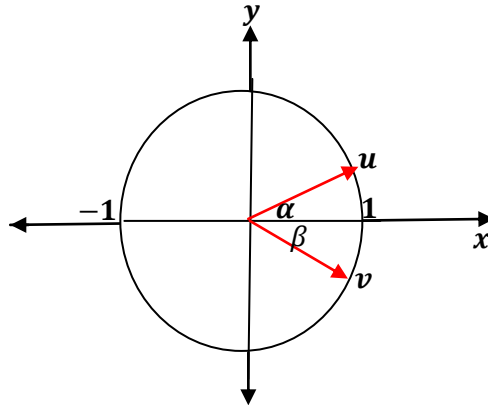


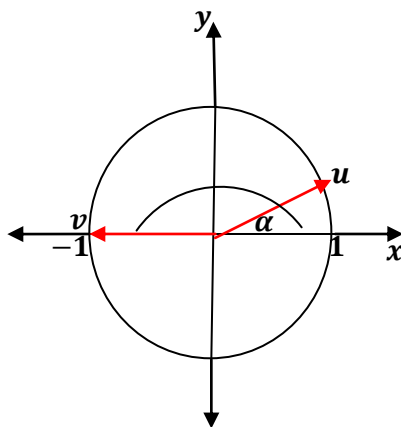
$$\begin{aligned}
 & -\sin \alpha \sin \beta (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) \\
 & = \cos \alpha \cos \beta (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + \cos \alpha \sin \beta (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + \sin \alpha \cos \beta (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) \\
 & \quad - \sin \alpha \sin \beta (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) \\
 \cos (\alpha + \beta) & = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 \text{Jika } \alpha = \beta \text{ maka } \cos 2\alpha & = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$



Gambar 6: Membuktikan *cosinus* jumlah sudut

Membuktikan *Cosinus Selisih Sudut*

Misalkan pada lingkaran unit dengan $r = 1$ satuan, maka vektor dalam lingkaran unit dapat ditulis $\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ dimana θ adalah sudut pada x positif. Perhatikan Gambar 7 berikut ini:

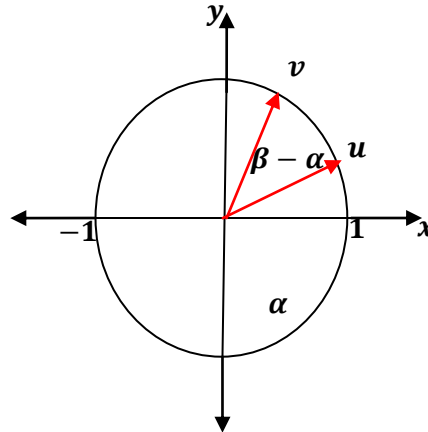


Gambar 7: Membuktikan *cosinus* $(180 - \alpha)$

Pada Gambar 7 diketahui $\mathbf{u} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$ dan $\mathbf{v} = \cos 180 \mathbf{i} + \sin 180 \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, sehingga

$$\begin{aligned}
 \cos (180 - \alpha) & = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}] \cdot [-\mathbf{i}] \\
 \cos (180 - \alpha) & = -\cos \alpha (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) - \sin \alpha (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) \\
 \cos (180 - \alpha) & = -\cos \alpha
 \end{aligned}$$

Dari Gambar 7, dapat diperumum untuk mendapatkan formula cosinus selisih sudut, perhatikan Gambar 8 berikut ini



Gambar 8: Membuktikan *cosinus* sudut selisih

Pada Gambar 8, diketahui $u = \cos \alpha i + \sin \alpha j$ dan $v = \cos \beta i + \sin \beta j$, sehingga

$$\begin{aligned} \cos (\beta - \alpha) &= u \cdot v = [\cos \alpha i + \sin \alpha j] \cdot [\cos \beta i + \sin \beta j] \\ \cos (\beta - \alpha) &= \cos \alpha \cos \beta (i \cdot i) + \cos \alpha \sin \beta (i \cdot j) + \sin \alpha \cos \beta (j \cdot i) \\ &\quad + \sin \alpha \sin \beta (j \cdot j) \\ &= \cos \alpha \cos \beta (1) + \cos \alpha \sin \beta (0) + \sin \alpha \cos \beta (0) \\ &\quad + \sin \alpha \sin \beta (1) \\ \cos (\beta - \alpha) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ -\cos (\beta - \alpha) &= \cos [-(\beta - \alpha)] = \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Jika $\alpha = \beta$ maka $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa interpretasi hasil kali titik secara geometri dapat dikembangkan melalui kesebangunan segitiga dan untuk memudahkan siswa dalam mengingat formula cosinus sudut jumlah dan selisih dapat dibuktikan melalui hasil kali titik yaitu dengan melukiskan dua buah vektor pada lingkaran unit.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H dan Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1.*, Erlangga, Bandung.

[2] Anton, H. *Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1.*, Binarupa Aksara., Jakarta, 1997.

[3] Bretscher, O. 2005. *Linear Algebra with Applications 3ed.*, Pearson Education, London.

[4] C. Dray, Tevian. 2008. *The Geometry of the Dot and Cross Products.*, corinne@physics., Oregonstate. Edu.

[5] Stirling, B. *Linear Algebra.*, Oxford University Press, New York, 1992.

[6] Wirodikromo. S. 2006. *Matematika SMA 3 IPA*, Erlangga, Jakarta.

