



CADANGAN ZILLMER ASURANSI JIWA *JOINT LIFE* DWIGUNA MENGGUNAKAN DISTRIBUSI LOMAX

KARYA ILMIAH



OLEH

PRAGISTA RIMISTI
NIM. 1903110803

**PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS RIAU
PEKANBARU
2023**

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.



CADANGAN ZILLMER ASURANSI JIWA *JOINT LIFE* DWIGUNA MENGGUNAKAN DISTRIBUSI LOMAX

Pragista Rimisti

Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

pragista.rimisti0803@student.unri.ac.id

ABSTRACT

This article discusses Zillmer reserve of endowment *joint life* life insurance for two insurance participants who are x and y years old by using Lomax distribution. The parameters in the Lomax distribution were estimated using maximum *likelihood* estimation and then determined by a Newton-Raphson iteration method. The calculation of this Zillmer's reserve is obtained by using the prospective reserve and Zillmer's rate. The solution of this problem is obtained by determining the initial life annuity *joint life* temporary, single premium, and annual premium, then the Zillmer's reserve formula is obtained based on the distribution of Lomax. Zillmer's reserves for endowment *joint life* life insurance using the Lomax distribution is smaller than prospective reserve for endowment *joint life* life insurance using the Lomax distribution.

Keywords: Zillmer reserve, endowment life insurance, *joint life*, Lomax distribution, maximum *likelihood*

ABSTRAK

Artikel ini membahas cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna untuk dua orang peserta asuransi jiwa berusia x tahun dan y tahun menggunakan distribusi Lomax. Parameter-parameter dalam distribusi Lomax diestimasi dengan menggunakan penaksiran maksimum *likelihood* kemudian ditentukan dengan suatu metode iterasi Newton-Raphson. Perhitungan cadangan Zillmer dalam artikel ini menggunakan cadangan prospektif dan tingkat Zillmer. Penyelesaian permasalahan diperoleh dengan menentukan anuitas hidup awal *joint life* berjangka, premi tunggal, dan premi tahunan, kemudian diperoleh formula cadangan Zillmer berdasarkan distribusi Lomax. Besarnya cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax lebih kecil dari pada cadangan prospektif asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax.

Kata kunci: Cadangan Zillmer, asuransi jiwa dwiguna, *joint life*, distribusi Lomax, maksimum *likelihood*



1. PENDAHULUAN

Pada dasarnya manusia akan menghadapi berbagai macam risiko yang tidak dapat diprediksi, salah satu cara meminimumkan risiko tersebut yaitu mengikuti program asuransi jiwa [9]. Asuransi jiwa dwiguna merupakan gabungan dari asuransi jiwa dwiguna murni dan asuransi jiwa berjangka yang mana tertanggung harus membayar uang pertanggungan selama atau berakhirnya masa pertanggungan polis, baik meninggal dunia ataupun bertahan hidup [5, h. 88]. Asuransi jiwa *joint life* merupakan asuransi jiwa gabungan yang bertahan selama peserta asuransi masih hidup dan akan terhenti jika salah satu peserta asuransi meninggal dunia [3, h. 263].

Premi merupakan sejumlah uang yang dibayarkan tertanggung kepada penanggung yang besarnya telah ditentukan sesuai risiko tertanggung [9]. Berdasarkan cara pembayarannya, premi dibedakan menjadi premi tunggal dan premi tahunan. Dalam pembayaran uang pertanggungan kepada peserta asuransi, perusahaan asuransi perlu mempersiapkan biaya cadangan saat terjadi klaim.

Cadangan prospektif perhitungannya diperoleh dari selisih antara nilai sekarang dari pembayaran di waktu yang akan datang dengan nilai sekarang dari total pendapatan di waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis [5, h. 123]. Cadangan Zillmer merupakan salah satu cadangan premi modifikasi yang perhitungannya menggunakan cadangan prospektif dengan tingkat Zillmer sebesar α .

Distribusi Lomax juga dikenal sebagai distribusi Pareto jenis kedua yang diperkenalkan oleh K.S. Lomax pada tahun 1954 yang digunakan dalam analisis data semumur hidup kegagalan bisnis [1] serta pengaplikasian dalam bidang aktuarial dan ekonomi [8]. Asumsi fungsi *survival* yang digunakan dalam menentukan peluang hidup dan peluang meninggal diperoleh berdasarkan distribusi Lomax.

Pada artikel ini ditentukan cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax dari peserta asuransi berusia x tahun dan y tahun dengan uang pertanggungan dibayarkan oleh perusahaan asuransi kepada peserta asuransi di akhir masa kontrak yang telah disetujui. Pembahasan dimulai dengan menentukan anuitas hiwal berjangka, premi tunggal, dan premi tahunan untuk peserta asuransi.

2. FUNGSI *SURVIVAL* DAN DISTRIBUSI LOMAX

Dalam aktuarial fungsi *survival* $S(x)$ merupakan fungsi yang menyatakan peluang dari seseorang berusia x tahun dapat bertahan hidup hingga selang waktu tertentu yang berhubungan dengan fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi. Fungsi kepadatan peluang $f(x)$ berkaitan dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dengan variabel random kontinu X , didefinisikan sebagai berikut

Definis. 1 [2, h. 64] Fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dari variabel random kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ adalah

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ untuk } -\infty < x < \infty.$$



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber.
- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Berdasarkan Definisi 1 diperoleh hubungan antara fungsi *survival* dengan fungsi distribusi kumulatif F , yaitu

$$S(x) = 1 - F(x). \quad (1)$$

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random kontinu $T(x)$ dinyatakan sebagai berikut [4, h. 17]:

$$F_{T(x)}(t) = P[T(x) \leq t], t \geq 0. \quad (2)$$

Fungsi $F_{T(x)}(t)$ merupakan peluang seseorang yang berusia x tahun meninggal dalam jangka waktu t tahun, yang dinotasikan dengan ${}_tq_x$ [3, h. 53], yaitu

$${}_tq_x = P[T(x) \leq t], t \geq 0. \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (2) dan persamaan (3) diperoleh hubungan antara fungsi distribusi kumulatif dengan peluang meninggal yakni

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x. \quad (4)$$

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random kontinu $T(x)$ juga dapat dinyatakan sebagai berikut [4, h. 18]:

$$F_{T(x)}(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)}. \quad (5)$$

Fungsi *survival* dari variabel random kontinu $T(x)$ yang dinotasikan dengan $S_{T(x)}(t)$, yaitu

$$S_{T(x)}(t) = 1 - P(T(x) \leq t). \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (2) dan persamaan (4) diperoleh hubungan antara fungsi *survival* dan fungsi distribusi kumulatif, sehingga persamaan (6) dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} S_{T(x)}(t) &= 1 - F_{T(x)}(t), \\ S_{T(x)}(t) &= 1 - {}_tq_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Fungsi $S_{T(x)}(t)$ merupakan peluang seseorang berusia x tahun dapat bertahan hidup hingga t tahun berikutnya yang dinotasikan ${}_tp_x$, persamaan (7) yakni

$$S_{T(x)}(t) = {}_tp_x. \quad (8)$$

Berdasarkan persamaan (7) dan persamaan (8) diperoleh hubungan peluang hidup dengan peluang meninggal, yaitu

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x. \quad (9)$$

Pada asuransi jiwa gabungan, peluang hidup dan peluang meninggal dari peserta asuransi jiwa dinyatakan dalam bentuk status gabungan. Pada artikel ini penggabungan dibatasi hanya untuk dua peserta asuransi yang masing-masing berusia x tahun dan y tahun yang kemudian dinyatakan sebagai status *joint life*.



1. Di larang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber.
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.

2. Di larang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Peluang hidup untuk status gabungan *joint life* dikarenakan masing-masing peserta asuransi saling bebas sehingga dijelaskan dalam [3, h. 264], [4, h. 271], dan [10, h. 144] dinyatakan sebagai berikut:

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x {}_t p_y. \quad (10)$$

Pada artikel ini, peluang hidup dan peluang meninggal peserta asuransi ditentukan menggunakan distribusi Lomax. Fungsi kepadatan peluang dari distribusi Lomax dinyatakan [8]

$$f(x; \theta, \lambda) = \theta \lambda^\theta (x + \lambda)^{-(\theta+1)} \quad ; x, \theta, \lambda > 0, \quad (11)$$

dimana θ adalah parameter bentuk dan λ adalah parameter skalar yang perlu dilakukan estimasi. Ada banyak cara untuk mengestimasi suatu parameter seperti penaksir maksimum *likelihood* dan metode Newthton-Raphson.

Definisi 2 [11, h. 235] Misalkan $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ merupakan fungsi kepadatan peluang gabungan dari peubah acak kontinu X_1, \dots, X_n dengan nilai sampel x_1, \dots, x_n . Fungsi *likelihood* pada sampel dinyatakan dengan

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta),$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

Berdasarkan Definisi 2 jika tidak dapat diselesaikan secara eksplisit maka dapat menggunakan metode numerik untuk memperoleh nilai estimasi parameter yaitu dengan iterasi Newton-Raphson [7, h. 80] dan dapat dinyatakan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (12)$$

Kemudian berdasarkan Definisi 2 diperoleh estimasi nilai parameter θ yang dinotasikan dengan $\hat{\theta}$ yakni

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda} \right)}. \quad (13)$$

Estimas nilai parameter λ yang dinotasikan dengan $\hat{\lambda}$ diperoleh dengan menggunakan persamaan (12), yaitu

$$\hat{\lambda}_{n+1} = \frac{n}{\frac{\left(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda_n} \right)} \right)}{\lambda_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda_n + x_i} \right)}$$



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
 2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{-\frac{n}{\lambda} + \frac{\left(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)}\right)}{\lambda} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda + x_i}\right)}{\left(\frac{n}{\lambda_n^2} - \frac{n \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{x_i}{\lambda_n^2 \left(1 + \frac{x_i}{\lambda_n}\right)}\right)\right)}{\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda_n}\right)\right)^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda_n + x_i}\right)}\right)} \\
 & - \frac{\left(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda_n}\right)}\right)}{\lambda_n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda_n + x_i}\right) \\
 & + \frac{\left(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{x_i}{\lambda_n}\right)}\right)}{\lambda_n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{x_i}{(\lambda_n + x_i)^2}\right) \cdot \quad (14)
 \end{aligned}$$

Menggunakan Definisi 1 diperoleh fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Lomax untuk peserta asuransi berusia x tahun, yaitu

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\theta. \quad (15)$$

Berdasarkan persamaan (15) diperoleh fungsi distribusi kumulatif untuk peserta asuransi berusia $x + t$ tahun menggunakan distribusi Lomax sebagai berikut:

$$F(x + t) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x + t}\right)^\theta. \quad (16)$$

Selanjutnya dengan mensubsitusikan persamaan (15) ke dalam persamaan (1) diper-



oleh fungsi survival $S(x)$ dari distribusi Lomax, yaitu

$$S(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\theta. \quad (17)$$

Fungsi distribusi kumulatif untuk peserta asuransi berusia x tahun meninggal pada selang waktu t tahun diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (15), persamaan (16), dan persamaan (17) ke dalam persamaan (5) yakni

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \left(\frac{\lambda + x}{\lambda + x + t} \right)^\theta. \quad (18)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (18) ke dalam persamaan (4) diperoleh peluang meninggal peserta asuransi berusia x tahun hingga t tahun berikutnya menggunakan distribusi Lomax yakni

$${}_tq_x = 1 - \left(\frac{\lambda + x}{\lambda + x + t} \right)^\theta. \quad (19)$$

Nilai parameter pada distribusi Lomax dipengaruhi oleh variabel random X dalam hal ini yaitu usia peserta asuransi. Sehingga nilai parameter untuk peserta asuransi berusia x tahun dinotasikan dengan θ_x dan λ_x , sedangkan untuk peserta asuransi berusia y tahun dinotasikan dengan θ_y dan λ_y . Peluang meninggal peserta asuransi berusia x tahun menggunakan distribusi Lomax pada persamaan (19) yaitu

$${}_tq_x = 1 - \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x}. \quad (20)$$

Peluang hidup seseorang yang berusia x tahun dapat bertahan hidup hingga t tahun kemudian menggunakan distribusi Lomax diperoleh jika persamaan (20) disubstitusikan ke dalam persamaan (9) yakni

$${}_tp_x = \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x}. \quad (21)$$

Berdasarkan persamaan (21) peluang hidup seseorang yang berusia y tahun dapat dinyatakan

$${}_tp_y = \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}. \quad (22)$$

Peluang hidup status gabungan *joint life* dari peserta asuransi yang berusia x tahun dan y tahun menggunakan distribusi Lomax diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (21) dan persamaan (22) ke dalam persamaan (10), yaitu

$${}_tp_{xy} = \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}. \quad (23)$$



3. <https://repository.unri.ac.id>

Pada tingkat bunga majemuk terdapat suatu fungsi v yang disebut dengan faktor diskon [5, h. 2], yaitu

Selain faktor diskon didefinisikan suatu fungsi d disebut dengan tingkat diskon [5, h. 2] dan dinyatakan oleh

Nilai tunai anuitas hidup awal *joint life* berjangka untuk peserta asuransi yang berusia x tahun dan y tahun dengan jangka waktu pembayaran n tahun, yaitu

Nilai tunai anuitas hidup awal *joint life* berjangka dengan jangka waktu pertanggungan n tahun menggunakan distribusi Lomax diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (23) ke dalam persamaan (26), yaitu

Kemudian berdasarkan persamaan (27) nilai tunai anuitas hidup *joint life* berjangka dengan jangka waktu pertanggungan $(n - t)$ tahun menggunakan distribusi yakni

Nilai tunai anuitas hidup awal *joint life* berjangka dengan jangka waktu pertanggungan m tahun dimana $m < n$ menggunakan distribusi Lomax berdasarkan



persamaan (27) dapat dinyatakan

$$\ddot{a}_{xy:\overline{m}|} = \sum_{t=0}^{m-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}. \quad (29)$$

Selanjutnya jika berdasarkan persamaan (28) nilai tunai anuitas hidup awal *joint life* berjangka dengan jangka waktu pertanggungan $(m - t)$ tahun menggunakan distribusi Lomax yakni

$$\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{m-t}|} = \sum_{k=0}^{(m-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y}. \quad (30)$$

Nilai tunai anuitas hidup awal *joint life* berjangka dengan jangka waktu pertanggungan h tahun dimana $h < m < n$ menggunakan distribusi Lomax diperoleh berdasarkan persamaan (27) dan persamaan (29), yaitu

$$\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} = \sum_{t=0}^{h-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}. \quad (31)$$

Berdasarkan persamaan (28) dan persamaan (30) nilai tunai anuitas hidup awal *joint life* berjangka dengan jangka waktu pertanggungan $(h - t)$ tahun menggunakan distribusi Lomax dapat dinyatakan

$$\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{h-t}|} = \sum_{k=0}^{(h-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y}. \quad (32)$$

4. CADANGAN ZILLMER ASURANSI JIWA *JOINT LIFE* DWIGUNA MENGGUNAKAN DISTRIBUSI LOMAX

Sebelum menghitung cadangan Zillmer, terlebih dahulu dihitung premi tunggal dan premi tahunan asuransi jiwa *joint life* dwiguna. Premi tunggal asuransi jiwa *joint life* dwiguna dinotasikan dengan $A_{xy:\overline{n}|}$ dan dapat dinyatakan

$$A_{xy:\overline{n}|} = 1 - d \ddot{a}_{xy:\overline{n}|}. \quad (33)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (27) ke dalam persamaan (33) diperoleh premi tunggal asuransi jiwa *joint life* dwiguna, yaitu

$$A_{xy:\overline{n}|} = 1 - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}. \quad (34)$$

Berdasarkan persamaan (34) premi tunggal untuk peserta asuransi yang berusia $(x + t)$ tahun dan $(y + t)$ tahun dengan jangka waktu pertanggungan $(n - t)$ tahun



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber;
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

menggunakan distribusi Lomax, yaitu

$$A_{x+t, y+t: \overline{n-t}} = 1 - d \sum_{k=0}^{(n-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y}. \quad (35)$$

Premi tahunan merupakan premi yang dibayarkan pada setiap awal tahun yang besarnya bisa sama maupun berubah-ubah setiap tahun [5, h. 106]. Premi tahunan asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax yang dibayarkan selama m tahun dimana $m < n$ oleh peserta asuransi berusia x tahun dan y tahun dinotasikan dengan ${}_mP_{xy:\overline{n}}$ dapat dinyatakan

$${}_mP_{xy:\overline{n}} = \frac{1 - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}}. \quad (36)$$

Cadangan prospektif asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax dari peserta asuransi berusia x tahun dan y tahun dengan t waktu perhitungan cadangan, m masa pembayaran premi, n jangka waktu pertanggungan, dan uang pertanggungan dibayarkan pada akhir tahun polis dimana $t < m < n$, dinotasikan dengan ${}_tV_{xy:\overline{n}}$ [5, h. 126], yaitu

$$\begin{aligned} {}_tV_{xy:\overline{n}} = & R \left(1 - d \sum_{k=0}^{(n-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y} \right) \\ & - \left(\frac{R \left(1 - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y} \right)}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}} \right. \\ & \left. \cdot \sum_{k=0}^{(m-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y} \right). \quad (37) \end{aligned}$$

Cadangan Zillmer merupakan salah satu jenis cadangan premi modifikasi yang perhitungannya menggunakan cadangan prospektif dan tingkat Zillmer sebesar α . Pada cadangan Zillmer terdapat premi modifikasi yaitu P_1 dan P_2 , dengan h waktu Zillmer dan $P_1 < {}_mP_{xy:\overline{n}} < P_2$. Hubungan tingkat Zillmer dan premi bersih [6, h. 11], yaitu

$$P_2 - P_1 = \alpha. \quad (38)$$

Premi modifikasi P_1 yang merupakan premi bersih pada tahun pertama polis dapat dinyatakan

$$P_1 = {}_mP_{xy:\overline{n}} - \alpha + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{xy:h}}. \quad (39)$$



Selanjutnya premi modifikasi P_2 ialah premi bersih pada tahun kedua polis sampai tahun ke- h polis, yaitu

$$P_2 = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}} + {}_mP_{xy:\overline{n}|}. \quad (40)$$

Cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna untuk peserta asuransi berusia x tahun dan y , waktu Zillmer h tahun dan $h < m < n$, pembayaran dilakukan selama m tahun dan dalam jangka waktu pertanggungan selama n tahun dinotasikan dengan ${}_tV_{xy:\overline{n}|}^{(hz)}$ dengan $1 \leq t \leq h$ sebagai berikut [6, h. 12]:

$${}_tV_{xy:\overline{n}|}^{(hz)} = {}_tV_{xy:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}} \ddot{a}_{x+t, y+t: \overline{h-t}|}. \quad (41)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (31), persamaan (32), dan persamaan (37) ke dalam persamaan (41) diperoleh cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax, yaitu

$$\begin{aligned} {}_tV_{xy:\overline{n}|}^{(hz)} = & R \left(1 - d \sum_{k=0}^{(n-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y} \right) \\ & - \left(\frac{R \left(1 - d \sum_{t=0}^{n-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y} \right)}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}} \right) \\ & \cdot \sum_{k=0}^{(m-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y} \\ & - \left(\frac{\alpha}{\sum_{t=0}^{h-1} v^t \left(\frac{\lambda_x + x}{\lambda_x + x + t} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y}{\lambda_y + y + t} \right)^{\theta_y}} \right) \\ & \cdot \sum_{k=0}^{(h-t)-1} v^k \left(\frac{\lambda_x + x + t}{\lambda_x + x + t + k} \right)^{\theta_x} \left(\frac{\lambda_y + y + t}{\lambda_y + y + t + k} \right)^{\theta_y} \right). \quad (42) \end{aligned}$$

Contoh 1 Sepasang suami isteri yang masing-masing berusia 38 tahun dan 35 tahun mengikuti program asuransi jiwa *joint life* dwiguna dengan jangka waktu 20 tahun dan masa pembayaran premi selama 18 tahun. Jika uang pertanggungan yang diterima ahli waris sebesar Rp100,000,000, tingkat bunga yang berlaku sebesar 0.02, tingkat Zillmer sebesar 0.025 dan waktu Zillmer selama 16 tahun, maka tentukanlah perhitungan dari kasus berikut:

- Cadangan prospektif asuransi jiwa *joint life* dwiguna dengan menggunakan distribusi Lomax.
- Cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna dengan menggunakan distribusi Lomax.



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber.
- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Berdasarkan persoalan tersebut diketahui $x = 38$, $y = 35$, $n = 20$, $m = 18$, $h = 16$, $i = 0.02$, $\alpha = 0.025$, dan $R = 100000000$. Dengan menggunakan persamaan (24) diperoleh faktor diskon $v = 0.980392157$ dan tingkat diskon berdasarkan persamaan (25) yaitu $v = 0.019607843$. Sebelum menentukan cadangan terlebih dahulu ditentukan estimasi nilai parameter dari distribusi Lomax, diperoleh estimasi nilai parameter untuk suami yaitu $\hat{\theta}_x = 1.0479269640$ dan $\hat{\lambda}_x = 29.6122044900$ dan untuk istri yaitu $\hat{\theta}_y = 1.0839333430$ dan $\hat{\lambda}_y = 29.2092493200$.

Selanjutnya dilakukan perhitungan pada $t = 1$ untuk masing-masing kasus menggunakan *software* Maple-13 dan diperoleh hasilnya sebagai berikut:

- (i) *Cadangan prospektif asuransi jiwa joint life dwiguna dengan menggunakan distribusi Lomax*

Cadangan prospektif untuk akhir tahun pertama dari pasangan suami isteri yang tergabung dalam asuransi jiwa *joint life dwiguna* menggunakan distribusi Lomax, dengan menggunakan persamaan (34) diperoleh

$${}_{1|}^{18}V_{38,35:\overline{20}|} = \text{Rp } 3,175,431.355.$$

- (ii) *Cadangan Zillmer asuransi jiwa joint life dwiguna dengan menggunakan distribusi Lomax*

Cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life dwiguna* menggunakan distribusi Lomax untuk pasangan suami dan isteri tersebut pada akhir tahun pertama berdasarkan persamaan (39) yakni

$${}_{1|}^{18}V_{38,35:\overline{20}|}^{(16z)} = \text{Rp } 3,175,431.331.$$

Perhitungan lengkap cadangan prospektif dan cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life dwiguna* menggunakan distribusi Lomax pada sepasang suami isteri dengan masing-masing berusia 38 tahun dan 35 tahun pada tahun ke- t , untuk kedua kasus diatas disajikan dalam Tabel 1 dan diilustrasikan dalam grafik pada Gambar 1.

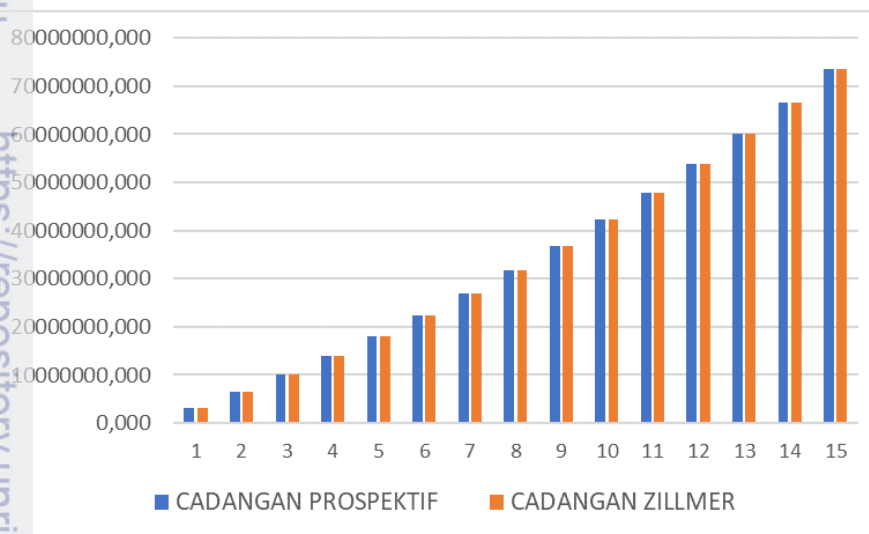
Tabel 1: Cadangan prospektif dan Zillmer dengan distribusi Lomax

| Tahun | Premi Tunggal (Rp) | Cadangan Prospektif (Rp) | Cadangan Zillmer (Rp) |
|-------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| t | $A_{38+t,35+t:\overline{20-t} }$ | ${}_t^mV_{38,35:\overline{20} }$ | ${}_t^mV_{38,35:\overline{20} }^{(16z)}$ |
| 1 | 75,212,641.256 | 3,175,431.355 | 3,175,431.331 |
| 2 | 75,967,977.647 | 6,564,782.813 | 6,564,782.790 |
| 3 | 76,773,971.941 | 10,174,772.295 | 10,174,772.273 |
| 4 | 77,632,208.513 | 14,012,358.879 | 14,012,358.858 |
| 5 | 78,544,328.446 | 18,084,749.096 | 18,084,749.077 |
| 6 | 79,512,030.973 | 22,399,403.312 | 22,399,403.294 |
| 7 | 80,537,075.016 | 26,964,042.414 | 26,964,042.397 |
| 8 | 81,621,280.735 | 31,786,654.690 | 31,786,654.675 |
| 9 | 82,766,531.148 | 36,875,502.915 | 36,875,502.901 |
| 10 | 83,974,773.809 | 42,239,131.729 | 42,239,131.717 |



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

| Tahun | Premi Tunggal (Rp) | Cadangan Prospektif (Rp) | Cadangan Zillmer (Rp) |
|-------|-----------------------|--------------------------|-------------------------------|
| t | $A_{38+t,35+t:20-t }$ | ${}_t^mV_{38,35:20 }$ | ${}_t^mV_{38,35:20 }^{(16z)}$ |
| 11 | 85,248,022.524 | 47,886,375.178 | 47,886,375.168 |
| 12 | 86,588,359.143 | 53,826,364.569 | 53,826,364.561 |
| 13 | 87,947,935.389 | 60,068,536.504 | 60,068,536.498 |
| 14 | 89,478,974.753 | 66,622,641.209 | 66,622,641.205 |
| 15 | 91,033,774.453 | 73,498,751.105 | 73,498,751.103 |



Gambar 1: Perbandingan cadangan prospektif dan cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna

Berdasarkan Tabel 1 dan ilustrasi pada Gambar 1 diperoleh bahwa hasil cadangan prospektif lebih besar dibandingkan dengan cadangan Zillmer pada asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax. Dalam kasus ini cadangan prospektif asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax lebih menguntungkan peserta asuransi dibandingkan dengan cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax.

6. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, diketahui bahwa besarnya premi bergantung pada jangka waktu pertanggungan, jangka pembayaran, tingkat bunga, nilai tunai anuitas, dan usia peserta asuransi. Pada artikel ini menggunakan tingkat bunga majemuk yang bergantung pada faktor diskon dan tingkat diskon. Perhitungan cadangan Zillmer menghasilkan nilai yang lebih rendah dibandingkan dengan cadangan prospektif asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax. Hal ini dikarenakan cadangan Zillmer merupakan cadangan premi yang perhitungan dasarnya



menggunakan cadangan prospektif dikurangi tingkat Zillmer beserta biaya anuitas terhadap waktu Zillmer. Namun perhitungan cadangan prospektif dan cadangan Zillmer asuransi jiwa *joint life* dwiguna menggunakan distribusi Lomax nilainya semakin meningkat setiap tahunnya, hal ini disebabkan premi tunggalnya semakin meningkat dengan anuitas hidup awal *joint life* berjangkanya yang semakin menu-run.

Ucapan terima kasih diberikan kepada Dra. Hasriati, M.Si. yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] A. Ahmad, S. P. Ahmad dan A. Ahmed, *Bayesian analysis of shape parameter of Lomax distribution using different loss functions*, International Journal of Statistics and Mathematics, 2 (2015), 55-56.
- [2] L. J. Bain dan M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*, Duxbury, Los Angeles, 1991.
- [3] N. L. Bowers, H. U. Geerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, dan C. J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, 1997.
- [4] D. C. M. Dickson, M. R. Hardy, dan H. R. Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk*, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [5] T. Futami, *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I, Terj. dari Seimei Hoken Sugaku, Gekan ("92 Revision)*, oleh Gatot Herliyanto, Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Tokyo, Japan, 1993.
- [6] T. Futami, *Matematika Asuransi Jiwa Bagian II, Terj. dari Seimei Hoken Sugaku, Gekan ("92 Revision)*, oleh Gatot Herliyanto, Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Tokyo, Japan, 1994.
- [7] K. A. W. Han, *Elementary Numerical Analysis, Third Edition*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2004.
- [8] A. S. Hassan dan A. N. Zaky, *Entropy bayesian estimation for Lomax distribution based on record*, Thailand Statistician, 19 (2021), 95-114.
- [9] N. Iriana, I. Purnamasari, dan Y.N. Nasution, *Penentuan cadangan premi asuransi Jiwa Seumur Hidup menggunakan metode zillmer*, Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi, 16 (2020), 219-225.
- [10] S. D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics, Second Edition*, John Wiley & Sons, Toronto, 2011.
- [11] K. M. Ramacandran dan C. P. Tsokos, *Mathematical Statistics with Applications*, Elsevier Academic Press, California, 2009.