BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Kurva Fitting Fungsi Linear

Misalkan diberikan sejumlah n data yaitu $(t, y(t))$. Misalkan diberikan fungsi pendekatan untuk tebakan bagi data tersebut, yaitu $f(t)$. Selisih antara data dan fungsi tebakan dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y(t_i) - f(t_i))^2$$

Tujuan yang ingin dicapai adalah meminimalkan nilai dari $r(t)$. Misalkan diberikan sejumlah n data yaitu $(t, y(t))$ dan fungsi pendekatan bagi data tersebut, yaitu $f(t) = at + b,\ a, b \in R$. Eror antara data dan fungsi tebakan dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(at_i + b - y(t_i))^2 \tag{1}$$

Tujuan yang ingin dicapai adalah meminimalkan nilai $r(t)$ pada persamaan (1) dengan memilih nilai a, b. Nilai $r(t)$ minimum akan dipenuhi pada titik kritis sehingga

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}(at_i + b - y(t_i))t_i = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} at_i + b - y(t_i) = 0$$

Selanjutnya, dapat disederhanakan dalam bentuk sistem

$$\left.\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} at_i + b & = & \sum_{i=1}^{n} y(t_i) \\ \sum_{i=1}^{n} at_i^2 + bt_i & = & \sum_{i=1}^{n} y(t_i)t_i \end{array}\right\} \tag{2}$$

Sistem persamaan (2) dapat dinyatakan dalam $A\vec{x} = \vec{b}$ dengan $\vec{x} = (a, b)^T$ dengan solusinya

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n} t_i^2 & \sum_{i=1}^{n} t_i \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y(t_i) \\ \sum_{i=1}^{n} y(t_i)t_i \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.2 Kurva Fitting Eksponensial dengan Gauss Newton

Misalkan dipilih $f(t) = Ae^{Bt}$ dengan A, B adalah konstanta yang akan ditentukan nilainya. Fungsi tujuan selanjutny dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))^2$$

Untuk menentukan A, B yang meminimumkan $r(t)$ maka

$$\frac{\partial r}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))e^{Bt_i}$$

dan

$$\frac{\partial r}{\partial B} = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))t_iAe^{Bt_i}$$

Jelas bahwa bentuk persamaan di atas tidak dapat dibentuk dalam bentuk matriks. Oleh karena itu, persamaan di atas akan diselesaikan dengan metode numerik, yaitu metode Newton. Misalkan

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))e^{Bt_i}$$

dan

$$g(A, B) = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))t_iAe^{Bt_i}$$

dengan tebakan awal (A_0, B_0). Nilai (A, B) yang akan membuat $f(A, B) = 0, g(A, B) = 0$ ditentukan dengan persamaan

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n)\vec{f}(\vec{x}_n)$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f(A, B) \\ g(A, B) \end{pmatrix}$$

dan J adalah Jacobian dari fungsi $f(A, B), g(A, B)$ terhadap (A, B) yaitu

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial A} & \frac{\partial f}{\partial B} \\ \frac{\partial g}{\partial A} & \frac{\partial g}{\partial B} \end{pmatrix}$$

2.3 Model Pertumbuhan Eksponensial

Misalkan didefinisikan $N(t)$ sebagai jumlah total populasi pada waktu t. Populasi selanjutnya diamati dalam rentang waktu, sebut saja t hingga $t + \Delta t$ dimana

1. Jumlah kelahiran dan kematian proporsional dengan jumlah individu
2. Jumlah kelahiran dan kematian juga proporsional dengan lamanya waktu pengamatan

Dua asumsi pada perkembangan populasi menghasilkan

$$D \approx \alpha N(t)\Delta t$$

$$B \approx \beta N(t)\Delta t$$

dengan α, β adalah konstanta kesebandingan.

Oleh karena perkembangan populasi hanya dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian, maka

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta N(t) = \Delta B - \Delta D$$

dengan asumsi bahwa jumlah kelahiran lebih besar dibandingkan dengan jumlah kematian. Akibatnya

$$\Delta N(t) = (\beta - \alpha)N(t)\Delta t$$

atau

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \gamma N(t)$$

dengan $\gamma = \beta - \alpha \in \mathbb{R}$.

Jika waktu pengamatan dibuat sangat singkat untuk mengamati perubahan secara kontinu dimana $\Delta t \to 0$, akan diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma N(t) = \gamma N(t)$$

Persamaan pada ruas paling kiri merupakan definisi dari turunan sehingga diperoleh bentuk akhir

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t), t > 0.$$

Model ini disebut dengan model eksponensial dikarenakan solusi eksak dari model tersebut. Solusi diperoleh dengan memindah ruaskan $N(t)$ pada ruas kanan sehingga diperoleh

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \gamma \, dt$$

yang solusi akhir diperoleh dengan integral masing-masing ruas dimana

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int \gamma \, dt$$

sehingga hasilnya

$$\ln N(t) = \gamma t + C.$$

Ambil nilai eksponensial di masing-masing ruas sehingga menghasilkan

$$N(t) = e^{\gamma t + C} = Ce^{\gamma t}$$

dengan $C \in \mathbb{R}$ adalah konstanta yang diperoleh dari masalah nilai awal.

Misalkan diberikan nilai awal $N(0) = N_0$ maka akan diperoleh

$$N(0) = N_0 = C$$

Oleh karena itu, solusi khusus model eksponensial dengan nilai awal $N(0) = N_0$ adalah

$$N(t) = N_0 e^{\gamma t}$$

dengan $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

2.4 Model Pertumbuhan Logistik

Perhatikan persamaan diferensial yang menyatakan model eksponensial

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \gamma \, dt$$

Perhatikan bahwa γ bersifat konstan. Jika $\gamma = a - bN(t)$ yang merupakan fungsi linier dengan kemiringan negatif, akan diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a - bN(t))N(t).$$

Model ini disebut juga dengan model logistik. Pemilihan $\gamma = a - bN(t)$ lebih kepada filosofi penalaran umum. Secara logika, pertumbuhan populasi pada domain tertutup akan melambat jika jumlah populasi di dalamnya terus berkembang. Hal ini dimungkinkan karena aspek pendukung kehidupan menjadi materi yang diperebutkan banyak individu dalam populasi.

2.4.1 Solusi Model

Solusi dari model ini juga dapat diperoleh dengan integral masing-masing ruas, dimana

$$\int \frac{dN(t)}{(a - bN(t))N(t)} = \int dt$$

Bentuk rasional di ruas kiri perlu untuk diubah menjadi bentuk rasional yang lebih sederhana. Misalkan

$$\frac{A}{N(t)} \quad \text{dan} \quad \frac{B}{a - bN(t)}$$

selanjutnya

$$\frac{A}{N(t)} + \frac{B}{a - bN(t)} = \frac{1}{(a - bN(t))N(t)}$$

atau

$$(a - bN(t))A + N(t)B = 1 \longrightarrow aA + N(t)(B - bA) = 1$$

sehingga menghasilkan

$$aA = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{a}$$

dan (asumsi $N(t) \neq 0$)

$$B - bA = 0 \longrightarrow B = bA = \frac{b}{a}.$$

Persamaan integral selanjutnya dituliskan sebagai

$$\int \frac{1}{aN(t)}\, dN(t) + \int \frac{b}{a(a - bN(t))}\, dN(t) = \int dt$$

yang menghasilkan

$$\frac{1}{a} \ln N(t) + \frac{b}{a} \int \frac{du}{-bu} = t + c$$

atau

$$\frac{1}{a} \ln N(t) - \frac{1}{a} \ln (a - bN(t)) = t + c$$

Menggunakan aturan logaritma, diperoleh

$$\ln\left(\frac{N(t)}{a - bN(t)}\right) = at + K$$

atau

$$\frac{N(t)}{a - bN(t)} = C \exp at.$$

Sederhanakan sehingga menghasilkan

$$N(t) = \frac{aC \exp at}{1 + bC \exp at}$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{aC \exp at}{1 + bC \exp at} = \frac{a}{b}$$

Sesuai dengan kenyataan bahwa populasi, dimanapun berasal ($N(0) > a/b$ atau $N(0) < a/b$), akan menuju ke titik kesetimbangan untuk suatu waktu.

2.4.2 Maksimum Populasi

Titik kesetimbangan merupakan titik kritis dalam tinjauan optimisasi. Jika diinginkan untuk mendapatkan keterangan mengenai jumlah populasi maksimum pada model ini, perlu dilakukan uji turunan kedua dengan memanfaatkan titik kritis.

Turunan kedua terhadap waktu t akan menghasilkan

$$\frac{d^2N(t)}{dt^2} = a - 2bN(t).$$

Untuk titik kritis pertama, akan diperoleh

$$N_e = 0 \to \frac{d^2N}{dt^2} = a > 0$$

sedangkan titik kritis kedua akan menghasilkan

$$N_e = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{d^2N}{dt^2} = -a < 0$$

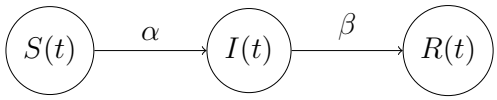
Hasil uji turunan kedua menghasilkan ringkasan bahwasanya

1. Populasi $N(t) = 0$ adalah populasi minimum dalam model ini. Secara logis kenyataan ini juga dapat diterima karena tidak mungkin jumlah populasi pada suatu area bernilai negatif.

2. Populasi $N(t) = a/b$ adalah populasi maksimum. Hal ini juga menjelaskan bahwasanya, jika populasi awal lebih dari populasi maksimum maka populasi akan diturunkan sampai dengan populasi maksimum tercapai.

2.5 Model Penyebaran Infeksi SIR

Skema hubungan antara masing-masing populasi ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1: Skema interaksi antara $S(t), I(t), R(t)$ dalam model SIR

Populasi sehat akan berkurang akibat interasksi dengan populasi sakit dengan laju α, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \tag{6}$$

Populasi sakit akan bertambah akibat sukses infeksi pada saat interaksi antara populasi sakit dan sehat. Namun, populasi sakit akan berkurang karena sebagian populasi akan sehat secara proporsional sebesar β. Hubungan ini dapat dituliskan dalam persamaan

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) \tag{7}$$

Populasi sembuh akan bertambah secara proporsional dari sebagian populasi sakit, se-

hingga diperoleh

$$\frac{dR(t)}{dt} = \beta I(t) \tag{8}$$

Hubungan ketiga populasi dalam suatu habitat dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial biasa berikut ini

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\alpha\frac{S(t)I(t)}{N(t)} \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha\frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \beta I(t) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Misalkan didefinisikan populasi total dalam suatu habitat adalah

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \tag{10}$$

maka berdasarkan persamaan (9) diperoleh bahwa $N'(t) = 0$ yang berarti bahwa populasi senantiasa konstan setiap waktu.

Sistem persamaan diferensial pada persamaan (9) adalah persamaan dasar SIR. Biasanya, persamaan ini diubah menjadi persamaan tanpa dimensi untuk mempermudah perhitungan. Bentuk nondimensi dimaksudkan untuk melihat rasio antara jumlah suatu populasi terhadap jumlah seluruh populasi. Selain itu, bentuk non-dimensi akan mempermudah dalam analisis karena hilangnya dimensi pada persamaan yang dianalisis. Misalkan didefinisikan

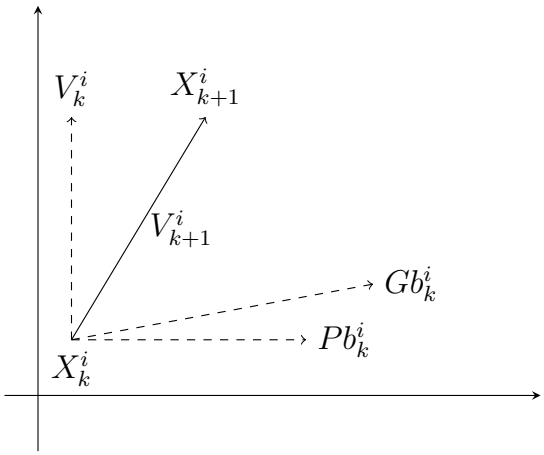
$$s(t) = \frac{S(t)}{N(t)}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N(t)}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N(t)},$$

Persamaan (9) dapat dituliskan menjadi

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\alpha s(t)i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= \alpha s(t)i(t) - \beta i(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} &= \beta i(t) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2.6 Particle Swarm Optimization

Algoritma swarm pertama kali dikembangkan oleh Kennedy dan Eberhart pada tahun 1995. Algoritma PSO merupakan algoritma pencarian dengan menggunakan populasi yang dibentuk secara acak dan selanjutnya bergerak bebas mencari tujuan yang akan dicapai. Dalam suatu populasi, ditunjuk beberapa agen yang bertugas untuk mencari sumber makanan. Setiap agen nantinya akan menuju pada salah satu agen yang terbaik. Diagram vektor PSO diberikan oleh Gambar 2.



Gambar 2: Diagram vektor posisi dan kecepatan swarm ke-i pada iterasi ke-k

Beberapa hal yang diadaptasi dari perilaku kawanan swarm dalam algoritma ini adalah

1. Burung, semut atau lebah, yang kemudian disebut sebagai swarm

   Swarm merupakan sejumlah agen yang dipilih dalam suatu populasi untuk bekerja mencari sumber makanan. Adaptasi yang dilakukan dalam algoritma adalah swarm diambil sebagai calon solusi dari permasalahan yang ingin diselesaikan.

2. Makanan, yang selanjutnya disebut dengan fitness

   Makanan adalah tujuan akhir yang ingin dicari. Dalam algoritma, makanan adalah solusi akhir dari proses pencarian yang merupakan global optimal bagi fungsi objektif.

3. *Personal* dan *global best*

   Personal best adalah posisi terbaik dari suatu swarm sepanjang perjalanannya men-

cari makanan. *Global best* adalah posisi terbaik dari seluruh swarm yang digunakan sepanjang perjalanan mencari makanan. Dalam hal ini, *global best* dapat dianggap sebagai nilai terbaik dari seluruh *personal best*.

4. Nilai kognitif swarm

   Kognitif swarm terbagi dua, kognitif learning dan kognitif sosial. Kognitif learning diartikan sebagai kemampuan swarm untuk berkembang didasarkan dari hasil pengalaman pribadinya, sedangkan kognitif sosial diartikan sebagai kemampuan swarm untuk berkembang berdasarkan pengalaman bersama kumpulan. Kognitif biasanya diwakilkan dengan nilai c_1 dan c_2 dan diberikan $c_1 + c_2 \leq 4$. Semakin besar nilai c_2 maka akan semakin besar kemungkinan swarm untuk terbang bersama kawanan sedangkan semakin besar nilai c_1 akan menghasilkan swarm yang *fly by own* [4].

Gambar 2 di atas menunjukkan bahwa setiap swarm memiliki posisi (X) dan kecepatan (V). Posisi adalah nilai suatu swarm pada suatu waktu, yang merupakan calon solusi dari fungsi objektif, yang dinyatakan dalam persamaan

$$X_{k+1}^i = X_k^i + V_{k+1}^i. \tag{12}$$

Kecepatan adalah nilai perubahan untuk untuk swarm berpindah posisi yang dinyatakan dengan persamaan

$$V_{k+1}^i = V_k^i + c_1\gamma\left(Pb_k^i - X_k^i\right) + c_2\gamma\left(Gb_k - X_k^i\right). \tag{13}$$

Prosedur yang digunakan dalam menentukan suatu nilai optimal dari suatu fungsi objektif dengan PSO adalah

1. Merandom nilai populasi swarm awal.
2. Menghitung nilai fitness dari setiap nilai swarm.
3. Menentukan *personal best* dan *global best*. Nilai *global best* dipilih dari nilai swarm terbaik, sedangkan nilai *personal best* dipilih dari nilai setiap swarm.

4. Update kecepatan dan posisi swarm dengan menggunakan persamaan (13) dan persamaan (12).

5. Proses perulangan

   (a) Hitung nilai fitness dari setiap nilai swarm yang diperoleh dari iterasi sebelumnya.

   (b) Memeriksa apakah posisi swarm akan diupdate atau tidak. Jika nilai fitness iterasi ke-k lebih baik dibandingkan nilai fitness pada iterasi ke-$k-1$, maka posisi akan diupdate.

   (c) Menentukan *personal best* dari masing-masing swarm. *Personal best* dipilih dengan cara memilih nilai terbaik dari suatu swarm pada seluruh iterasi yang telah dilakukan.

   (d) Menentukan *global best*. *Global best* dipilih dengan cara memilih nilai terbaik dari seluruh swarm pada seluruh iterasi yang telah dilakukan.

   (e) Update posisi dan kecepatan swarm dengan persamaan (12) dan (13).

   (f) Cek kriteria pemberhentian. Jika kondisi terpenuhi, maka iterasi akan dihentikan.