5

BENTUK MATRIKS DARI TABEL SIMPLEX

Pada Bab 4 telah dipelajari cara menyelesaikan masalah program linear dengan menggunakan metode simplex baik secara aljabar maupun dengan menggunakan tabel. Dengan menggunakan tabel simplex komputasi terasa lebih mudah. Pada bab ini dibahas penurunan aljabar dari setiap komponen tabel simplex sehingga diharapkan pembaca mampu menghitung angka-angka dari komponen tersebut secara aljabar. Aljabar tabel simplex ini sangat berguna nantinya ketika membahas dualitas dan analisis sensitivitas.

5.1 Penurunan Aljabar dari Tabel Simplex

Pandang kembali persoalan PT Pelangi,

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{kendala } x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bentuk umum dari program linear di atas adalah

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{kendala } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

dengan

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan kembali bentuk kanonik dari program linear PT Pelangi.

$$\begin{aligned}
z - 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0\\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 6\\
2x_1 + x_2 + \qquad x_4 \qquad\qquad &= 8\\
-x_1 + x_2 + \qquad\qquad x_5 \qquad &= 1\\
x_2 + \qquad\qquad\qquad x_6 &= 2\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0.
\end{aligned}$$

dengan $x_3, x_4, x_5,$ dan x_6 adalah variabel-variabel *slack*.

Dalam bentuk matriks bentuk kanonik ini bisa ditulis

$$z - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 0$$

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

dengan

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}.$$

Secara umum, jika m adalah jumlah kendala dan n jumlah variabel maka

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Dengan menambahkan vektor variabel *slack*

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix}x_{n+1}\\ x_{n+2}\\ \vdots\\ x_{n+m}\end{bmatrix}$$

dan matriks $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$, maka bentuk kanonik secara umum adalah

$$z - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 0$$

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

dengan

$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ adalah matriks berukuran $m \times (m+n)$

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix}$ vektor kolom berukuran $(m+n) \times 1$.

Sekarang, pilihlah submatriks dari $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ yang merupakan matriks basis sekarang yang kolom-kolomnya terdiri dari koefisien-koefisien variabel basis. Namakan submatriks ini $\boldsymbol{B}$, lantas

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}.$$

dengan $\boldsymbol{x}_B$ adalah vektor basis sekarang. Kemudian diperoleh

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

dan z dihitung dengan menggunakan

$$z = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

dengan $\boldsymbol{c}_B$ koefisien fungsi tujuan yang berkorespondensi dengan $\boldsymbol{x}_B$.

Contoh 5.1 Perhatikan kembali tabel simplex masalah PT Pelangi.

***Pada Iterasi 0*:**

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RK
	z	1	–3	– 2	0	0	0	0	0
	x_3	0	1	2	1	0	0	0	6
0	x_4	0	2	1	0	1	0	0	8
	x_5	0	–1	1	0	0	1	0	1
	x_6	0	0	1	0	0	0	1	2

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$z = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Pada Iterasi 1:

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RK
1	z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	12
	x_3	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
	x_5	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
	x_6	0	0	1	0	0	0	1	2

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$z = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 12.$$

***Pada Iterasi 2*:**

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RK
2	z	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$
	x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
	x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	x_5	0	0	0	-1	1	1	0	3
	x_6	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$z = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = 12\frac{2}{3}.$$

5.2 Komputasi Komponen-Komponen Tabel Simplex

Perhatikan kembali persoalan program linear dalam bentuk kanonik yang umum

$$z - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 0,$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{b},$$

atau

$$\begin{aligned} z - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \qquad &= 0,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_s &= \boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dalam bentuk matriks sistem persamaan (5.1) dapat ditulis

$$\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{c}^T & 0\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}.$$

Sebelumnya telah diperoleh

$$z = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

atau

$$z - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B = 0,$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b},$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{c}_B^T\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ \boldsymbol{x}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}.$$

Kemudian diperoleh (diserahkan kepada pembaca untuk mencarinya)

$$\begin{bmatrix}z\\ \boldsymbol{x}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Persamaan (5.2) berlaku untuk sebarang iterasi. Khusus untuk Iterasi 0 selalu berlaku

$$\begin{bmatrix}z\\ \boldsymbol{x}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}.$$

Karena

$$\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

maka untuk sebarang iterasi berlaku

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}^T & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix},$$

atau

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

Persamaan (5.3) dapat ditulis dalam bentuk tabel sebagaimana yang dapat dilihat pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Tabel simplex versi matriks

<table>
<tr><th rowspan="2">Iterasi ke-</th><th rowspan="2">Baris</th><th rowspan="2">Basis</th><th rowspan="2">z</th><th colspan="2">Koefisien dari variabel</th><th rowspan="2">RK</th></tr>
<tr><th>Asal</th><th>Slack</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>z</td><td>1</td><td>$-\boldsymbol{c}^T$</td><td>$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$1-m$</td><td>$\boldsymbol{x}_B$</td><td>$\boldsymbol{0}$</td><td>$\boldsymbol{A}$</td><td>$\boldsymbol{I}$</td><td>$\boldsymbol{b}$</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Iterasi ke-</th><th rowspan="2">Baris</th><th rowspan="2">Basis</th><th rowspan="2">z</th><th colspan="2">Koefisien dari variabel</th><th rowspan="2">RK</th></tr>
<tr><th>Asal</th><th>Slack</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Seba-rang</td><td>0</td><td>z</td><td>1</td><td>$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^T$</td><td>$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}$</td><td>$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$</td></tr>
<tr><td>$1-m$</td><td>$\boldsymbol{x}_B$</td><td>$\boldsymbol{0}$</td><td>$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$</td><td>$\boldsymbol{B}^{-1}$</td><td>$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$</td></tr>
</table>

Contoh 5.2 Lihat kembali tabel simplex persoalan PT Pelangi.

***Pada Iterasi 1*:**

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B^{-1}A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B^{-1}} = [0 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 12.$$

$$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B^{-1}A} - \boldsymbol{c}^T = [0 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [3 \quad 2]$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - [3 \quad 2] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

***Pada Iterasi 2*:**

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B^{-1}A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{c_B^T B^{-1}} = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{c_B^T B^{-1} b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 12\frac{2}{3}.$$

$$\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^T = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - [3 \quad 2]$$

$$= [3 \quad 2] - [3 \quad 2] = [0 \quad 0].$$

Soal-Soal Latihan

1. Kerjakan tabel simplex persoalan PT Bajaku seperti pada Contoh 4.2.
2. Pertimbangkan masalah berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{kendala } 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Misalkan x_4, x_5, dan x_6 adalah variabel *slack* untuk kendala berurutan. Setelah menerapkan metode simplex, bagian dari tabel optimal adalah sebagai berikut:

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RK
Optimal	z	1				1	1	0	
	x_2	0				1	3	0	
	x_6	0				0	1	1	
	x_3	0				1	2	0	

Gunakan bentuk matriks tabel simplex untuk mencari bilangan yang hilang pada tabel akhir tersebut. Perlihatkan perhitungan anda.

3. Pertimbangkan persoalan berikut:

$$\text{maks } z = 6x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{kendala } 2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2$$

$$-4x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Misalkan x_4, x_5, dan x_6 adalah variabel *slack* untuk kendala berurutan. Setelah menerapkan metode simplex, bagian dari tabel optimal adalah sebagai berikut:

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RK
Optimal	z	1				2	0	2	
	x_5	0				1	1	2	
	x_3	0				– 2	0	4	
	x_1	0				1	0	– 1	

Gunakan bentuk matriks tabel simplex untuk mencari bilangan yang hilang pada tabel akhir tersebut. Perlihatkan perhitungan anda.

4. Pertimbangkan persoalan berikut.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{kendala } x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 \qquad \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Misalkan x_4 dan x_6 adalah variabel surplus masing-masing untuk kendala pertama dan kedua. Misalkan $\bar{x}_5$ dan $\bar{x}_7$ variabel artifisial yang berkorespondensi. Setelah dilakukan beberapa penyesuaian untuk metode *M*-

Besar, tabel simplex awal yang siap untuk diterapkan metode simplex adalah sebagai berikut:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RK
z	-1	$-4M+2$	$-6M+3$	$-2M+2$	M	0	M	0	$-14M$
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

Setelah menerapkan metode simplex, bagian dari tabel akhir optimal adalah sebagai berikut:

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RK
z	-1					$M-0{,}5$		$M-0{,}5$	
x_2	0					0,3		$-0{,}1$	
x_1	0					$-0{,}2$		0,4	

Gunakan bentuk matriks tabel simplex untuk mencari bilangan yang hilang pada tabel akhir tersebut. Perlihatkan perhitungan anda.

REFERENSI TERPILIH

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. J. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*, 2nd Edition. Wiley India, Delhi, 2008.

R. Bronson and G. Naadimuthu. *Operations Research*: *Theory and Problems*, *Schaum's Outlines*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1997.

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1995.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.