4

METODE SIMPLEX

Pada Bab 3 telah dipelajari cara menyelesaikan masalah program linear yang mempunyai dua variabel secara grafik. Pada kenyataannya program linear mempunyai banyak variabel, sehingga suatu metode diperlukan untuk menyelesaikan program linear yang memiliki lebih dari dua variabel. Dalam bab ini disajikan metode simplex yang digunakan untuk menyelesaikan program linear, bahkan program linear berskala besar yang diterapkan di industri-industri yang meliputi ribuan kendala dan ribuan variabel.

4.1 Mengubah Program Linear ke Dalam Bentuk Standar

Pandang kembali masalah PT Pelangi,

$$\begin{aligned}
\text{maks } z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{kendala } x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + \ x_2 &\leq 8 \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

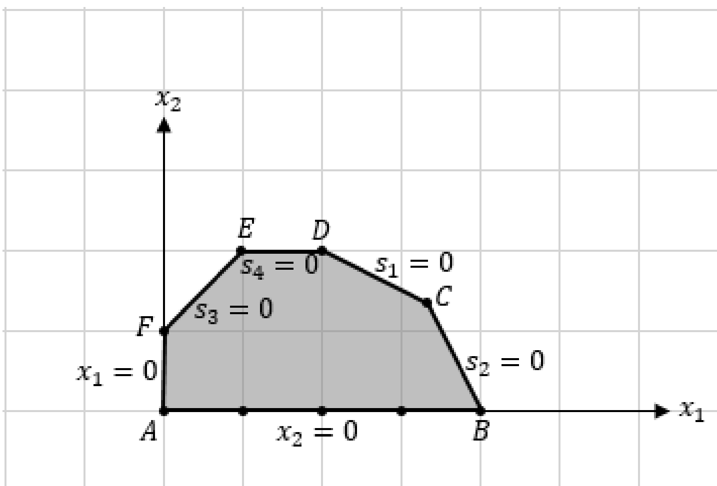
Sebelum menggunakan metode simplex, masalah program linear terlebih dahulu harus diubah menjadi suatu masalah yang ekivalen yang semua kendalanya dalam bentuk persamaan dan semua variabel tidak negatif. Program linear dalam bentuk ini dinamakan program linear dalam bentuk standar. Untuk mengubah kendala $'\leq'$ menjadi kendala $'='$ didefinisikan untuk setiap kendala $'\leq'$ suatu variabel *slack* s_i; s_i adalah variabel *slack* untuk kendala ke-i. Variabel *slack* untuk semua kendala masalah PT Pelangi adalah

$$s_1 = 6 - x_1 - 2x_2 \text{ atau } x_1 + 2x_2 + s_1 = 6.$$
$$s_2 = 8 - 2x_1 - x_2 \text{ atau } 2x_1 + x_2 + s_2 = 8.$$
$$s_3 = 1 + x_1 - x_2 \text{ atau } -x_1 + x_2 + s_3 = 1.$$
$$s_4 = 2 - x_2 \text{ atau } x_2 + s_4 = 2.$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Selanjutnya, program linear PT Pelangi dalam bentuk standar ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2 & & & & & & & \\
\text{kendala } & x_1 + & 2x_2 + & s_1 & & & & = 6 \\
& 2x_1 + & x_2 + & & s_2 & & & = 8 \\
& -x_1 + & x_2 + & & & s_3 & & = 1 \\
& & x_2 + & & & & s_4 & = 2 \\
& & & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0. & & &
\end{array}$$

Gambar 4.1 menunjukkan daerah solusi dengan adanya variabel *slack*. Setiap titik pada daerah ini dapat ditunjukkan dalam bentuk variabel x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, dan s_4 dari bentuk standar. Untuk menunjukkan titik ini, selidikilah bahwa $s_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$, mereduksi persamaan menjadi suatu garis (*edge*) dari daerah solusi. Sebagai contoh, $s_1 = 0$ ekivalen dengan $x_1 + 2x_2 = 6$, yang menunjukkan segmen garis CD.



Gambar 4.1 Hubungan daerah solusi dengan variabel *slack*

Jika $s_i > 0$, titik-titik layak yang berada pada garis akan bergeser ke arah dalam daerah solusi. Secara aljabar setiap titik ekstrim atau titik sudut dapat dikaitkan dengan nilai x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, dan s_4, berkenaan apakah nilai variabel tersebut sama dengan nol atau tidak. Perhatikan pola pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Hubungan titik ekstrim dengan variabel bernilai nol

Titik ekstrim	Variabel bernilai nol	Variabel tidak bernilai nol
A	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4
B	x_2, s_2	x_1, s_1, s_3, s_4
C	s_1, s_2	x_1, x_2, s_3, s_4
D	s_1, s_4	x_1, x_2, s_2, s_3
E	s_3, s_4	x_1, x_2, s_1, s_2
F	x_1, s_3	x_2, s_1, s_2, s_4

Dari pola tersebut terlihat bahwa

(i) Karena bentuk standar mempunyai empat persamaan (kendala) dan enam variabel, setiap titik ekstrim pasti memilki 2 (= 6 – 4) variabel bernilai nol.

(ii) Titik ekstrim yang berdekatan hanya berbeda satu variabel.

Misalkan program linear dalam bentuk standar mempunayai m persamaan dan n variabel ($m \leq n$) serta variabel tidak negatif. Solusi yang diperoleh dengan menetapkan sebanyak $n - m$ variabel sama dengan nol dinamakan solusi basis. Jika suatu solusi basis memenuhi kendala tidak negatif, solusi basis tersebut dinamakan solusi layak basis. Variabel-variabel yang ditetapkan sama dengan nol dinamakan variabel nonbasis, sisanya dinamakan variabel basis.

Kesimpulan umum adalah bahwa definisi aljabar dari solusi basis pada metode simplex menggantikan titik ekstrim pada grafik daerah solusi. Akibatnya, jumlah maksimum iterasi metode simplex sama dengan jumlah maksimum solusi basis dalam bentuk standar. Ini berarti bahwa jumlah iterasi metode simplex tidak lebih dari

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

4.2 Prosedur Metode Simplex

Perhatikan kembali masalah PT Pelangi dalam bentuk standar

$$\begin{aligned}
&\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{kendala } x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\
&\qquad -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
&\qquad x_2 + s_4 = 2 \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Selanjutnya masalah di atas ditulis dalam *bentuk kanonik* dan melabel kendala berturut-turut dengan Baris1, Baris 2, Baris 3, dan Baris 4. Fungsi tujuan diberi label Baris 0 dan ditulis

$$z - 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Bentuk kanonik yang diperoleh adalah seperti yang terlihat pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Bentuk kanonik masalah PT Pelangi

			Basis
Baris 0	$z - 3x_1 - 2x_2$	$= 0$	$z = 0$
Baris 1	$x_1 + 2x_2 + s_1$	$= 6$	$s_1 = 6$
Baris 2	$2x_1 + x_2 + s_2$	$= 8$	$s_2 = 8$
Baris 3	$-x_1 + x_2 + s_3$	$= 1$	$s_3 = 1$
Baris 4	$x_2 + s_4$	$= 2$	$s_4 = 2$

Dengan inspeksi dapat dilihat bahwa jika ditetapkan $x_1 = x_2 = 0$, diperoleh nilai $s_1, s_2, s_3,$ dan s_4 dengan menyamakan s_i dengan ruas kanan baris ke-i. Variabel s_4 dinamakan variabel basis dan variabel x_1 dan x_2 dinamakan variabel nonbasis. Variabel basis didefinisikan juga sebagai variabel yang muncul dengan koefisien satu pada satu baris dan koefisien nol pada baris lainnya. Karena z muncul pada Baris 0 dengan koefisien satu dan z tidak muncul pada baris lainnya, maka z digunakan sebagai variabel basis untuk Baris 0. Solusi layak basis bentuk kanonik ini adalah

$$\text{Basis} := \{z, s_1, s_2, s_3, s_4\} \text{ dan Nonbasis} := \{x_1, x_2\}.$$

Untuk solusi layak basis ini diperoleh $z = 0$, $s_1 = 6$, $s_2 = 8$, , $s_3 = 1$, $s_4 = 2$, $x_1 = x_2 = 0$. Sebagaimana terlihat di atas bahwa suatu variabel *slack* dapat digunakan sebagai variabel basis untuk suatu persamaan (kendala) jika ruas kanan kendala tidak negatif.

Setelah diperoleh solusi layak basis awal, perlu ditentukan apakah solusi itu sudah optimal. Jika belum optimal, dicoba untuk mencari solusi layak basis lain yang berdekatan dengan solusi layak basis awal ini. Karena masalahnya adalah masalah maksimisasi, solusi layak basis berdekatan yang dimaksud haruslah memiliki nilai fungsi tujuan z yang lebih besar daripada nilai fungsi tujuan dari solusi layak basis awal. Untuk maksud ini ditulis

$$z = 3x_1 + 2x_2.$$

Kemudian untuk setiap variabel nonbasis x_i, dicoba untuk menaikkan nilai sebuah x_i sebesar satu unit dan membiarkan x_i yang lain tetap 0. Karena menaikkan satu unit x_1 memberikan kontribusi terbesar untuk nilai z daripada menaikkan satu unit x_2, maka x_1 dipilih untuk dinaikkan nilainya dari nilainya yang sekarang (nol). Jika x_1 dinaikkan dari nilai nol yang sekarang, x_1 harus menjadi variabel basis (istilah lain: x_1 masuk basis). Untuk maksud ini, x_1 dinamakan variabel yang masuk (*entering variable*). Perhatikan pada Baris 0, x_1 mempunyai nilai yang *paling negatif*.

Karena setiap kenaikan satu unit x_1 menaikkan nilai z sebesar 3, maka dicoba menaikkan nilai x_1 sebesar mungkin. Paling tinggi berapa besar x_1 dapat dinaikkan? Untuk menjawab ini, perlu diketahui bahwa setiap kenaikan x_1, nilai variabel basis sekarang (s_1, s_2, s_3, dan s_4) akan berubah. Dengan membiarkan $x_2 = 0$, pada Baris 1 sampai 4 dapat dilihat bahwa

$$\left.\begin{aligned} x_1 + s_1 &= 6 \\ 2x_1 + s_2 &= 8 \\ -x_1 + s_3 &= 1 \\ s_4 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{atau} \left\{\begin{aligned} s_1 &= 6 - x_1 \\ s_2 &= 8 - 2x_1 \\ s_3 &= 1 + x_1 \\ s_4 &= 2 \end{aligned}\right.$$

Nilai x_1 hanya dapat dinaikkan selama $s_i \geq 0$, yaitu

$$s_1 \geq 0 \text{ untuk } x_1 \leq \frac{6}{1} = 6$$

$$s_2 \geq 0 \text{ untuk } x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$$

$s_3 \geq 0$ untuk semua nilai x_1

$s_4 \geq 0$ untuk semua nilai x_1.

Ini berarti bahwa untuk mempertahankan nilai variabel basis ($s_1, s_2, s_3,$ dan s_4) tidak negatif, nilai x_1 terbesar yang dapat diambil adalah min $\left\{\frac{6}{1}, \frac{8}{2}\right\} = 4$. Jika $x_1 > 4$, maka s_2 menjadi negatif. Secara formal besarnya nilai *entering variable* tidak boleh lebih dari

$$\frac{\text{Ruas kanan baris}}{\text{Koefisien } \textit{entering variable} \text{ pada baris itu}}.$$

Ini dinamakan *uji rasio***.** Kendala dengan rasio terkecil dinamakan *pemenang uji rasio*. Rasio terkecil adalah nilai *entering variable* terbesar yang akan mempertahankan variabel basis sekarang tetap tidak negatif. Pada masalah di atas, Baris 2 adalah pemenang uji rasio bagi masuknya x_1 ke dalam basis. Untuk itu x_1 akan menjadi basis pada Baris 2 menggantikan kedudukan s_2. Variabel s_2 dinamakan variabel yang akan meninggalkan basis (*leaving variable*).

Untuk menjadikan x_1 sebagai variabel basis pada Baris 2, digunakan operasi baris elementer (OBE) sehingga x_1 mempunyai koefisien 1 pada Baris 2, dan koefisien 0 pada baris yang lain. Prosedur ini dinamakan melakukan *pivot* (*pivoting*) pada Baris 2, dan Baris 2 dinamakan baris pivot. Sedangkan kolom yang bersesuaian dengan variabel x_1 dinamakan kolom pivot. Proses *pivoting* dilakukan melalui serangkaian OBE berikut:

(i) Bagi Baris 2 dengan 2 sehingga diperoleh baris 2 yang baru, yaitu

$$\text{Baris 2'}: \; x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}s_2 = 4.$$

(ii) Baris 0 dikurang -3 dikali Baris 2' menghasilkan Baris 0 yang baru, yaitu

$$\text{Baris 0'}: \; z - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}s_2 = 12.$$

(iii) Baris 1 dikurang 1 dikali Baris 2' menghasilkan Baris 1 yang baru, yaitu

$$\text{Baris 1'}: \; \frac{3}{2}x_2 + s_1 - \frac{1}{2}s_2 = 2$$

(iv) Baris 3 dikurang -1 dikali Baris 2' menghasilkan Baris 3 yang baru, yaitu

$$\text{Baris 3'}: \; \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}s_2 + s_3 = 5.$$

(v) Karena koefisien x_1 pada Baris 4 sudah sama dengan 0, maka Baris 4 yang baru sama dengan Baris 4 yang sekarang, yaitu

Baris 4’: $x_2 + s_4 = 2$.

Keseluruhan hasil *pivoting* dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Hasil proses *pivoting* pada Baris 2

									Basis
Baris 0’	$z -$		$\frac{1}{2}x_2 +$		$\frac{3}{2}s_2$			$= 12$	$z = 12$
Baris 1’			$\frac{3}{2}x_2 +$	$s_1 -$	$\frac{1}{2}s_2$			$= 2$	$s_1 = 2$
Baris 2’		$x_1 +$	$\frac{1}{2}x_2 +$		$\frac{1}{2}s_2$			$= 4$	$x_1 = 4$
Baris 3’			$\frac{3}{2}x_2 +$		$\frac{1}{2}s_2 +$	s_3		$= 5$	$s_3 = 5$
Baris 4’			$x_2 +$				s_4	$= 2$	$s_4 = 2$

Dengan mencari variabel basis pada setiap baris, diperoleh

$$\text{Basis} := \{z, s_1, x_1, s_3, s_4\} \text{ dan Nonbasis} := \{s_2, x_2\}.$$

Solusi layak basis yang diperoleh adalah $z = 12$, $s_1 = 2$, $x_1 = 4$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$, $s_2 = x_2 = 0$.

Dengan melakukan kembali prosedur yang sama, tulis

$$z = 12 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}s_2.$$

Dapat dilihat bahwa dengan menaikkan nilai variabel nonbasis s_2 sebesar satu unit (sementara $x_2 = 0$) akan mengurangi nilai z sebesar $\frac{3}{2}$. Ini tidak diinginkan. Sebaliknya dengan menaikkan x_2 sebesar 1 unit (sementara $s_2 = 0$) akan menaikkan z sebesar $\frac{1}{2}$. Jadi x_2 sebagai *entering variable* akan menjadi basis. Dari Baris 0’ dapat dilihat bahwa x_2 mempunyai koefisien paling negatif (kebetulan satu-satunya koefisien negatif)

Untuk menentukan nilai x_2 terbesar yang layak, tetapkan $s_2 = 0$. Dari Baris 1’ – 4’ dapat dilihat bahwa

$$s_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2$$

$$x_1 = 4 - \frac{1}{2}x_2$$

$$s_3 = 5 - \frac{3}{2}x_2$$

$$s_4 = 2 - x_2$$

Nilai x_2 dapat dinaikkan selama $s_1, x_1, s_3, s_4 \geq 0$, yaitu

$$s_1 \geq 0 \text{ untuk } x_2 \leq \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$x_1 \geq 0 \text{ untuk } x_2 \leq \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$s_3 \geq 0 \text{ untuk } x_2 \leq \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$s_4 \geq 0 \text{ untuk } x_2 \leq 2.$$

Nilai x_2 terbesar yang dapat diambil adalah

$$\min\left\{\frac{2}{\frac{3}{2}}, \frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{5}{\frac{3}{2}}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{4}{3}.$$

Jadi x_2 akan menjadi variabel basis pada Baris 1'. Untuk itu dilakukan OBE sedemikian sehingga x_2 mempunyai koefisien 1 pada Baris 1' dan koefisien 0 pada baris lainnya. Kemudian, melalui serangkaian OBE diperoleh Tabel 4.4.

Dengan mencari variabel basis pada setiap baris diperoleh

$$\text{Basis} := \{z, x_2, x_1, s_3, s_4\} \text{ dan Nonbasis} := \{s_1, s_2\}.$$

Solusi layak basis yang diperoleh adalah $z = 12\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{10}{3}$, $s_3 = 3$, $s_4 = \frac{2}{3}$, $s_1 = s_2 = 0$. Apakah masih ada solusi layak basis yang lebih baik? Untuk itu kembali tuliskan

$$z = 12\frac{2}{3} - \frac{1}{3}s_1 - \frac{4}{3}s_2.$$

Tabel 4.4 Hasil proses *pivoting* pada Baris 1’

				Basis
Baris 0”	$z +$	$\frac{1}{3}s_1 + \frac{4}{3}s_2$	$= 12\frac{2}{3}$	$z = 12\frac{2}{3}$
Baris 1”		$x_2 + \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{2}s_2$	$= \frac{1}{3}$	$x_2 = \frac{1}{3}$
Baris 2’	$x_1 -$	$\frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_2$	$= \frac{10}{3}$	$x_1 = \frac{10}{3}$
Baris 3”		$- \ s_1 + \ s_2 + s_3$	$= 3$	$s_3 = 3$
Baris 4”		$-\frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \quad s_4$	$= \frac{2}{3}$	$s_4 = \frac{2}{3}$

Tampak bahwa menaikkan nilai salah satu variabel nonbasis sebesar 1 unit akan menurunkan nilai z, sebab $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$ dan $-\frac{1}{3}s_1 \leq 0$, $-\frac{4}{3}s_2 \leq 0$. Akibatnya

$$z = 12\frac{2}{3} - [\text{sesuatu yang besar atau sama dengan nol}] \leq 12\frac{2}{3}.$$

Jadi, solusi layak basis ini sudah optimal.

4.3 Tabel Simplex

Daripada harus menulis variabel pada setiap kendala, sering digunakan suatu tampilan ringkas yang dinamakan tabel simplex. Sebagai contoh, bentuk kanonik dari masalah PT Pelangi

$$\begin{aligned}
z - 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0\\
x_1 + 2x_2 + s_1 \qquad\qquad\quad &= 6\\
2x_1 + \ x_2 + \qquad s_2 \qquad\quad &= 8\\
-x_1 + \ x_2 + \qquad\qquad s_3 \quad &= 1\\
x_2 + \qquad\qquad\quad s_4 &= 2
\end{aligned}$$

dapat ditulis dalam bentuk yang ringkas seperti tampak pada Tabel 4.5. (RK adalah singkatan untuk ruas kanan)

Tabel 4.5 Tabel simplex awal masalah PT Pelangi

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RK
z	1	– 3	– 2	0	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	– 1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Bentuk ini memudahkan dalam menentukan variabel basis: Cari saja kolom yang memiliki satu-satunya elemen 1 (elemen lainnya 0), sebagai contoh lihat Tabel 4.5, $s_1, s_2, s_3,$ dan s_4 adalah variabel basis. Untuk perhitungan yang lengkap, dari tabel awal sampai tabel optimal dapat dilihat pada Tabel 4.6 sampai dengan Tabel 4.8.

Perpotongan antara baris pivot dengan kolom pivot diperoleh *elemen pivot* (pada tabel ditandai dengan warna biru). Pada tabel, baris dan kolom *pivot* ditandai dengan warna abu-abu. Agar *entering variable* menjadi variabel basis pada baris yang memenangkan uji rasio, elemen *pivot* harus sama dengan 1. Prosedur yang digunakan untruk bergerak dari satu solusi layak basis ke solusi layak basis yang lebih baik (dari satu tabel ke tabel berikutnya) dinamakan juga dengan *iterasi*.

Langkah-langkah metode simplex untuk masalah maksimisasi dapat diringkas sebagai berikut:

Langkah 1 Bentuk tabel awal dalam bentuk standar.

Langkah 2 Periksa apakah ada elemen negatif pada Baris 0. Jika tidak, menunjukkan solusi sudah optimal. Jika ada, cari kolom *pivot* dengan memilih elemen yang paling negatif pada Baris 0 (pilih sebarang jika terdapat lebih dari satu).

Langkah 3 Periksa apakah ada elemen positif pada kolom *pivot* di bawah Baris 0. Jika tidak, menunjukkan bahwa tidak ada solusi optimal berhingga. Jika ada, cari baris *pivot* dengan cara melakukan uji rasio dan pilih rasio terkecil (pilih sebarang jika terdapat lebih dari satu pemenang).

Langkah 4 Bentuk tabel baru dengan *pivoting* (melakukan iterasi) dan kembali ke Langkah 1.

Tabel 4.6 Tabel awal atau iterasi 0 masalah PT Pelangi

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RK	Rasio
z	1	–3	– 2	0	0	0	0	0	
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6	$\frac{6}{1}=6$
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8	$\frac{8}{2}=4$
s_3	0	–1	1	0	0	1	0	1	—
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	—

Tabel 4.7 Iterasi 1 masalah PT Pelangi

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RK	Rasio
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	12	
s_1	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2	$\frac{2}{3/2}=\frac{4}{3}$
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4	$\frac{4}{1/2}=8$
s_3	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5	$\frac{5}{3/2}=\frac{10}{3}$
s_4	0	0	0	0	0	0	1	2	—

Tabel 4.8 Tabel optimal PT Pelangi

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RK	
z	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$	Optimal
x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$	
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
s_4	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	

4.4 Menggunakan Metode Simplex untuk Minimisasi

Ada dua cara dalam menggunakan metode simplex untuk menyelesaikan masalah minimisasi. Kedua cara itu dijelaskan dengan menyelesaikan program linear PL 1 berikut:

$$\left.\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ \text{kendala } x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(PL 1)}$$

Cara 1

Solusi optimal untuk PL 1 adalah titik (x_1, x_2) pada daerah fisibel PL 1 yang membuat $z = 2x_1 - 3x_2$ paling kecil. Secara ekuivalen, dapat dikatakan bahwa solusi optimal untuk PL 1 adalah titik pada daerah solusi yang membuat $z = z' = -2x_1 + 3x_2$ paling besar. Ini berarti bahwa solusi optimal PL 1 dapat dicari dengan menyelesaikan PL 1′ berikut:

$$\left.\begin{aligned} \text{maks } z' &= -2x_1 + 3x_2 \\ \text{kendala } x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(PL 1}'\text{)}$$

Tabel simplex untuk PL $1'$ adalah seperti tampak pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Masalah min dikonversi menjadi masalah maks

Basis	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	Rasio
z'	1	2	–3	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
s_2	0	1	–1	0	1	6	—
z'	1	5	0	3	0	12	Optimal
x_2	0	1	1	1	0	4	
s_2	0	2	0	1	1	10	

Solusi optimal untuk PL $1'$ adalah $z' = 12$, $x_2 = 4$, $s_2 = 10$, $x_1 = s_1 = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai x_1 dan x_2 ke dalam fungsi tujuan PL 1 diperoleh

$$z = 2x_1 - 3x_2 = 2(0) - 3(4) = -12.$$

Ringkasnya, kalikan fungsi tujuan masalah minimisasi dengan –1 dan selesaikan masalah tersebut sebagai masalah maksimisasi dengan fungsi tujuan $z' = -z$. Solusi optimal untuk masalah maksimisasi juga akan sama dengan masalah minimisasi. Ingatlah bahwa

(nilai z optimal untuk masalah min) = – (nilai fungsi tujuan optimal untuk masalah maks).

Cara 2

Suatu modifikasi metode simplex yang sederhana dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah minimisasi secara langsung. Modifikasi dilakukan pada Langkah 2, yaitu sebagai berikut: *Periksa apakah ada elemen positif pada Baris 0; jika tidak, menunjukkan solusi sudah optimal. Jika ada, cari kolom pivot dengan memilih elemen paling positif pada Baris 0* (*pilih sebarang jika terdapat lebih dari satu*). Modifikasi metode simplex ini berlaku karena dengan menaikkan sebuah variabel nonbasis dengan suatu koefisien positif pada Baris 0 akan menurunkan nilai z. Berikut akan diselesaikan kembali PL 1 dengan Cara 2 seperti yang tampak pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8 Modifikasi Langkah 2 prosedur simplex

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	Rasio
z	1	–2	3	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
s_2	0	1	–1	0	1	6	—
z	1	–5	0	–3	0	–12	Optimal
x_2	0	1	1	1	0	4	
s_2	0	2	0	1	1	10	

4.5 Solusi Degenerasi

Masalah degenerasi ini timbul apabila ada variabel basis yang bernilai nol. Dari sudut praktis, keadaan ini menunjukkan bahwa model sedikitnya memiliki sebuah kendala berlebih (*redundunt constraint*). Sebagai contoh perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 3x_1 + 9x_2 \\ \text{kendala } x_1 + 4x_2 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Iterasi simplex dari program linear di atas diberikan pada Tabel 4.9 (a)-(b).

Tabel 4.9 (a) Solusi awal contoh solusi degenerasi

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	Rasio
z	1	–3	–9	0	0	0	
s_1	0	1	4	1	0	8	$\frac{8}{4} = 2$
s_2	0	1	2	0	1	4	$\frac{4}{2} = 2$

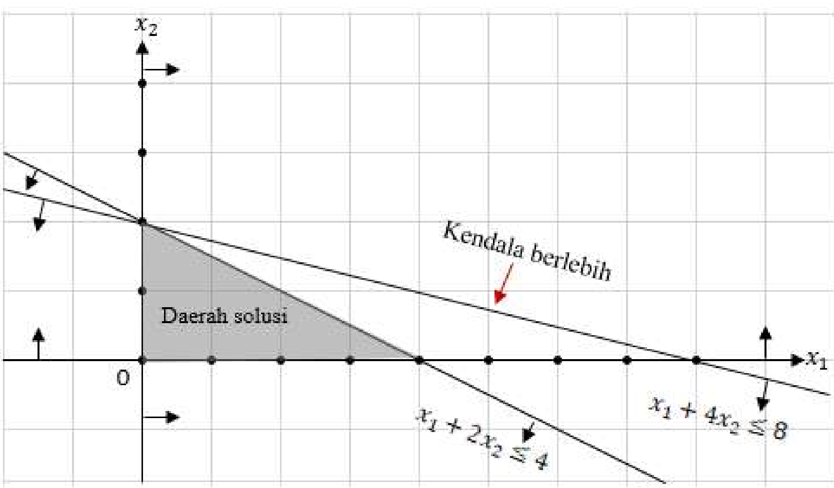
Tabel 4.9 (b) Hasil iterasi pertama

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	Rasio
z	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18	
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2	$\frac{2}{1/4} = 8$
s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{0}{1/2} = 0$

Tabel 4.9 (c) Solusi optimal degenerasi

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	
z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	Optimal
x_1	0	1	0	–1	2	0	

Pada tabel solusi optimal tampak bahwa variabel basis $x_1 = 0$. Ini menunjukkan bahwa program linear tersebut mempunyai solusi optimal degenerasi. Grafik daerah solusinya dapat dilihat pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Grafik dengan kendala berlebih

4.6 Solusi Optimal Banyak

Perhatikan kembali program linear pada subbab 3.1.

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{kendala } & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Tabel simplex program linear ini dapat dilihat pada Tabel 4.10 (a)-(c)

Tabel 4.10 (a)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	Rasio
0	z	1	-2	-4	0	0	0	
(Tabel awal)	s_1	0	1	2	1	0	5	$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
	s_2	0	1	1	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$

Tabel 4.10 (b)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	Rasio
1	z	1	0	0	2	0	10	
(Optimal)	x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5/2}{1/2} = 5$
	s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3/2}{1/2} = 3$

Tabel 4.10 (c)

No. Iterasi	Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK	
2	z	1	0	0	2	0	10	
(Optimal alternatif)	x_2	0	0	1	1	-1	1	
	x_1	0	1	0	-1	2	3	

Dari Tabel 4.10 (b) dapat dilihat bahwa solusi optimal $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $z = 10$ ditemukan pada Iterasi 1. Bagaimanakah cara mengetahui bahwa terdapat solusi optimal banyak (solusi alternatif)? Lihat koefisien variabel nonbasis pada Baris 0 dari Iterasi 1. Koefisien variabel nonbasis x_1 adalah nol, ini menunjukkan bahwa x_1 dapat menjadi basis tanpa merubah nilai z, tetapi menyebabkan perubahan pada nilai variabel. Pada Iterasi 2 Tabel 4.10 (c) diperoleh solusi optimal yang lain $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 10$. Secara umum, untuk $0 \leq \lambda \leq 1$, solusi optimal (x_1^*, x_2^*) untuk program linear di atas adalah

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3\lambda \\ 1 + 3\lambda/2 \end{bmatrix}.$$

4.7 Solusi Optimal Tidak Terbatas

Pandang kembali program linear pada subbab 3.2,

$$\begin{aligned} \text{maks } \; & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{kendala } \; & x_1 - x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 \qquad \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Perhatikan tabel awal (Iterasi 0) dari program linear tersebut seperti yang terlihat pada Tabel 4.11.

Tabel 4.11

Basis	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RK
z	1	–1	–2	0	0	0
s_1	0	1	–1	1	0	10
s_2	0	2	0	0	1	40

Pada tabel awal, baik x_1 maupun x_2 adalah calon variabel basis. Karena x_2 memiliki koefisien paling negatif, x_2 dipilih sebagai *entering variable*. Tetapi sebelumnya perhatikan bahwa semua koefisien kendala di bawah kolom x_2 bernilai negatif atau nol, sehingga uji rasio gagal, yang berarti bahwa x_2 bisa dinaikkan tanpa batas dan tanpa melanggar sebarang kendala. Karena setiap kenaikan satu unit pada x_2 akan menaikkan nilai z sebesar 1, kenaikan x_2 tak hingga mengakibatkan kenaikan z tak hingga pula. Jadi, tanpa perhitungan lebih jauh dapat disimpulkan bahwa program linear tersebut mempunyai solusi optimal tak terbatas.

4.8 Metode *M*-Besar

Perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \min\ & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{kendala}\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bentuk standar dari program linear di atas diperoleh dengan mengurangkan variabel *surplus* e_2 pada ruas kiri kendala 2 dan menambahkan variabel *slack* s_3 pada ruas kiri kendala 3, yaitu

$$\begin{aligned} \min\ & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{kendala}\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - e_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_3 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ e_2,\ s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Dari bentuk standar dapat dilihat bahwa tidak terdapat solusi layak basis awal yang "siap pakai", sebab kendala pertama dan kedua tidak memilki variabel yang mempunyai peranan sebagai *slack*. Jadi, perlu ditambahkan dua variabel *artifisial* atau variabel bantu a_1 dan a_2 pada ruas kiri dari dua kendala tersebut, sehingga diperoleh bentuk

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + a_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 6 \end{aligned}$$

Pada fungsi tujuan, a_1 dan a_2 diberi "penalti" dengan memberi keduanya koefisien yang sangat besar. Misalkan $M > 0$ adalah konstanta yang sangat besar. Kemudian, program linear dengan variabel artifisial menjadi

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 4x_1 + x_2 + Ma_1 + Ma_2 \\
\text{kendala}\ 3x_1 + x_2 + \quad a_1 \quad &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 - e_2 + \quad a_2 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 + \quad s_3 &= 4 \\
x_1,\ x_2,\ e_2,\ s_3,\ a_1,\ a_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Perhatikan logika dibalik penggunaan variabel artifisial. Sekarang diperoleh 3 persamaan dengan 6 variabel. Jadi, solusi layak basis awal terdiri dari $6 - 3 = 3$ variabel bernilai nol. Jika ditetapkan $x_1 = x_2 = e_2 = 0$., diperoleh $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, dan $s_3 = 4$ yang diperlukan sebagai solusi layak basis awal. Sekarang perhatikan bagaimana model yang "baru" secara otomatis memaksa a_1 dan a_2 menjadi nol. Karena masalahnya adalah minimisasi, dengan memberi koefisien M pada a_1 dan a_2 dalam fungsi tujuan, proses minimisasi yang mencari nilai z minimum perlahan-lahan akan memberikan nilai nol untuk a_1 dan a_2 pada solusi optimal.

Bagaimanakah metode M-Besar bekerja jika masalahnya adalah maksimisasi? Dengan menggunakan logika pemberian penalti pada variabel artifisial, pada fungsi tujuan diberikan koefisien $-M$ untuk variabel artifisial. Karena masalahnya adalah menentukan nilai z maksimum, variabel artifisial akan bernilai nol pada solusi optimal.

Sekarang kembali ke program linear di atas. Agar a_1 dan a_2 menjadi variabel basis bila dimasukkan ke dalam tabel simplex, a_1 dan a_2 harus dieliminasi dari fungsi tujuan atau Baris 0. Jadi,

$$a_1 = 3 - 3x_1 - x_2$$
$$a_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + e_2.$$

Sekarang fungsi tujuan menjadi

$$\begin{aligned}
z &= 4x_1 + x_2 + M(3 - 3x_1 - x_2) + M(6 - 4x_1 - 3x_2 + e_2) \\
&= (4 - 7M)x_1 + (1 - 4M)x_2 + Me_2 + 9M.
\end{aligned}$$

Bentuk kanonik dari persolan yang sudah dimodifikasi adalah

$$
\begin{array}{lllllll}
z-(4-7M)x_1+(1-4M)x_2+Me_2 & & & & & & =9M \\
 & 3x_1 + & x_2 + & & a_1 & & =3 \\
 & 4x_1 + & 3x_2 - & e_2 + & & a_2 & =6 \\
 & x_1 + & 2x_2 + & & & & s_3=4 \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ e_2,\ s_3,\ a_1,\ a_2 & \geq 0.
\end{array}
$$

Dengan menggunakan metode simplex untuk minimisasi diperoleh tabel awal sampai optimal dapat dilihat pada Tabel 4.12 (a)-(d).

Tabel 4.12 (a)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	Rasio
z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	$9M$	
a_1	0	3	1	0	1	0	0	3	$\frac{3}{3}=1$
a_2	0	4	3	-1	0	1	0	6	$\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$
s_3	0	1	2	0	0	0	1	4	$\frac{4}{1}=4$

Tabel 4.12 (b)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	Rasio
z	1	0	$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}M$	$-M$	$\frac{4}{3}-\frac{7}{3}M$	0	0	$4+2M$	
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{1/3}=3$
a_2	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2	$\frac{2}{5/3}=\frac{6}{5}$
s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3	$\frac{3}{5/3}=\frac{9}{5}$

Tabel 4.12 (c)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	Rasio
z	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}-M$	$-\frac{1}{5}-M$	0	$\frac{18}{5}$	
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3/5}{1/5}=3$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	—
s_3	0	0	0	1	1	-1	1	1	$\frac{1}{1}=1$

Tabel 4.12 (d)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	
z	1	0	0	0	$\frac{7}{5}-M$	$-M$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$	
x_1	0	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	Optimal
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	
e_2	0	0	0	1	1	-1	1	1	

Solusi optimal program linear di atas adalah $x_1 = 2/5$, $x_2 = 9/5$, dan $z = 17/5$. Perlu diketahui bahwa bila suatu variabel artifisial meninggalkan basis, kolomnya boleh dikeluarkan dari tabel berikutnya. Ini disebabkan tujuan dari suatu variabel artifisial hanyalah untuk membantu mendapatkan solusi layak basis awal. Sekali suatu variabel artifisial keluar dari basis, variabel ini tidak diperlukan lagi. Meskipun demikian, variabel artifisial tetap berada dalam seluruh tabel. Hal ini berguna ketika membahas masalah dualitas.

4.9 Metode Dua-Fase

Bila solusi layak basis awal tidak tersedia, metode dua-fase dapat digunakan sebagai alternatif dari metode *M*-Besar. Garis besar dari metode dua-fase tersebut adalah sebagai berikut:

Fase 1

Langkah 1 Tambahkan variabel artifisial untuk mendapatkan solusi layak basis awal.

Langkah 2 Bentuk tabel awal masalah pembantu (*auxiliary problem*), yaitu masalah yang fungsi tujuannya meminimumkan jumlah variabel artifisial dengan kendala masalah asal (*original problem*). Selesaikan masalah pembantu ini dengan simplex.

Langkah 3 Periksa apakah semua variabel artifisial telah mempunyai nilai nol? Jika tidak, tidak terdapat solusi layak untuk masalah asal. Jika ya, lanjutkan ke Sublangkah 3.

Sublangkah 3 Apakah ada variabel artifisial sebagai variabel basis yang bernilai nol? Jika tidak, lanjutkan ke Fase 2. Jika ada, pembahasannya ditangguhkan dulu.

Fase 2

Langkah 1 Ganti fungsi tujuan dengan fungsi tujuan masalah asal dengan kendala yang diperoleh dari tabel akhir Fase 1 tanpa kolom variabel artifisial.

Langkah 2 Jadikan koefisien variabel basis pada Baris 0 sama dengan nol dengan menambahkan kelipatan baris lain pada Baris 0 (prosedur OBE).

Langkah 3 Selesaikan dengan menggunakan metode simplex.

Untuk lebih jelas, contoh untuk metode *M*-Besar diselesaikan kembali dengan metode dua-fase.

Fase 1

$$\begin{aligned}
\min\ & z' = a_1 + a_2 \\
\text{kendala}\ & 3x_1 + x_2 + a_1 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + s_3 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ e_2,\ s_3,\ a_1,\ a_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Karena a_1 dan a_2 adalah sebagai solusi layak basis awal, keduanya harus dieliminasi dari fungsi tujuan, yaitu

$$z' = a_1 + a_2 = (3 - 3x_1 - x_2) + (6 - 4x_1 - 3x_2 + e_2)$$
$$= -7x_1 - 4x_2 + e_2 + 9.$$

Tabel simplex awal sampai optimal adalah seperti yang terlihat pada Tabel 4.13 (a)-(c).

Tabel 4.13 (a)

Basis	z'	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	Rasio
z'	1	7	4	– 1	0	0	0	0	
a_1	0	3	1	0	1	0	0	3	$\frac{3}{3} = 1$
a_2	0	4	3	– 1	0	1	0	6	$\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$
s_3	0	1	2	0	0	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$

Tabel 4.13 (b)

Basis	z'	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	Rasio
z'	1	0	$\frac{5}{3}$	–1	$\frac{7}{3}$	0	0	2	
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{1/3} = 3$
a_2	0	0	$\frac{5}{3}$	– 1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2	$\frac{2}{5/3} = \frac{6}{5}$
s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3	$\frac{3}{5/3} = \frac{9}{5}$

Tabel 4.13 (c)

Basis	z'	x_1	x_2	e_2	a_1	a_2	s_3	RK	
z'	1	0	0	$\frac{1}{5}$	–1	–1	0	0	
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	Optimal
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	
s_3	0	0	0	1	1	– 1	1	1	

Fase 2

$$\begin{aligned} \min\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{kendala}\ x_1 + \frac{1}{5}e_2 &= \frac{3}{5} \\ x_2 - \frac{3}{5}e_2 &= \frac{6}{5} \\ e_2 + s_3 &= 1 \\ x_1,\ x_2,\ e_2,\ s_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Tabel awal sampai optimal dari Fase 2 adalah seperti yang terlihat pada Tabel 4.14 (a)-(c).

Tabel 4.14 (a)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	s_3	RK	
z	1	-4	-1	0	0	0	Karena x_1 dan x_2 basis, eliminasi koefisien keduanya menjadi nol pada Baris 0.
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	
s_3	0	0	0	1	1	1	

Tabel 4.14 (b)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	s_3	RK	Rasio
z	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3/5}{1/5} = 3$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	—
s_3	0	0	0	1	1	1	$\frac{1}{1} = 1$

Tabel 4.14 (c)

Basis	z	x_1	x_2	e_2	s_3	RK	
z	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$	
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
x_2	0	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	Optimal
e_2	0	0	0	1	1	1	

Menarik untuk disimak bahwa jumlah iterasi pada metode M-Besar sama dengan jumlah iterasi pada metode dua-fase. Terdapat korespondensi satu–satu antara tabel kedua metode. Keuntungan metode dua-fase terletak pada manipulasi untuk melenyapkan konstanta M.

4.10 Program Linear Tidak Layak

Perhatikan kembali program linear pada subbab 3.3.

$$\begin{aligned} \text{maks} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{kendala} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode M-Besar, program linear di atas dimodifikasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 - Mx_5 \\ \text{kendala} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

dengan x_3 sebagai variabel *slack*, x_4 variabel surplus, dan x_5 variabel artifisial. Iterasi simplex-nya diberikan oleh Tabel 4.15

Tabel 4.15

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RK	
z	1	– 3	–2	0	0	M	0	Karena x_5 basis, eliminasi koefisien x_5 menjadi nol pada Baris 0.
x_3	0	2	1	1	0	0	2	
x_5	0	3	4	0	–1	1	12	
z	1	$-3-3M$	$-3-3M$	0	M	0	0	Rasio
x_3	0	2	1	1	0	0	2	$\frac{2}{1}=2$
x_5	0	3	4	0	–1	1	12	$\frac{12}{4}=3$
z	1	$1+5M$	0	M	$2+4M$	0	$4-4M$	
x_2	0	2	1	0	1	0	2	Optimal
x_5	0	–5	0	–1	– 4	1	4	

Pada tabel akhir dapat dilihat bahwa kriteria optimalitas untuk masalah maksimisasi telah dipenuhi; yaitu koefisien variabel nonbasis pada Baris 0 tidak negatif (ingat kriteria optimalitas untuk masalah maksimisasi). Akan tetapi variabel artifisial x_5 masih berada pada basis dan nilai z memuat M. Ini menunjukkan bahwa program linear tersebut tidak mempunyai solusi atau tidak layak. Pembaca dapat membandingkan hasil ini bila digunakan metode dua-fase. Pada Fase 1 jika kriteria optimalitas telah dipenuhi, tetapi variabel artifisial masih berada pada basis dan nilai z tidak sama dengan nol, maka program linear tidak memiliki solusi.

4.11 Variabel Bebas Tanda

Dalam pemodelan program linear bisa terjadi suatu variabel keputusan tidak ada batasan tanda; variabel tersebut boleh positif, negatif, atau nol. Sebagai ilustrasi perhatikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{kendala } 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ &\qquad\qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \text{ bebas tanda.} \end{aligned}$$

Agar metode simplex dapat digunakan, nyatakan x_2 sebagai

$$x_2 = x_2' - x_2'' \text{ dengan } x_2', x_2'' \geq 0,$$

sehingga program linear di atas menjadi

$$\begin{aligned} &\text{maks } z = 2x_1 + x_2' - x_2'' \\ &\text{kendala } 3x_1 + x_2' - x_2'' \leq 6 \\ &\qquad\qquad x_1 + x_2' - x_2'' \leq 4 \\ &\qquad\qquad\qquad x_1, x_2', x_2'' \geq 0. \end{aligned}$$

Iterasi simplex-nya seperti yang dapat dilihat pada Tabel 4.16 (a)-(c). Variabel s_1 dan s_2 adalah variabel *slack*.

Tabel 4.16 (a)

Basis	z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	RK	Rasio
z	1	-2	-1	1	0	0	0	
s_1	0	3	1	-1	1	0	6	$\frac{6}{3} = 2$
s_2	0	1	1	-1	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$

Tabel 4.16 (b)

Basis	z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	RK	Rasio
z	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	4	
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2	$\frac{2}{1/3} = 6$
s_2	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	2	$\frac{2}{2/3} = 3$

Tabel 4.16 (c)

Basis	z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	RK	
z	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	Optimal
x_2'	0	0	1	–1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	

Solusi optimal adalah $x_1 = 1$, $x_2 = x_2' - x_2'' = 3 - 0 = 3$, dan $z = 5$.

4.12 Menyelesaikan Program Linear dengan *Solver*

Kunci untuk menyelesaikan suatu program linear pada lembar kerja atau *spreadsheet* Excel adalah dengan membuat suatu *spreadsheet* yang melacak segala sesuatu yang menjadi pertimbangan seperti biaya atau keuntungan, pendapatan, penggunaan sumberdaya, dan lain-lain. Selanjutnya mengidentifikasi sel, **By Changing Variable Cells**, yang menjadi pertimbangan dalam kalkulasi yang bisa berubah-ubah. Lalu mengidentifikasi sel **Set Objective** yaitu sel yang memuat fungsi tujuan. Selanjutnya mengidentifikasi semua kendala (*constraints*) dan memerintahkan *Solver* pada Microsoft Excel 2016 untuk menyelesaikan masalah tersebut. Disini solusi optimal dari masalah tersebut ditempatkan pada *spreadsheet*.

Perhatikan kembali masalah PT Pelangi. Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah PT Pelangi dengan menggunakan *Solver* adalah sebagai berikut:

(i) Pada lembaran kerja Excel masukkan data masalah PT Pelangi seperti yang terlihat pada Gambar 1.

- Pada jelajah B3:C3 diisikan solusi awal untuk jumlah cat luar (x_1) dan cat dalam (x_2) yang akan diproduksi (ambil nilai 1 untuk masing-masing). Perhatikan Gambar 4.3. Jelajah B3:C3 ini dinamakan *changing variable cells*.
- Pada jelajah B4:C4 dimasukkan perolehan dari penjualan per ton masing-masing jenis cat.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Cat luar	Cat dalam			
3	Jumlah yang akan diproduksi (ton)	1	1			
4	Perolehan per ton dalam jutaan rupiah	3	2			
5	Kendala penggunaan bahan mentah:			Kalkulasi		Ruas kanan
6	Bahan mentah A per ton cat	1	2	3	<=	6
7	Bahan mentah B per ton cat	2	1	3	<=	8
8	Kendala lain:					
9	Kelebihan cat dalam atas cat luar	-1	1	0	<=	1
10	Permintaan terhadap cat dalam	0	1	1	<=	2
11						
12	Perolehan dari penjualan kedua jenis cat	5	(dalam puluhan juta rupiah)			

Gambar 4.3 Data masalah PT. Pelangi dalam lembaran kerja *Excel*

- Sel B6 diisi 1 dan sel B7 diisi 2 karena untuk memproduksi satu ton cat luar diperlukan bahan A 1 ton dan bahan B 2 ton.
- Sel C6 diisi 2 dan sel C7 diisi 1 karena untuk memproduksi satu ton cat dalam diperlukan bahan A 2 ton dan bahan B 1 ton.
- Sel B9 dan C9 masing-masing diisi –1 dan 1 adalah koefisien untuk kendala kelebihan permintaan cat dalam atas cat luar.
- Sel B10 dan C10 masing-masing diisi 0 dan 1 adalah koefisien untuk kendala maksimum permintaan untuk cat dalam.
- Perolehan dapat dihitung pada sel B12 (**Set Objective**) dengan rumus

  =SUMPRODUCT(B4:C4;B3:C3)

  Jadi pada sel B12, fungsi =SUMPRODUCT menghitung total biaya

  $$(1)\,(3) + (1)\,(2) = 5$$
- Nilai pada sel D6 dihitung dengan rumus

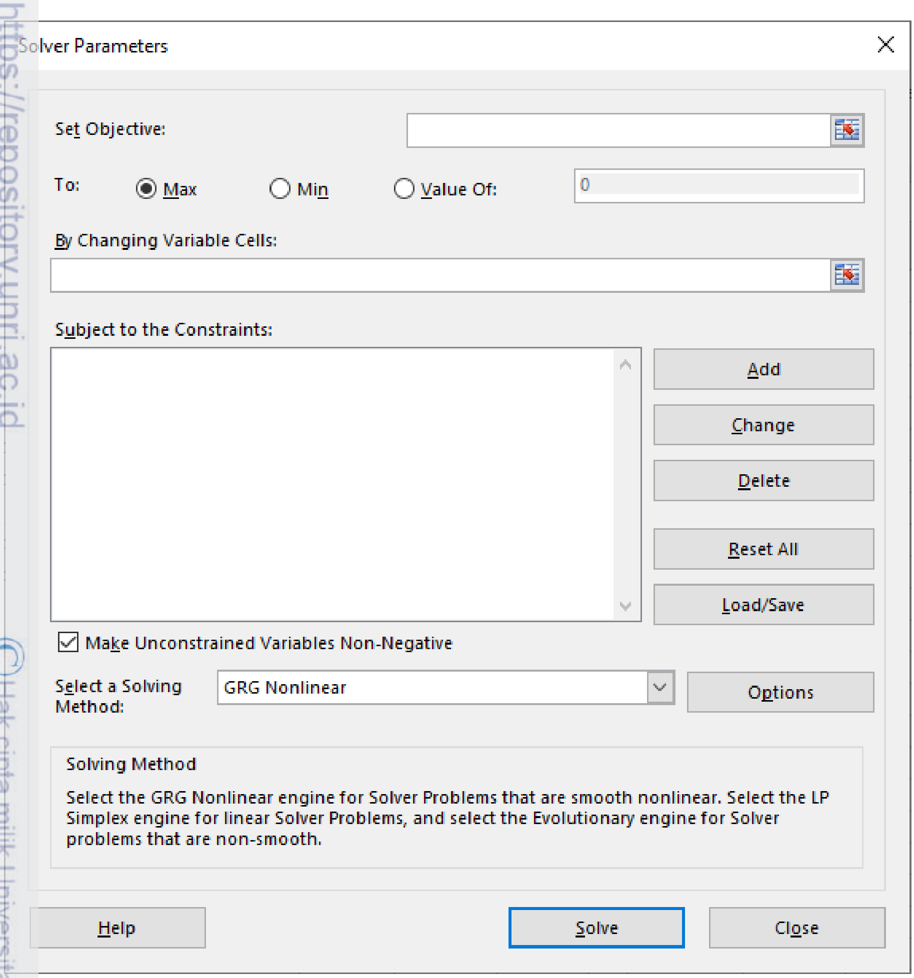
  =SUMPRODUCT($B$3:$C$3;B6:C6)

  Perhatikan penggunaan tanda $.
- Nilai pada sel D7 dan jelajah sel D9:D10 diperoleh dengan menyalin (*copy*) formula pada D6.
- Sel F6:F7 masing-masing adalah kendala ketersediaan bahan mentah A dan bahan mentah B. Sel F9:F10 masing-masing adalah ruas kanan kendala ketiga dan keempat.

(ii) Dari menu **Data**, pilih **Solver**. Kotak dialog seperti Gambar 4.4 akan muncul.

(iii) Gerakkan mouse ke bagian **Set Objective** pada kotak dialog tersebut dan klik (atau ketik dalam alamat sel) pada sel fungsi objektif B12 (perolehan dari penjualan kedua jenis cat) dan pilih **Max.** Ini memerintahkan Solver untuk memaksimumkan perolehan.

(iv) Pindahkan *mouse* ke bagian **By Changing Variable Cells** pada kotak dialog tersebut dan klik pada sel-sel yang berubah (B3:C3). Ini memerintahkan Solver untuk merubah nilai-nilai pada jelajah sel B3:C3 (sel dimana nilai variabel keputusan bisa berubah-ubah).



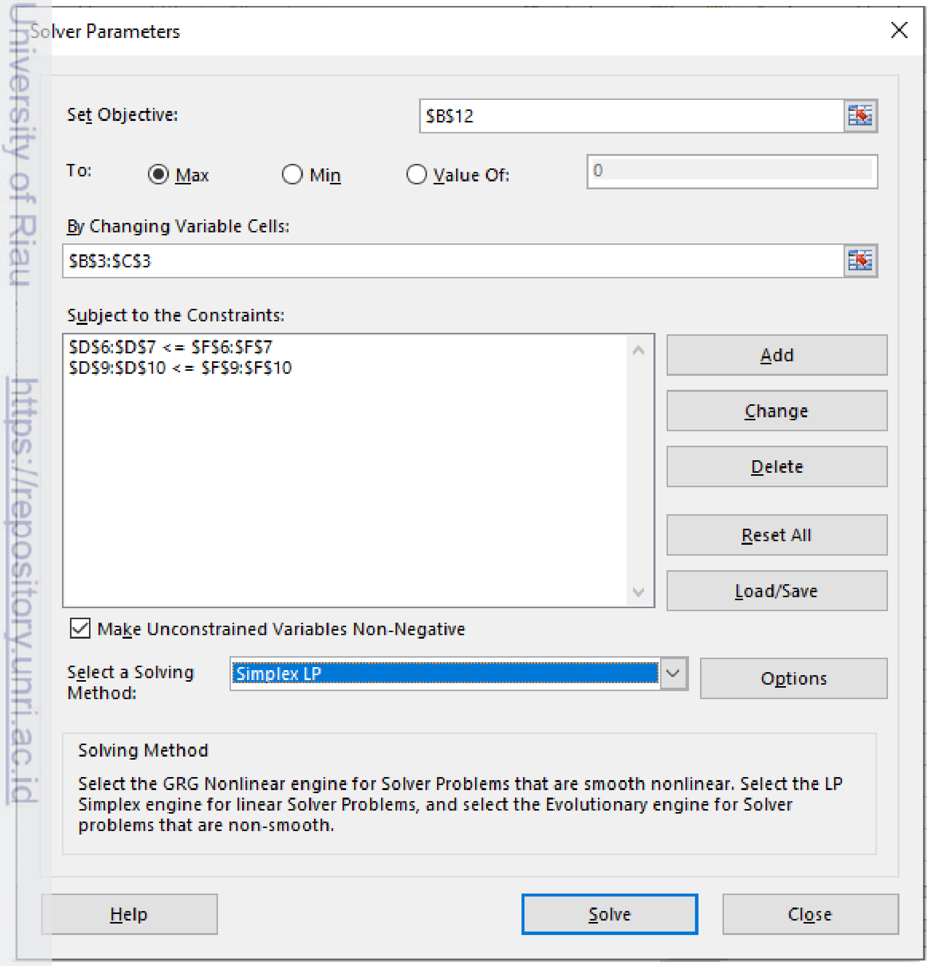
Gambar 4.4 Kotak dialog Solver Parameters

(v) Klik tombol **Add** untuk menambahkan kendala. Pada layar akan muncul tampilan seperti Gambar 4.5.

Gambar 4.5 Kotak dialog untuk memasukkan kendala

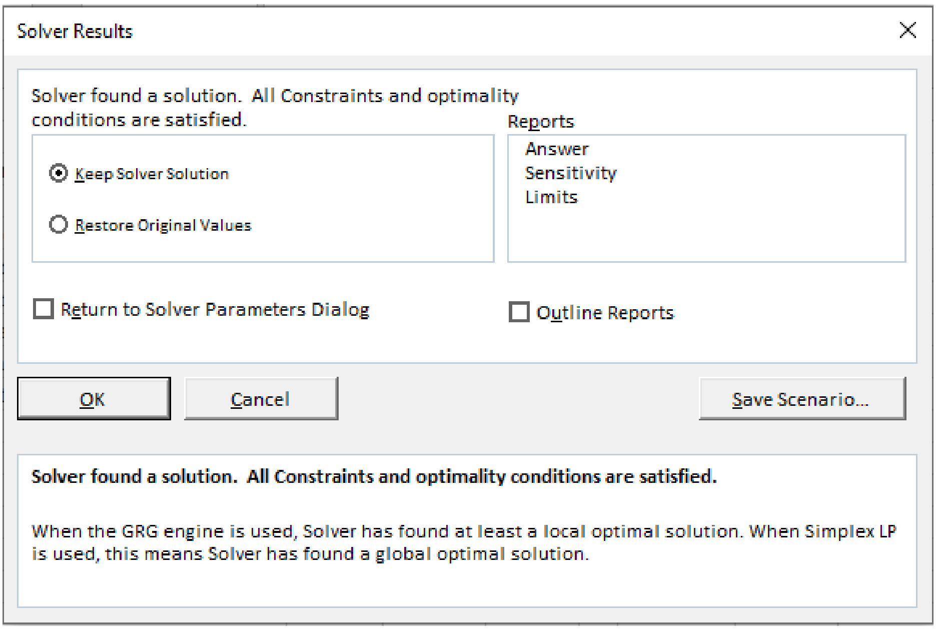
Gerakkan *mouse* ke **Cell Reference** yang merupakan bagian dari kotak dialog **Add Constraint** dan pilih D6:D7. Lalu geser *mouse* ke *dropdown box* dan pilih <=. Kemudian klik pada bagian **Constraint** dari kotak dialog dan pilih F6:F7. Klik pada tombol **Add** sekali lagi untuk menambahkan kendala. Pada kotak dialog **Add Constraint** pilih D9:D10. Lalu geser *mouse* ke *dropdown box* dan pilih <=. Selanjutnya klik pada bagian **Constraint** dari kotak dialog dan pilih F9:F10. Pilih **OK** karena tidak ada lagi kendala yang akan ditambahkan. Jika masih ada kendala yang akan ditambahkan, pilih **Add**. Dari kotak utama *Solver*, kendala bisa diubah dengan memilih **Change** dan dihapus dengan memilih **Delete**. Sekarang ada empat kendala. *Solver* akan meyakinkan bahwa *changing variable cells* dipilih sehingga D6 <= F6, D7 <= F7, D9 <= F9, dan D10 <= F10.

(vi) Sebelum menyelesaikan masalah, perlu memberitahu *Solver* bahwa semua variabel tidak negatif dengan mencontreng pada kotak **Make Unconstrained Variables Non-Negative**. Juga perlu memberitahu *Solver* bahwa model yang dikerjakan adalah linear sehingga metode yang digunakan adalah metode simplex dengan cara: pada *dropdown box* **Select a Solving Method** pilih **Simplex LP**. Tampilan **Solver Parameters** akan tampak seperti Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Kotak dialog **Solver Parameters** yang telah di-*input*

(vii) Untuk memerintah *Solver* menyelesaikan masalah, pilih **Solve**. Ketika meng-klik tombol **Solve**, muncul tampilan seperti Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Kotak dialog **Solver Results**

Di daftar **Reports** pilihlah **Answer**. *Solver* memberikan solusi optimal seperti tampak pada Gambar 4.8.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Cat luar	Cat dalam			
3	Jumlah yang akan diproduksi (ton)	3,33	1,33			
4	Perolehan per ton dalam jutaan rupiah	3	2			
5	Kendala penggunaan bahan mentah:			Kalkulasi		Ruas kanan
6	Bahan mentah A per ton cat	1	2	6	<=	6
7	Bahan mentah B per ton cat	2	1	8	<=	8
8	Kendala lain:					
9	Kelebihan cat dalam atas cat luar	-1	1	-2	<=	1
10	Permintaan terhadap cat dalam	0	1	1,33	<=	2
11						
12	Perolehan dari penjualan kedua jenis cat	12,66667	(dalam puluhan juta rupiah)			
13						

Gambar 4.8 Solusi yang diberikan *Solver*

Dan lembaran kerja baru yang berisi laporan dari *Solver* tampak pada Gambar 4.9.

Microsoft Excel 16.0 Answer Report
Worksheet: [Solver1.xlsx]Sheet1
Report Created: 12/08/2023 18:02:33
Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
Solver Engine
Engine: Simplex LP
Solution Time: 0,063 Seconds.
Iterations: 2 Subproblems: 0
Solver Options
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0,000001, Use Automatic Scaling
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$12	Perolehan dari penjualan kedua jenis cat Cat	5	12,66666667

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$3	Jumlah yang akan diproduksi (ton) Cat luar	1	3,333333333	Contin
$C$3	Jumlah yang akan diproduksi (ton) Cat dalam	1	1,333333333	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$6	Bahan mentah A per ton cat Kalkulasi	6	$D$6<=$F$6	Binding	0
$D$7	Bahan mentah B per ton cat Kalkulasi	8	$D$7<=$F$7	Binding	0
$D$9	Kelebihan cat dalam atas cat luar Kalkulasi	-2	$D$9<=$F$9	Not Binding	3
$D$10	Permintaan terhadap cat dalam Kalkulasi	1,333333333	$D$10<=$F$10	Not Binding	0,66666667

Answer Report 1 | Sheet1

Gambar 4.9 Laporan jawaban *Solver*

Dari implementasi *Solver* diperoleh laporan bahwa jumlah cat luar yang akan diproduksi adalah 3, 33 ton dan cat dalam 1,33 ton dan total pendapatan adalah Rp126.666.667.

Soal-Soal Latihan

1. Ubah program linear berikut ke dalam bentuk standar:

$$
\begin{aligned}
\text{maks}\quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{kendala}\quad & x_1 + x_2 - x_3 \geq -5 \\
& -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ bebas tanda.}
\end{aligned}
$$

2. Untuk masalah PT Bajaku, tunjukkanlah korespondensi antara solusi layak basis dengan titik-titik sudut daerah solusi.
3. Selesaikan masalah PT Bajaku dengan metode simplex tanpa tabel simplex.
4. Tunjukkan tabel simplex masalah PT Bajaku.
5. Tunjukkan bahwa program linear berikut memiliki solusi optimal alternatif; cari tiga di antaranya.

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = -2x_1 + 6x_2 \\ \text{kendala } & 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

6. Tunjukkanlah bahwa program linear berikut tak terbatas:

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 2x_2 \\ \text{kendala } & x_1 - x_2 \le 4 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Cari sebuah titik pada daerah solusi dengan $z \ge 10.000$.

7. Gunakan metode M-Besar untuk menyelesaikan program linear berikut:

a.
$$\begin{aligned} \min & \; z = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{kendala } & x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} \min & \; z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{kendala } & 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 - x_2 \ge -1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{kendala } & x_1 + x_2 \ge 3 \\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} \min & \; z = 3x_1 \\ \text{kendala } & 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

8. Selesaikan kembali semua program linear pada nomor 6 dengan menggunakan metode dua-fase.
9. Gunakan metode simplex untuk menyelesaikan program linear berikut:

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{kendala } & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ bebas tanda.} \end{aligned}$$

10. Tunjukkanlah bagaimana anda menggunakan program linear untuk menyelesaikan

$$\begin{aligned} \text{maks } & z = |2x_1 - 3x_2| \\ \text{kendala } & 4x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 0{,}5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

REFERENSI TERPILIH

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. J. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*, 2nd Edition. Wiley India, Delhi, 2008.

R. Bronson and G. Naadimuthu. *Operations Research*: *Theory and Problems, Schaum's Outlines,* 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1997.

G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. RAND Corporation, Santa Monica, California, 1963 G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. RAND Corporation, Santa Monica, California, 1963

F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1995.

C. Leon and D. Steinberg. *Methods and Applications of Linear Programming*. W. B. Saunders, Philadelphia, 1974.

H. A. Taha. *Operations Research*: *An Introduction*, 10th Ed. Pearson, London, 2014.

W. L. Winston. *Operations Research*: *Applications and Algorithms*. International Student 4th Edition. Brooks/Cole–Thomson Learning, Belmont, USA, 2004.