w$, lantas diperoleh bentuk dual berikut:

$$\min \bar{z} = 6w$$
$$\text{kendala } 4w \geq 2$$
$$5w \geq 3$$
$$w \text{ bebas tanda.}$$

Dari Contoh 6.2 diperoleh hasil berikut:

Jika primal berbentuk

$$\text{maks } z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\text{kendala } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

maka dual-nya berbentuk

$$\min \bar{z} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$$
$$\text{kendala } \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \text{ bebas tanda.}$$

Bukti formal dari pernyataan di atas diberikan sebagai berikut. Misalkan primal adalah

$$\text{maks } z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\text{kendala } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$$

Tulis kembali bentuk ini sebagai

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ &\qquad -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le -\boldsymbol{b} \\ &\qquad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Tulis kembali dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{kendala } \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \le \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \\ &\qquad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Kemudian, tulis dual dari bentuk yang terakhir di atas sebagai

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{y} \\ &\text{kendala } \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ &\qquad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Tulis kembali bentuk dual di atas sebagai

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{z} = [\boldsymbol{b}^T \quad -\boldsymbol{b}^T]\,\boldsymbol{y} \\ &\text{kendala } [\boldsymbol{A}^T \quad -\boldsymbol{A}^T]\,\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ &\qquad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Pembaca dapat memeriksa bahwa $[\boldsymbol{b}^T \quad -\boldsymbol{b}^T]$ adalah matriks berukuran $1 \times 2m$, $[\boldsymbol{A}^T \quad -\boldsymbol{A}^T]$ berukuran $n \times 2m$, dan $\boldsymbol{y}$ vektor berukuran $2m \times 1$. Dengan mempartisi vektor $\boldsymbol{y}$ menjadi vektor

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$$

yang berukuran $2m \times 1$, bentuk yang terakhir dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{z} = [\boldsymbol{b}^T \quad -\boldsymbol{b}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \\ &\text{kendala } [\boldsymbol{A}^T \quad -\boldsymbol{A}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \ge \boldsymbol{c} \\ &\qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \ge \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} &\text{min } \bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v} \\ &\text{kendala } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} \ge \boldsymbol{c} \\ &\qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \ge \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

atau

$$\min \bar{z} = \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$$
$$\text{kendala } \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0},$$

atau

$$\min \bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{w}$$
$$\text{kendala } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{w} \text{ bebas tanda.}$$

Hasil dari keseluruhan pembahasan di atas diringkas dalam Tabel 6.2. Untuk hasil nomor 3 dalam Tabel 6.2, diserahkan kepada pembaca untuk membuktikannya. Untuk memudahkan pembaca, gunakan saja pasangan primal-dual nomor 1 untuk merubah bentuk primal ke bentuk dual dari sebarang program linear.

Tabel 6.2 Pasangan primal-dual

	Primal		Dual
1.	maks $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ kendala $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.	1.	min $\bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ kendala $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.
2.	maks $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ kendala $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.	2.	min $\bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ kendala $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y}$ bebas tanda.
3.	maks $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ kendala $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}$ bebas tanda.	3.	min $\bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ kendala $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

Contoh 6.3 Akan dicari dual dari

$$\text{maks } z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4$$
$$\text{kendala } 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 7$$
$$8x_1 + 9x_2 - 10x_3 = 11$$
$$12x_1 - 13x_2 + 14x_4 \geq 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.\ x_4 \text{ bebas tanda.}$$

Untuk memudahkan penggunaan sifat-sifat yang telah diperoleh pada Tabel 6.2, terlebih dahulu ubah bentuk program linear di atas menjadi bentuk primal yang ada pada tabel tersebut, yaitu

$$\begin{aligned}
&\text{maks } z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4\\
&\text{kendala} \quad 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 7\\
&\qquad 8x_1 + 9x_2 - 10x_3 = 11\\
&\qquad -12x_1 + 13x_2 - 14x_4 \le -15\\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0.\ x_4 \text{ bebas tanda.}
\end{aligned}$$

Kemudian perhatikan korespondensi antara kendala (variabel) primal (dual) dengan variabel (kendala) dual (primal). Lalu, dual dari masalah primal ini adalah

$$\begin{aligned}
&\min \bar{z} = 7y_1 + 11y_2 - 15y_3\\
&\text{kendala} \quad 4y_1 + 8y_2 - 12y_3 \ge 1\\
&\qquad 5y_1 + 9y_2 + 13y_3 \ge 2\\
&\qquad -6y_1 - 10y_2 \ge -2\\
&\qquad -14y_3 = 1 \quad \text{Sifat no.3}\\
&\qquad y_1, y_3 \ge 0, y_2 \text{ bebas tanda.}
\end{aligned}$$

Sifat no.2 Sifat no.3

Contoh 6.4 Akan dicari dual dari program linear

$$\begin{aligned}
&\min z = 2x_1 - 3x_2 + x_4\\
&\text{kendala} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7\\
&\qquad x_1 + 4x_2 - x_4 = 5\\
&\qquad x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 3\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{aligned}$$

Cara 1: Ubah fungsi tujuan menjadi masalah maksimisasi, dan tanda kendala ketiga menjadi "≤".

$$\begin{aligned}
&\text{maks } (-z) = -2x_1 + 3x_2 - x_4\\
&\text{kendala} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7\\
&\qquad x_1 + 4x_2 - x_4 = 5\\
&\qquad -x_2 - x_3 - 5x_4 \le -3\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{aligned}$$

Dualnya adalah

$$\begin{aligned} \min \bar{z} = 7w_1 + 5w_2 - 3w_3 & \\ \text{kendala} \quad w_1 + w_2 \qquad & \geq -2 \\ 2w_1 + 4w_2 - w_3 & \geq 3 \\ w_1 - \qquad w_3 & \geq 0 \\ - w_2 - 5w_3 & \geq -1 \\ w_1, w_3 \geq 0, w_2 \text{ bebas tanda.} & \end{aligned}$$

Cara 2: Pandang masalah minimisasi sebagai primal dan lakukan penyesuaian pada kendala; yaitu, ganti kendala pertama menjadi "≥".

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 - 3x_2 + x_4 & \\ \text{kendala} \quad -x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad & \geq -7 \\ x_1 + 4x_2 - \qquad x_4 & = 5 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 & \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0. \end{aligned}$$

Dualnya adalah

$$\begin{aligned} \text{maks } z' = -7w_1 + 5w_2 + 3w_3 & \\ \text{kendala} \quad -w_1 + w_2 \qquad & \leq 2 \\ -2w_1 + 4w_2 + w_3 & \leq -3 \\ -w_1 + \qquad w_3 & \leq 0 \\ - w_2 + 5w_3 & \leq 1 \\ w_1, w_3 \geq 0, w_2 \text{ bebas tanda.} & \end{aligned}$$

Teorema 6.1 (Teorema Dualitas Lemah) Jika $\boldsymbol{x}_0$ adalah suatu solusi layak dari maks $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ kendala $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{y}_0$ solusi layak dari min $\bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ kendala $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ maka $z = \bar{z}$; yaitu, $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$.

Bukti Pertimbangkan $\boldsymbol{x}_0$ sebagaimana di atas, dengan sifat-sifat perkalian matriks diperoleh (pembaca diminta untuk menelaahnya)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Ax}_0 &\leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{Ax}_0 &\leq \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_0 &\leq \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

dan juga dengan mempertimbangkan $\boldsymbol{y}_0$ sebagaimana di atas diperoleh

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}_0 &\geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}_0 &\geq \boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{c} \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

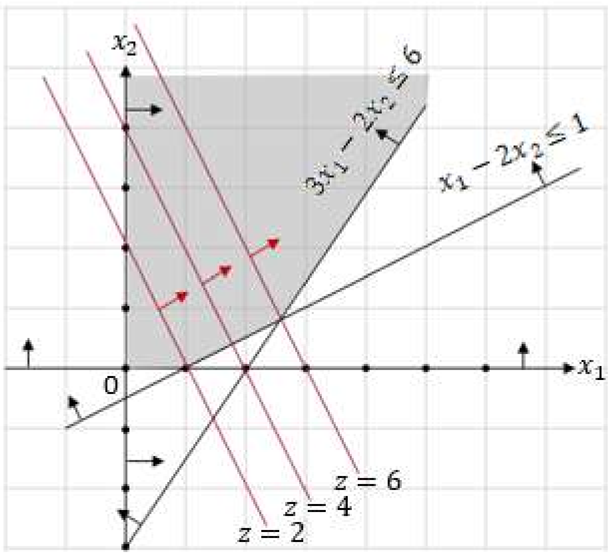
Dari (6.1) dan (6.2) diperoleh hubungan

$$\boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y}_0^T \boldsymbol{b} \text{ atau } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x_0} \leq \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}_0 \qquad \blacksquare$$

Contoh 6.5 Perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{kendala } \; 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ &\qquad\qquad\;\; x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ &\qquad\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solusi dengan grafik seperti yang terlihat pada Gambar 6.2 menunjukkan bahwa program linear ini memilki daerah solusi tak terbatas dan solusi optimalnya juga tak terbatas.

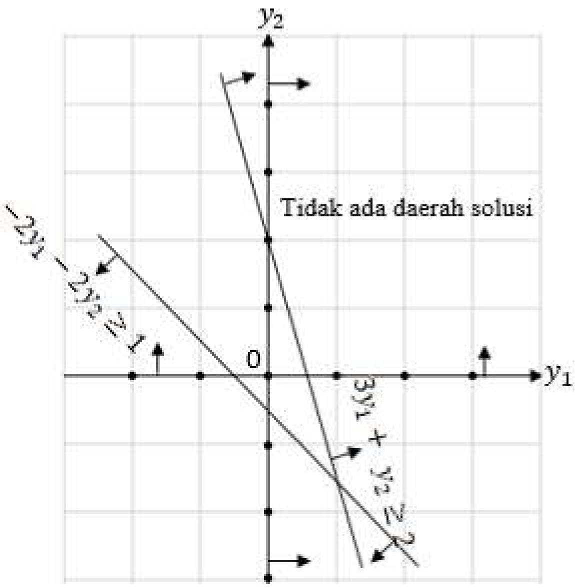


Gambar 6.2 Grafik menunjukkan solusi masalah primal tidak terbatas

Sekarang, perhatikan dual dari program linear di atas, yaitu

$$\begin{aligned} &\min \bar{z} = 6y_1 + y_2 \\ &\text{kendala } \; 3y_1 + \; y_2 \geq 2 \\ &\qquad\quad -2y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ &\qquad\qquad\quad y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Grafik dari dual di atas dapat dilihat pada Gambar 6.3. Pada gambar terlihat bahwa dual dari program linear tersebut tidak memiliki solusi.



Gambar 6.3 Grafik menunjukkan masalah dual tidak memiliki solusi

Dari kasus pada Contoh 6.5 diperoleh akibat sebagai berikut.

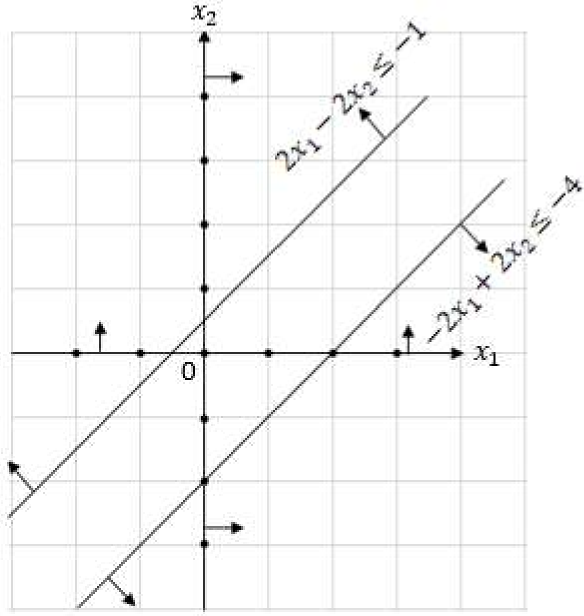
Akibat 6.2 Jika masalah primal (dual) mempunyai solusi optimal tak terbatas, maka dual (primal)-nya tidak layak atau tidak memiliki daerah solusi (bukti formal diserahkan kepada pembaca).

Apakah berlaku sebaliknya, yaitu jika primal tak layak maka dualnya tak terbatas? Untuk menjawab pertanyaan ini, perhatikan Contoh 6.6.

Contoh 6.6 Pertimbangkan program linear berikut:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{kendala } 2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ &\qquad -2x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Grafik dari program linear di atas dapat dilihat pada Gambar 6.3.



Gambar 6.1 Grafik menunjukkan masalah primal tidak memiliki solusi

Dari Gambar 6.3 terlihat bahwa program linear di atas tidak memiliki daerah solusi atau tak layak. Sekarang, pandang dual dari program linear tersebut, yaitu

$$\begin{aligned} &\min \bar{z} = -y_1 - 4y_2 \\ &\text{kendala} \quad 2y_1 - 2y_2 \geq 3 \\ &\qquad\qquad -2y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Kendala pertama dan kedua dari masalah dual di atas memperlihatkan bahwa masalah dual juga tidak mempunyai daerah solusi; dengan kata lain masalah dual di atas tidak layak. Jadi, jika primal tak layak maka dualnya juga tak layak (bukti formal diserahkan kepada pembaca).

Teorema 6.3 (Teorema Dualitas) Jika $\boldsymbol{x}_0$ suatu solusi fisibel untuk masalah primal, dan $\boldsymbol{y}_0$ suatu solusi fisibel untuk dual dari masalah yang sama, dan

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}_0 \,,$$

maka $\boldsymbol{x}_0$ adalah solusi optimal untuk primal, dan $\boldsymbol{y}_0$ solusi optimal untuk dual.

Bukti Anggaplah $\boldsymbol{x}_1$ sebarang solusi layak (tidak harus optimal) dari primal. Lalu, dari hasil sebelumnya diketahui bahwa

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_1 \le \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0,$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_1 \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0$ untuk sebarang $\boldsymbol{x}_1$ yang layak.

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ adalah solusi optimal untuk primal.

Seterusnya, anggaplah $\boldsymbol{y}_1$ sebarang solusi layak (tidak harus optimal) dari dual, lantas

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 \le \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1,$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0 \le \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1$ untuk sebarang $\boldsymbol{x}_1$ yang layak.

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{y}_0$ adalah solusi optimal untuk dual. ■

6.3 Hubungan Primal dan Dual

Pada subbab ini ditunjukkan hubungan yang erat antara masalah primal dan dual. Sesungguhnya, solusi optimal dari satu masalah langsung tersedia (tanpa melakukan komputasi) pada tabel simplex optimal masalah yang satunya lagi. Lebih-lebih lagi hubungan primal dan dual ini sangat penting dalam analisis sensitivitas.

Teorema 6.4 (*Slack* Komplementer) Pada sebarang pasangan solusi optimal masalah primal dan dualnya,

(a) untuk $i = 1, 2, \dots, m$, hasil kali variabel *slack* primal ke-i dan variabel dual ke-i adalah nol, yaitu $x_{n+i}y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

(b) untuk $j = 1, 2, \dots, n$, hasil kali variabel *slack* dual ke-j dan variabel primal ke-j adalah nol, yaitu $y_{m+j}x_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Bukti Akan dibuktikan bagian (a), bukti bagian (b) diserahkan kepada pembaca. Sebagaimana yang telah diperoleh sebelumnya, pasangan primal dan dual adalah sebagai berikut:

Primal	Dual
maks $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	min $\bar{z} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
kendala $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$	kendala $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$.	$\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$.

dengan

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Apabila vektor variabel *slack*

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{bmatrix},$$

ditambahkan, kendala primal dengan kehadiran variabel *slack* ini menjadi

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ix}' = \boldsymbol{b}.$$

Kedua ruas persamaan di atas dikalikan dengan $\boldsymbol{y}^T$ dari kiri sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}.$$

Anggaplah $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, dan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor optimal $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x}'_0$, dan $\boldsymbol{y_0}$, lantas

$$\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{Ax_0} + \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 = \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y_0}.$$

Ingat bahwa pada keadaan optimal $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0$. Mengganti $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0$ dengan $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{Ax_0})^T + \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0\,, \\
\boldsymbol{x_0}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0\,, \\
\boldsymbol{x_0}^T\boldsymbol{c} + \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 &\le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0\,, \\
\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 &\le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0\,, \\
\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 &\le 0\,.
\end{aligned}$$

Tetapi karena $\boldsymbol{y}_0$ dan $\boldsymbol{x}'_0 \ge 0$, maka $\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 \nless 0$, akibatnya pastilah $\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 = 0$. Selanjutnya $\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{x}'_0 = 0$ ditulis sebagai perkalian matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} & \cdots & y_{m_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1_0} \\ x_{n+2_0} \\ \vdots \\ x_{n+m_0} \end{bmatrix} = 0\,,$$

atau

$$y_{1_0}x_{n+1_0} + y_{2_0}x_{n+2_0} + \cdots + y_{m_0}x_{n+m_0} = 0\,.$$

Disini karena masing-masing suku tak negatif, maka setiap suku bernilai nol, yaitu

$$y_{i_0}x_{n+i_0} = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m. \qquad \blacksquare$$

Contoh 6.7 Pandang program linear berikut sebagai primal:

$$\text{maks } z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{kendala} \quad x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 18$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Solusi optimalnya adalah $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, dan $z = 12$. Dual dari program linear ini adalah

$$\min \bar{z} = 8y_1 + 18y_2$$

$$\text{kendala} \quad y_1 + 3y_2 \ge 2$$

$$2y_1 + 4y_2 \ge 1$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Periksa kendala primal pada keadaan optimal.

(i) Apakah $6 + (2)(0) \le 8$? Jawab: $6 < 8$, yaitu terdapat suatu *slack* positif (terminologi: kendala ini tidak mengikat (*nonbinding*)).

(ii) Apakah $(3)(6) + (4)(0) \le 18$? Jawab: $18 = 18$, yaitu terdapat *slack* 0 (terminologi: kendala ini mengikat (*binding*)).

Karena terdapat suatu *slack* positif pada kendala primal yang pertama, maka nilai variabel dual optimal yang berkorespondensi haruslah bernilai nol. Dari *Slack* Komplementer (*complementary slackness*) diproleh $y_1 = 0$. Selanjutnya karena $x_1 > 0$ maka slack dual yang pertama adalah 0, akibatnya kendala dual yang pertama mengikat, yaitu $3y_2 = 2$, atau $y_2 = 2/3$. Dari teorema dualitas diketahui $z_{\text{optimal}} = \bar{z}_{\text{optimal}}$, yaitu

$$\bar{z} = 8y_1 + 18y_2 = 8(0) + 18\left(\frac{2}{3}\right) = 12 = z.$$

Jadi, solusi optimal untuk dual adalah $y_1 = 0$, $y_2 = 2/3$, dan $\bar{z} = z = 12$.

Perhatikan kembali tabel simplex versi matriks yang telah dibahas pada Subbab 5.2, seperti tampak pada tabel berikut.

Iterasi ke-	Baris	Basis	z	Koefisien dari variabel		RK
				Asal	*Slack*	
0	0	z	1	$-\boldsymbol{c}^T$	$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}$	0
	$1-m$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{b}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Iterasi ke-	Baris	Basis	z	Koefisien dari variabel		RK
				Asal	*Slack*	
Seba-rang	0	z	1	$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^T$	$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
	$1-m$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

Pada tabel simplex, primal adalah vektor baris sedangkan dual adalah vektor kolom. Secara lebih khusus, perhatikan kembali dual dan tabel optimal PT Pelangi. Nilai variabel dual optimal y_1, y_2, y_3, dan y_4 masing-masing berkorespondensi dengan nilai s_1, s_2, s_3, dan s_4, yaitu $y_1 = 1/3$, $y_2 = y_2 = 4/3$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ dan

$$\bar{z} = 6\left(\frac{1}{3}\right) + 8\left(\frac{4}{3}\right) + 1(0) + 1(0) = \frac{38}{3} = 12\,\frac{2}{3} = z.$$

Pembaca dapat mencari nilai variabel dual optimal PT Pelangi dengan menggunakan *slack* komplementer dan teorema dualitas berdasarkan Tabel 6.3. Lihat soal latihan nomor 7 pada akhir bab ini.

Tabel 6.3 Tabel Optimal PT Pelangi

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RK
Optimal	z	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$
	x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
	x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	s_3	0	0	0	–1	1	1	0	3
	s_4	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

6.4 Metode Simplex Dual

Ketika menggunakan metode simplex untuk menyelesaikan suatu masalah maksimisasi (pandang sebagai masalah primal), bermula dengan suatu solusi layak primal (karena setiap kendala pada tabel awal mempunyai ruas kanan tak negatif). Karena sekurang-kurangnya satu variabel pada Baris 0 mempunyai koefisien negatif, maka solusi primal awal bukan layak dual. Melalui serangkaian iterasi simplex, kelayakan primal dipertahankan dan diperoleh solusi optimal bila kelayakan dual (Baris 0 tak negatif) dicapai. Dalam banyak keadaan, adalah lebih mudah untuk menyelesaikan suatu program linear bermula dengan suatu tabel yang setiap variabel pada Baris 0 mempunyai koefisien tak negatif (jadi tabel adalah fisibel dual), dan sekurang-kurangnya satu kendala memilki ruas kanan negatif (jadi tabel adalah tak layak primal). Metode simplex dual mempertahankan Baris 0 tak negatif (layak dual) dan akhirnya memperoleh suatu tabel yang setiap ruas kanannya tak negatif (layak primal). Pada keadaan ini, solusi optimal telah diperoleh. Karena teknik ini mempertahankan kelayakan dual, metode ini dinamakan metode simplex dual.

Metode simplex dual dapat dipakai (untuk masalah maksimisasi) bilamana terdapat suatu solusi basis yang setiap variabelnya memiliki koefisien tak negatif pada baris 0.

Contoh 6.8 Perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = -x_1 - 2x_2 \\ &\text{kendala} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ &\qquad\qquad 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Bentuk kanonik program linear di atas adalah

$$\begin{aligned} z + x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= -4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \qquad + x_5 &= -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

dan tabel simplex awalnya dapat dilihat pada Tabel 6.4.

Tabel 6.4

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RK
0	z	1	1	2	0	0	0	0
	x_4	0	–1	2	–1	1	0	– 4
	x_5	0	–2	–1	1	0	1	– 6

Dari Tabel 6.4 dapat dilihat bahwa kriteria optimalitas untuk masalah maksimisasi sudah terpenuhi, tetapi masalah ini tidak layak, karena ruas kanan negatif. Untuk itu metode simplex dual digunakan.

Sementara tinggalkan dulu Contoh 6.8 dan simak langkah-langkah metode simplex dual untuk masalah maksimisasi berikut:

Langkah 0 *Input* memenuhi kriteria optimalitas.

Langkah 1 Bentuk tabel awal.

Langkah 2 Periksa apakah ada variabel basis bernilai negatif. Jika tidak, ini menunjukkan solusi layak. Berhenti. Jika ada, lanjutkan ke Langkah 3.

Langkah 3 Dapatkan baris *pivot* dengan memilih elemen (ruas kanan) paling negatif. (Pilih sebarang jika lebih dari satu)

Langkah 4 Adakah elemen pada baris *pivot*, di sebelah kiri ruas kanan, bernilai negatif? Jika tidak, ini menunjukkan tidak terdapat solusi layak. Berhenti. Jika ada, lanjutkan ke Langkah 5.

Langkah 5 Dapatkan kolom *pivot*: Bentuk rasio Baris 0 dengan baris *pivot* negatif. Pilih rasio yang terbesar (pilih sebarang jika lebih dari satu). Ini menentukan kolom *pivot*

Langkah 6 Bentuk tabel baru dengan *pivoting* (melakukan iterasi) dan kembali ke Langkah 2.

Kembali ke Contoh 6.8, iterasi simplex dual mulai dari tabel awal sampai tabel optimal dapat dilihat pada Tabel 6.5.

Tabel 6.5

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RK
0	z	1	1	2	0	0	0	0
	x_4	0	–1	2	–1	1	0	– 4
	x_5	0	–2	–1	1	0	1	– 6
	Rasio		$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{2}{-1} = -2$				
1	z	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	–3
	x_4	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	–1
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
	Rasio				$\frac{1/2}{-3/2} = -\frac{1}{3}$		$\frac{1/2}{-1/2} = -1$	
2 (Optimal)	z	1	0	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$
	x_3	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	x_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

Soal-Soal Latihan

1. Carilah dual dari program linear

$$\text{maks } z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{kendala} \quad x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Carilah dual dari program linear

$$\begin{aligned} \min z &= 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ \text{kendala}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Carilah dual dari program linear

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{kendala}\quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ & 4x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

4. Carilah dual dari program linear

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{kendala}\quad & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 10 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 5 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 8 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 15 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

5. Tunjukkanlah dengan menggunakan Teorema Dualitas dan *Slack* Komplementer bahwa $x_1 = \frac{5}{26}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, dan $x_3 = \frac{27}{26}$ merupakan solusi optimal untuk program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 9x_1 + 14x_2 + 7x_3 \\ \text{kendala}\quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \text{ bebas tanda} \end{aligned}$$

(Petunjuk: formulasikan bentuk dualnya)

6. Pertimbangkan masalah program linear

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{kendala } \; x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1 + x_2 &\le 8 \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 26 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan prinsip *Slack* Komplementer, tunjukkanlah bahwa $y_1 = 0$ pada sebarang solusi optimal masalah dual.

7. Carilah nilai variabel dual optimal PT Pelangi dengan menggunakan prinsip *Slack* Komplementer dan Teorema Dualitas (Teorema 6.3).

8. Anggaplah bahwa $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$ merupakan solusi optimal untuk program linear

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{kendala } \; 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan prinsip *Slack* Komplementer dan Teorema Dualitas, carilah solusi optimal untuk masalah dual. Berapakah nilai fungsi tujuan dari masalah dual pada solusi optimal?

9. Selesaikanlah program linear berikut dengan metode simplex dual:

$$\begin{aligned} \text{min } z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{kendala } \; 2x_1 + 3x_2 &\le 30 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

10. Selesaikanlah program linear berikut dengan metode simplex dual:

$$\begin{aligned} \text{min } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{kendala } \; 3x_1 + x_2 &\ge 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 6 \\ x_1 + 2x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

REFERENSI TERPILIH

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. J. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*, 2nd Edition. Wiley India, Delhi, 2008.

R. Bronson and G. Naadimuthu. *Operations Research*: *Theory and Problems, Schaum's Outlines,* 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1997.

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1995.

C. Leon and D. Steinberg. *Methods and Applications of Linear Programming*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1974.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.