FAMILI BARU DARI METODE ITERASI ORDE TIGA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR DENGAN AKAR GANDA

Elvi Syahriah[1*], Khozin Mu'tamar[2]

[1,2]Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

*syahriahelvi@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses a new family of iterative method for finding multiple root of a nonlinear equation with known multiplicity. Using Taylor expansion, Geometric and Binomial series, it is shown that the method is of order three. At the end some numerical examples are given to show the performance of the presented method and to compare with some known methods.

Keywords: Nonlinear equation, orde of convergence, multiple root, iterative methods, third order

ABSTRAK

Artikel ini membahas keluarga baru metode iterasi untuk menemukan beberapa akar ganda persamaan nonlinear dengan multiplisitas diketahui. Dengan menggunakan polinomial Taylor, deret geometri dan deret Binomial ditunjukkan bahwa metode ini berorde tiga. Untuk melihat kinerja metode yang diusulkan digunakan uji komputasi menggunakan beberapa fungsi uji dan membandingkan dengan metode yang sudah dikenal.

Kata kunci: Persamaan nonlinear, orde konvergensi, akar ganda, metode iterasi, orde tiga

1. PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear memiliki peranan yang sangat penting dalam seluruh bidang ilmiah seperti fisika dan biologi, terutama dibidang matematika. Persoalan yang sering dijumpai adalah bagaimana menemukan akar dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Akar-akar dari persamaan nonlinear dapat dihitung dengan metode analitik dan metode numerik. Karena tidak semua kasus persamaan (1) dapat diselesaikan secara analitik, sehingga solusi numerik menjadi metode alternatif. Salah satu metode numerik yang dimodifikasi untuk akar ganda adalah metode Newton modifikasi dengan orde konvergensi kuadratik yang dijelaskan oleh Ralston dan Rabinowitz [5, h. 354] yang bentuk iterasinya adalah

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dengan m adalah bilangan multiplisitas akar dan $m > 1$. Modifikasi metode numerik untuk akar ganda telah dikembangkan oleh beberapa penulis yaitu Hansen dan Patrick [2] dan Neta [4]. Disamping itu Lin *et al.*[3] mengembangkan pula metode iterasi untuk mendapatkan akar ganda yang didasarkan kepada metode Halley.

Pada artikel ini bagian dua didiskusikan metode Lin *et al.*[3] berserta orde konvergensinya. Kemudian dilanjutkan di bagian tiga dengan melakukan uji komputasi terhadap lima contoh fungsi persamaan nonlinear.

2. SKEMA ITERASI PADA ORDE TIGA

Diberikan skema iterasi pada orde tiga untuk mencari akar ganda:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \alpha\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{Af(x_n) + Bf(y_n)}{Cf(x_n) + Df(y_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dan

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \alpha\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{Af(x_n) + Bf(y_n)}{Cf(x_n) + Df(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dengan α, A, B, C dan D adalah parameter yang akan ditentukan. Pada persamaan (2) disebut skema iterasi 1 dan persamaan (3) disebut skema iterasi 2.

Teorema 1 (Orde Konvergensi) Asumsikan bahwa fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval terbuka I. Misalkan $x^* \in I$ adalah akar ganda dari $f(x) = 0$ dengan bilangan multiplisitas $m(m > 1)$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Jika x_0 cukup dekat dengan x^*, maka metode yang didefinisikan oleh tipe skema iterasi 1 pada persamaan (2) memiliki konvergensi berorde tiga dengan $\alpha \neq 0$ dan memenuhi nilai parameter

$$\alpha = 1, A = 1, B = \frac{(-m-1)\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{-m}}{m},$$

$$C = 0, D = -\frac{\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{-m}}{m(m-1)},$$

Bukti. Misalkan x^* adalah akar ganda dari $f(x) = 0$ dengan bilangan multiplisitas $m(m > 1)$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Asumsikan $e_n = x_n - x^*$, kemudian dengan melakukan ekspansi Taylor dari $f(x)$ di sekitar $x = x^*$ dan dievaluasi di titik $x = x_n$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - x^*)^i$ untuk $i \geq m + 4$ diperoleh

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} e_n^m \left(1 + C_1 e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3\right) + O(e_n^4), \tag{4}$$

dengan $C_i = \dfrac{m! f^{(m+i)}(x^*)}{(m+i)! f^{(m)}(x^*)}, \qquad i = 1, 2, 3.$

Kemudian dilakukan ekspansi Taylor $f'(x)$ di sekitar $x = x^*$ dan dievaluasikan di titik $x = x_n$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - x^*)^i$ untuk $i \geq m + 4$ diperoleh

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-1)!} e_n^{m-1} \left(1 + D_1 e_n + D_2 e_n^2 + D_3 e_n^3\right) + O(e_n^4), \tag{5}$$

dengan $D_i = \dfrac{(m-1)! f^{(m+i)}(x^*)}{(m+i-1)! f^{(m)}(x^*)}, \quad i = 1, 2, 3.$

Selanjutnya $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dihitung menggunakan persamaan (4) dan persamaan (5), sehingga dengan menggunakan deret geometri diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n}{m} - \frac{e_n^2 C_1}{m^2} + O(e_n^4). \tag{6}$$

Kemudian persamaan (6) disubstitusikan ke persamaan (2), diperoleh

$$y_n = x^* + \frac{\alpha e_n^2 C_2}{m^2} - \frac{(-m+\alpha) e_n}{m} + O(e_n^4). \tag{7}$$

Selanjutnya misalkan $E_n = y_n - x^*$ dan dilakukan ekspansi Taylor terhadap $f(x)$ di sekitar $x = x^*$ dan dievaluasi di titik $x = y_n$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(y_n - x^*)^i$ untuk $i \geq m + 4$ diperoleh

$$f(y_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} E_n^m \left(1 + C_1 E_n + C_2 E_n^2 + C_3 E_n^3\right) + O(E_n^4). \tag{8}$$

Selanjutnya dihitung $E_n = y_n - x^*$ dengan mensubstitusikan persamaan (7), maka diperoleh

$$E_n = \frac{\alpha e_n^2 C_2}{m^2} - \frac{(-m+\alpha)e_n}{m} + O(e_n^4). \tag{9}$$

Selanjutnya dihitung E_n^m, dengan menggunakan deret binomial diperoleh

$$E_n^m = e_n^m(A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + O(e_n^4)), \tag{10}$$

dengan

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\alpha C_1 e_n^2}{m^2} - \frac{(\alpha - m)e_n}{m}, \\
A_2 &= \frac{(\alpha - m)^2 e_n^2}{m^2} - \frac{2(\alpha - m)\alpha C_1 e_n^3}{m^3}, \\
A_3 &= -\frac{(\alpha - m)^3 e_n^3}{m^3}.
\end{aligned}$$

Kemudian persamaan (9) dan persamaan (10) disubstitusikan ke persamaan (8), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
f(y_n) = \frac{1}{6}\frac{1}{m^3(\alpha - m)^3}\Bigg(\bigg(-\frac{\alpha - m}{m}\bigg)^m \bigg(&-15e_n^{m+2}\alpha^3 m^3 C_1^2 \\
&+ 15e_n^{m+2}\alpha^2 m^4 C_1^2 - 6e_n^{m+2}\alpha m^5 C_1^2 + 36e_n^{m+3}\alpha^5 m C_3 \\
&- 12e_n^{m+3}\alpha^5 C_1 C_2 - 90e_n^{m+3}\alpha^4 m^2 C_3 + 120e_n^{m+3}\alpha^3 m^3 C_3 \\
&- 2e_n^{m+3}\alpha^3 m C_1^3 - 90e_n^{m+3}\alpha^2 m^4 C_3 + 36e_n^{m+3}\alpha m^5 C_3 \\
&+ 6e_n^{m+2}\alpha^5 m C_2 - 30en^{m+2}\alpha^4 m^2 C_2 + 6e_n^{m+2}\alpha^4 m C_1^2 \\
&+ 6e_n^{m+2}\alpha^3 m^3 C_2 - 21e_n^{m+2}\alpha^3 m^2 C_1^2 - 60e_n^{m+2}\alpha^2 m^4 C_2 \\
&+ 21e_n^{m+2}\alpha^2 m^3 C_1^2 + 30e_n^{m+2}\alpha m^5 C_2 - 6e_n^{m+2}\alpha m^4 C_1^2 \\
&- 6e_n^{m+1}\alpha^4 m^2 C_1 + 18e_n^{m+1}\alpha^3 m^3 C_1 - 24e_n^{m+1}\alpha^2 m^4 C_1 \\
&+ 18e_n^{m+1}\alpha m^5 C_1 - 3e_n^{m+3}\alpha^4 m^2 C_1^3 + 5e_n^{m+3}\alpha^3 m^3 C_1^3 \\
&- 3e_n^{m+3}\alpha^2 m^4 C_1^3 - 3e_n^{m+3}\alpha^4 m C_1^3 + 9e_n^{m+3}\alpha^3 m^2 C_1^3 \\
&- 3e_n^{m+3}\alpha^2 m^3 C_1^3 + 6e_n^{m+2}\alpha^4 m^2 C_1^2 - 6e_n^m m^6 \\
&- 6e_n^{m+3}\alpha^5 m C_1 C_2 + 24e_n^{m+3}\alpha^4 m^2 C_1 C_2 - 36e_n^{m+3}\alpha^3 m^3 C_1 C_2 \\
&+ 24e_n^{m+3}\alpha^2 m^4 C_1 C_2 - 6e_n^{m+3}\alpha m^5 C_1 C_2 + 48e_n^{m+3}\alpha^4 m C_1 C_2 \\
&- 72e_n^{m+3}\alpha^3 m^2 C_1 C_2 + 48e_n^{m+3}\alpha^2 m^3 C_1 C_2 - 12e_n^{m+3}\alpha m^4 C_1 C_2 \\
&- 6e_n^{m+3}\alpha^6 C_3 - 6e_n^{m+3} m^6 C_3 - 6e_n^{m+2} m^6 C_2 \\
&- 6e_n^{m+1} m^6 C_1 + 6e_n^m \alpha^3 m^3 - 18e_n^m \alpha^2 m^4 + 18e_n^m \alpha m^5\bigg)\Bigg).
\end{aligned} \tag{11}$$

Kemudian untuk skema iterasi 1, substitusikan persamaan (4), (6), (7) dan (11) ke persamaan (2), sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x^* + K_1 e_n + K_2 e_n^2 + K_3 e_n^3 + O(e_n^4), \tag{12}$$

dengan

$$K_1 = 1 - \frac{\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha D + B\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m + C\alpha + A}{\left(\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m D + C\right)m},$$

$$\begin{aligned}
K_2 = {} & \frac{1}{\left(\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m D + C\right)^2 m^2(\alpha - m)}\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Bigg(-\frac{\alpha - m}{m}\Bigg)^m\Bigg)^2 \alpha^2 D^2 \\
& - \left(\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m\right)^2 \alpha D^2 m - A\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha^2 D \\
& + BC\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha^2 + B\left(\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m\right)^2 \alpha D \\
& - B\left(\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m\right)^2 Dm + 2C\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha^2 D \\
& - 2C\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha Dm + A\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha A \\
& - A\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m Dm + BC\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha \\
& - BC\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m + C^2\alpha^2 - C\alpha m + AC\alpha - ACm\Bigg)C_1\Bigg),
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
K_3 = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{(\alpha - m)^2 m^3\left(\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m D + C\right)^3}\Bigg((AD - BC)\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \alpha \\
& \Bigg(-2\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_1^2\alpha^3 D + 4\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_1^2\alpha^2 Dm - 5\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \\
& C_1^2\alpha Dm^2 + 2\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_1^2 Dm^3 + 4CC_1^2\alpha^2 m - 5CC_1^2\alpha m^2 + 2CC_1^2 m^3 \\
& + 4\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_1^2\alpha^2 D - 7\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_1^2\alpha Dm + 2\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m \\
& C_1^2 Dm^2 + 2\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_2\alpha^3 D - 8\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_2\alpha^2 Dm \\
& + 10\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_2\alpha Dm^2 - 4\left(-\frac{\alpha - m}{m}\right)^m C_2 Dm^3 \\
& + 4CC_1^2\alpha^2 - 7CC_1^2\alpha m + 2CC_1^2 m^2 + 2CC_1^2\alpha^3 - 8CC_2\alpha^2 m \\
& + 10CC_2\alpha m^2 - 4CC_2 m^3\Bigg)\Bigg).
\end{aligned} \tag{13}$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ pada persamaan (12) dapat ditulis

$$e_{n+1} = K_1 e_n + K_2 e_n^2 + K_3 e_n^3 + O(e_n^4), \tag{14}$$

untuk mendapatkan orde tiga maka nilai $K_1 = K_2 = 0$ dengan $\alpha \neq 0$ dan $A, C \in \mathbb{R}$ adalah variabel bebas yang keduanya tak nol bersamaan. Misalkan dipilih

$$\left.\begin{array}{rcl} A & = & 1, \\ C & = & 0, \end{array}\right\} \tag{15}$$

sehingga diperoleh nilai parameter

$$\left.\begin{array}{rcl} B & = & \dfrac{(-m-1)\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{-m}}{m}, \\ D & = & -\dfrac{\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{-m}}{m(m-1)}. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Selanjutnya substitusikan nilai paramater α, A, B, C dan D pada persamaaan (15) dan (16) ke persamaan (14), sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = K_3 e_n^3 + O(e_n^4), \tag{17}$$

dengan K_3 diberikan pada persamaan (13) dan A, C, B, D diberikan pada persamaan (15) dan (16). Berdasarkan persamaan (17) maka menurut definisi persamaan eror [6] skema iterasi 1 pada persamaan (2) terbukti memiliki orde tiga. ■

Teorema 2 Asumsikan bahwa fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial secukupnya pada interval terbuka I. Misalkan $x^* \in I$ adalah akar ganda dari $f(x) = 0$ dengan bilangan multiplisitas $m (m > 1)$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Jika x_0 cukup dekat dengan x^*, maka metode yang didefinisikan oleh tipe skema iterasi 2 pada persamaan (3) memiliki konvergensi berorde tiga dengan $\alpha \neq 0$ dan memenuhi nilai parameter

$$\alpha = 1, A = 1, B = 0, C = \frac{m\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^m}{m-1}, D = -1.$$

Bukti. Teorema 2 dapat dibuktikan dengan menggunakan cara yang sama pada Teorema 1.

3. CONTOH NUMERIK

Pada bagian ini akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan Skema iterasi 1 (MS1) dan Skema iterasi 2 (MS2) dengan metode Newton (MN), metode

Chebyshev (MC), dan metode Halley (MH). Adapun persamaan nonlinear yang digunakan dalam melakukan perbandingan metode adalah sebagai berikut:

1. $f_1(x) = (\sin^2 x - x^2 + 1)^2,$ $\quad m = 2,$
2. $f_2(x) = (\cos x - x)^3,$ $\quad m = 3,$
3. $f_3(x) = (x^3 - 10)^8,$ $\quad m = 8,$
4. $f_4(x) = (x^3 + 4x^2 - 10)^3,$ $\quad m = 3.$
5. $f_5(x) = 1 - x\exp(1 - x)$ $\quad m = 2.$

Untuk melakukan uji komputasi dari contoh-contoh persamaan nonlinear di atas digunakan program Maple 13. Dalam menemukan akar persamaan nonlinear ditentukan juga kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk semua metode, di antaranya yaitu:

1. Nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
2. Selisih nilai mutlak antara dua akar hampiran yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
3. Jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

f_i	x_0	Metode	$n+1$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
f_1	1.45	MN	5	$3.08484e - 93$	$5.34351e - 24$
		MC	3	$7.14162e - 72$	$9.80996e - 13$
		MH	3	$4.31317e - 80$	$5.41702e - 14$
		MS1	3	$4.81397e - 68$	$3.77370e - 12$
		MS2	3	$1.08558e - 82$	$2.15970e - 14$
	1.5	MN	5	$1.43524e - 73$	$4.41316e - 19$
		MC	4	$0.00000e + 00$	$1.65968e - 28$
		MH	3	$3.33892e - 63$	$3.53640e - 11$
		MS1	4	$9.00000e - 118$	$9.70026e - 27$
		MS2	3	$8.96035e - 66$	$1.42507e - 11$
f_2	1.0	MN	5	$3.43730e - 123$	$6.39054e - 21$
		MC	3	$1.43945e - 81$	$1.60038e - 09$
		MH	3	$1.78941e - 85$	$6.62421e - 10$
		MS1	3	$2.39208e - 83$	$1.02798e - 09$
		MS2	3	$8.78265e - 91$	$1.88560e - 10$
	2.0	MN	4	$5.12761e - 70$	$4.65394e - 12$
		MC	4	$1.90051e - 95$	$4.59278e - 11$
		MH	4	$1.52317e - 104$	$5.03790e - 12$
		MS1	4	$1.08891e - 108$	$1.57120e - 12$
		MS2	4	$1.38833e - 122$	$5.52065e - 14$

f_i	x_0	Metode	$n+1$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
f_3	9.0	MN	8	$1.51989e-126$	$5.38438e-09$
		MC	5	$2.64163e-82$	$2.33329e-04$
		MH	5	$1.20734e-158$	$2.08801e-07$
		MS1	5	$1.24182e-77$	$3.56814e-04$
		MS2	5	$1.43093e-161$	$1.59369e-07$
	8.50	MN	7	$7.31988e-65$	$3.85746e-05$
		MC	5	$7.69917e-93$	$8.49107e-05$
		MH	5	$5.68615e-175$	$4.35954e-08$
		MS1	5	$9.16384e-88$	$1.34968e-04$
		MS2	5	$4.22284e-178$	$3.26327e-08$
f_4	1.50	MN	5	$1.88898e-111$	$1.23569e-19$
		MC	3	$1.28426e-13$	$2.39753e-10$
		MH	3	$3.70959e-98$	$1.03953e-11$
		MS1	3	$1.82734e-81$	$5.22024e-10$
		MS2	2	$5.95019e-100$	$6.82923e-12$
	2.50	MN	6	$2.38060e-75$	$1.28426e-13$
		MC	4	$2.21050e-79$	$9.55193e-10$
		MH	4	$1.68437e-107$	$9.52223e-13$
		MS1	4	$8.01047e-73$	$4.76316e-09$
		MS2	4	$5.89535e-111$	$4.08981e-13$
f_5	1.5	MN	6	$2.11688e-96$	$2.48452e-24$
		MC	4	$4.51641e-108$	$2.69950e-18$
		MH	4	$1.00219e-159$	$1.02424e-26$
		MS1	4	$3.46733e-82$	$4.59837e-14$
		MS2	4	$4.90552e-155$	$5.88447e-26$
	1.7	MN	6	$1.54806e-76$	$2.29755e-19$
		MC	4	$3.03148e-81$	$7.98780e-14$
		MH	4	$5.00625e-136$	$9.12349e-23$
		MS1	5	$3.63721e-152$	$9.98617e-26$
		MS2	5	$5.22179e-132$	$4.05101e-22$

Pada Tabel 1 kolom pertama menyatakan persamaan nonlinear, kolom kedua merupakan tebakan awal yang dinotasikan dengan x_0, kolom ketiga merupakan metode iterasi yang dibandingkan, kolom keempat merupakan jumlah iterasi yang dinotasikan dengan $n+1$, kolom kelima merupakan nilai fungsi yang dinotasikan dengan $|f(x_{n+1})|$ dan kolom terakhir merupakan tingkat kesalahan eror dari setiap metode yang dibandingkan yang dinotasikan dengan $|x_{n+1}-x_n|$.

Berdasarkan Tabel 1 jumlah iterasi pada metode pembanding seperti metode Newton, metode Chebyshev, dan metode Halley memiliki perbedaan yang tidak begitu signifikan dengan skema iterasi 1 dan skema iterasi 2 dalam menemukan akar pendekatan untuk fungsi nonlinear yang sama. Selanjutnya jika membandingkan nilai fungsi dan tingkat kesalahan dari iterasi terakhir pada metode Chebyshev dan metode Halley yang memiliki orde tiga dapat dilihat pada tabel 1 pada contoh fungsi pertama dengan $x_0 = 1.45$ metode Halley lebih unggul dari pada metode Chebyshev, tetapi jika tebakan awalnya $x_0 = 1.50$ maka metode Chebyshev lebih unggul dari pada metode Halley. Untuk fungsi yang kedua dengan $x_0 = 1.0$ metode Halley lebih unggul dari pada metode Chebyshev, begitu juga dengan $x_0 = 2.0$ metode Halley juga lebih unggul dari pada metode Chebyshev. Secara keseluruhan metode Halley dan metode Chebyshev lebih unggul dari metode Newton yang berorde dua.

Kemudian jika membandingkan nilai fungsi dan tingkat kesalahan dari iterasi terakhir pada skema iterasi 1 dan skema iterasi 2 yang berorde tiga dapat dilihat pada tabel 1 pada contoh fungsi pertama dengan $x_0 = 1.45$, skema iterasi 2 lebih unggul dari pada skema iterasi 2, tatapi jika tebakan awalnya dengan $x_0 = 1.50$ skema iterasi 1 lebih unggul dari pada skema iterasi 2. Untuk fungsi kedua dengan $x_0 = 1.0$, skema iterasi 2 juga masih lebih unggul dari pada skema iterasi 1, begitu juga dengan $x_0 = 2.0$ skema iterasi 2 masih lebih unggul dari skema iterasi 1. Secara keseluruhan skema iterasi 2 lebih unggul dari pada skema iterasi 1.

Berdasarkan hasil uji komputasi pada Tabel 1 bahwa skema iterasi 2 menghasilkan iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan skema iterasi 1 sehingga skema iterasi 2 lebih baik dalam mencapai akar pendekatannya. Tetapi apabila dilihat dari keseluruhan contoh fungsi yang disajikan, metode Halley (MH) untuk akar ganda menghasilkan jumlah iterasi yang lebih sedikit jika dibandingkan dengan skema iterasi 1 (MS1), skema iterasi 2 (MS2), metode Newton (MN) dan metode Chebyshev (MC). Sehingga dapat dikatakan bahwa skema iterasi 1 (MS1) dan skema iterasi 2 (MS2) untuk akar ganda dapat dijadikan metode alternatif dalam mencari akar persamaan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. G. Bartle dan R. D. Shebert, *Introduction to Real Analysis, 4^{th} Ed.*, John Wiley and Sons, New York, 2011.

[2] E. Hansen dan M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numerical Mathematics, 27 (1977), 257–259.

[3] R. F. Lin, H. M. Ren, Z. Smarda, Q. B. Wu, Y. Khan and J. L. Hu, *New families of third-order iterative methods for finding multiple roots*, Journal of Applied Computation, (2014), 1–9.

[4] B. Neta, *New third order nonlinear solvers for multiple roots*, Applied Mathematics and Computation, 202 (2008), 162–170.

[5] A. Ralston dan P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis, 2^{nd} Ed.*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1978.

[6] S. Weerakoon dan T. G. I. Fernando, *A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence*, Applied Mathematics Letters, 13 (2000), 87–93.