Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

LAMPIRAN I

BAHAN AJAR MATA KULIAH PEMODELAN MATEMATIKA

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Pemodelan Matematika
MATERI

Khozin Mu'tamar
email: khozin.mutamar@unri.ac.id

UNIVERSITAS RIAU

Daftar Isi

Daftar Isi 1

1 Model dengan Data 2
1.1 Linear Least Square . . . 2
1.2 Polynomial Least Square . . . 3
1.3 Nonlinear Least Square . . . 5

2 Model Eksponensial 7
2.1 Modelling . . . 7
2.2 Solusi Model . . . 8
2.3 Perilaku Kurva . . . 8
2.4 Model Eksponensial dan Data . . . 9

3 Model Logistik 9
3.1 Analisa Kesetimbangan . . . 10
3.2 Solusi Model . . . 10
3.3 Maksimum Populasi . . . 11
3.4 Perilaku Laju Pertumbuhan . . . 12
3.5 Model Logistik dengan Data . . . 13

4 Model Pertumbuhan Populasi Linier 14
4.1 Titik Ekuilibrium . . . 16
4.2 Solusi Model . . . 16
4.2.1 Substitusi langsung . . . 16
4.2.2 Metode Nilai Eigen dengan Nilai Eigen Real Berbeda . . . 18
4.2.3 Metode Nilai Eigen dengan Nilai Eigen yang Berulang . . . 19
4.2.4 Metode Nilai Eigen dengan Nilai Eigen Kompleks . . . 21
4.3 Kestabilan Model Linear . . . 23

5 Model Pertumbuhan Populasi Nonlinear 24
5.1 Titik Ekuilibrium . . . 25
5.2 Linierisasi . . . 27
5.3 Kestabilan Lokal . . . 28
5.4 Model Predator-Prey . . . 30
5.4.1 Titik Ekuilibrium . . . 31
5.4.2 Kestabilan Model . . . 31
5.4.3 Analisa Bidang Fase . . . 33

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

5.4.4 Contoh-1 35
5.5 Model Kompetisi 36

6 Model Gerak Pendulum **36**
6.1 Bentuk Sistem Persamaan Pendulum 37
6.2 Titik Ekuilibrium 38
6.3 Kestabilan Model 39
6.4 Simulasi 40

7 Model Gerak Pegas Mendatar **40**
7.1 Modelling 41
7.2 Solusi Eksak 42
7.3 Frekuensi dan Periode 43
7.4 Titik Ekuilibrium 43
7.5 Simpangan Terjauh 44
7.6 Pegas teredam 44

1 Model dengan Data

Misalkan diberikan sejumlah n data yaitu $(t, y(t))$. Misalkan diberikan fungsi pendekatan untuk tebakan bagi data tersebut, yaitu $f(t)$. Selisih antara data dan fungsi tebakan dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y(t_i) - f(t_i))^2$$

Tujuan yang ingin dicapai adalah meminimalkan nilai dari $r(t)$.

1.1 Linear Least Square

Misalkan ditentukan fungsi $f(t)$ yaitu

$$f(t) = at + b,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Fungsi tujuan menjadi

$$r(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(at_i + b - y(t_i))^2$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai a, b agar fungsi tujuan bernilai minimum. Menggunakan kalkulus peubah banyak, kondisi optimum untuk fungsi $r(t)$ akan dipenuhi pada titik kritis. Oleh karena itu,

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}(at_i + b - y(t_i))t_i = 0$$

dan

$$\frac{\partial r}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} at_i + b - y(t_i) = 0$$

Selanjutnya, dengan menyederhanakan, akan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} at_i + b = \sum_{i=1}^{n} y(t_i)$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n} at_i^2 + bt_i = \sum_{i=1}^{n} y(t_i)t_i$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Variabel yang akan ditentukan nilainya adalah a, b dan keduanya lepas dari notasi sigma. Selanjutnya, persamaan dapat dituliskan dalam bentuk

$$Ax = b$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n} t_i^2 & \sum_{i=1}^{n} t_i \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y(t_i) \\ \sum_{i=1}^{n} y(t_i) t_i \end{pmatrix}$$

Solusi akhir dapat ditentukan dengan aturan SPL,

$$x = A^{-1} b$$

Solusi menggunakan Matlab

Kode 1: Linear least square dengan Matlab

```
clear all;
close all;
clc;
x=xlsread('tesdata.xlsx');
t=x(:,1);
y=x(:,2);
A=[sum(t),length(x);
   sum(t.^2),sum(t)];
B=[sum(y);
   sum(y.*t)];
p=A\B;
plot(t,y,'-b',t,p(1)*t+p(2),'-r')
```

1.2 Polynomial Least Square

Misalkan dipilih fungsi $f(t)$ adalah polynomial berderajat n sehingga

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

Fungsi tujuan menjadi

$$r(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - y(t_i))^2$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai $a_j = j = 0, 1, 2, \ldots, m$ agar fungsi tujuan bernilai minimum. Menggunakan kalkulus peubah banyak, kondisi optimum untuk fungsi $r(t)$ akan dipenuhi pada titik kritis. Oleh karena itu,

$$\frac{\partial r(t)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - y(t_i)) t_i^j = 0, \ j = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Penyederhanaan akan menghasilkan

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) t_i^j = \sum_{i=1}^{n} y(t_i) t_i^j, \ j = 0, 1, 2, \ldots, m$$

atau

$$\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 t_i + \cdots + a_m {t_i}^m) \, t_i^j = \sum_{i=1}^{n} y(t_i) \, t_i^j, \ j = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Untuk $j = 0$ akan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 t_i + \cdots + a_m {t_i}^m\right) = \sum_{i=1}^{n} y\left(t_i\right)$$

Untuk $j = 1$ akan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 t_i + \cdots + a_m {t_i}^m\right) t_i^1 = \sum_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) t_i^1$$

Untuk $j = 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 t_i + \cdots + a_m {t_i}^m\right) t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) t_i^2$$

Untuk $j = m$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 t_i + \cdots + a_m {t_i}^m\right) t_i^m = \sum_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) t_i^m$$

Jika dituliskan dalam notasi matriks,

$$Ax = b$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^3 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^4 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{m+1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^4 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^5 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{m+2} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^4 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^5 & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^6 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^m & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{m+1} & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{m+2} & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{m+3} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} {t_i}^{2m} \end{pmatrix}$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) {t_i}^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) {t_i}^3 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y\left(t_i\right) {t_i}^m \end{pmatrix}$$

Implementasi dengan menggunakan Matlab diberikan pada Kode (2),(3) dan (4)

Kode 2: Function utama pada polynomial least square

```
clear all;
close all;
clc;
x=xlsread('tesdata.xlsx');
t=x(:,1);
y=x(:,2);
n=2;
A=matrixleast(n,t);
B=vectorleast(n,y,t);
p=A\B
```

Kode 3: Function untuk menghitung nilai matriks A

```
function dy=matrixleast(n,t)
dy=zeros(n+1,n+1);
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        dy(i,j)=sum(t.^(i+j-2));
    end
end
```

Kode 4: Function untuk menghitung vektor $\vec{b}$

```
function dy=vectorleast(n,y,t)
dy=zeros(n+1,1);
for i=1:n+1
    dy(i)=sum(y.*t.^(i-1));
end
```

1.3 Nonlinear Least Square

Misalkan dipilih $f(t) = Ae^{Bt}$ dengan A, B adalah konstanta yang akan ditentukan nilainya. Fungsi tujuan selanjutny dapat dituliskan dalam bentuk

$$r(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))^2$$

Untuk menentukan A, B yang meminimumkan $r(t)$ maka

$$\frac{\partial r}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))e^{Bt_i}$$

dan

$$\frac{\partial r}{\partial B} = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))t_iAe^{Bt_i}$$

Jelas bahwa bentuk persamaan di atas tidak dapat dibentuk dalam bentuk matriks. Oleh karena itu, persamaan di atas akan diselesaikan dengan metode numerik, yaitu metode Newton. Misalkan

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))e^{Bt_i}$$

dan

$$g(A, B) = \sum_{i=1}^{n}(Ae^{Bt_i} - y(t_i))t_iAe^{Bt_i}$$

dengan tebakan awal (A_0, B_0). Nilai (A, B) yang akan membuat $f(A, B) = 0, g(A, B) = 0$ ditentukan dengan persamaan

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n)\vec{f}(\vec{x}_n)$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f(A, B) \\ g(A, B) \end{pmatrix}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penyusunan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

dan J adalah Jacobian dari fungsi $f(A,B), g(A,B)$ terhadap (A,B) yaitu

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial A} & \frac{\partial f}{\partial B} \\ \frac{\partial g}{\partial A} & \frac{\partial g}{\partial B} \end{pmatrix}$$

Implementasi dengan Matlab dapat dilihat pada kode berikut ini

Kode 5: Kode Utama Nonlinear Least Square

```
clear all;
close all;
clc;
global t y
itmax=1000;
x=xlsread('tesdata.xlsx');
t=x(:,1);
y=x(:,2);
Ao=[10;10];
% fungsi(Ao)
for i=1:itmax
    An=Ao-(jac(Ao)\fungsi(Ao));
    Ao=An;
end
A=Ao(1)
B=Ao(2)
nilai_fungsi=fungsi(Ao)
error_fungsi=0.5*sum((A*exp(B*t)-y).^2)
% Plotting gambar data dan fungsi
figure(1)
stem(t,y)
hold on
plot(t,A*exp(B*t))
```

File di atas membutuhkan function fungsi dan jac untuk menghitung nilai fungsi f dan jacobiannya.

Kode 6: Function untuk menghitung fungsi f

```
function dy = fungsi (x)
global t y
A=x(1);
B=x(2);
dy=zeros(2,1);
fA=sum((A*exp(B.*t)-y).*exp(B.*t));
fB=A*sum((A*exp(B.*t)-y).*exp(B.*t).*t);
dy(1)=fA;
dy(2)=fB;
```

Kode 7: Function untuk menghitung jacobian J

```
function dy =jac (x)
global t y
A=x(1);
B=x(2);
dy=zeros(2,2);
fAA=sum(exp(B*t).^2);
fAB=sum(t.*(exp(B*t)).^2.*A+(A*exp(B*t)-y).*t.*exp(B*t));
fBA=sum((A*exp(B*t)-y).*t.*exp(B*t))+A*sum(t.*(exp(B.*t).^2));
fBB=A*sum(t.^2.*(exp(B*t)).*(2*A*exp(B*t)-y));
dy(1,1)=fAA;
```

```
dy(1,2)=fAB;
dy(2,1)=fBA;
dy(2,2)=fBB;
```

Contoh: Misalkan diberikan data

t	y	t	y
1	5.8017	9	29.0840
2	8.3617	10	32.9683
3	11.3552	11	35.6621
4	14.5960	12	38.5428
5	17.3201	13	41.7780
6	20.9469	14	44.6584
7	23.2258	15	47.0609
8	26.9342	16	50.1025

Akan diimplementasikan metode Newton dalam menyelesaikan nonlinear least square ini dengan menggunakan fungsi tebakan fungsi eksponensial.

Gambar 1: Perbandingan data dan hasil menggunakan nonlinear least square dengan fungsi uji $f(t) = Ae^{Bt}$

2 Model Eksponensial

2.1 Modelling

Misalkan didefinisikan $N(t)$ sebagai jumlah total populasi pada waktu t. Populasi selanjutnya diamati dalam rentang waktu, sebut saja t hingga $t + \Delta t$ dimana

- Jumlah kelahiran dan kematian proporsional dengan jumlah individu
- Jumlah kelahiran dan kematian juga proporsional dengan lamanya waktu pengamatan

Dua asumsi pada perkembangan populasi menghasilkan

$$D \approx \alpha N(t)\Delta t$$
$$B \approx \beta N(t)\Delta t$$

dengan α, β adalah konstanta kesebandingan.

Oleh karena perkembangan populasi hanya dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian, maka

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta N(t) = \Delta B - \Delta D$$

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

dengan asumsi bahwa jumlah kelahiran lebih besar dibandingkan dengan jumlah kematian. Akibatnya

$$\Delta N(t) = (\beta - \alpha)N(t)\Delta t$$

atau

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \gamma N(t)$$

dengan $\gamma = \beta - \alpha \in \mathbb{R}$.

Jika waktu pengamatan dibuat sangat singkat untuk mengamati perubahan secara kontinu dimana $\Delta t \to 0$, akan diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma N(t) = \gamma N(t)$$

Persamaan pada ruas paling kiri merupakan definisi dari turunan sehingga diperoleh bentuk akhir

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t), t > 0.$$

Model ini disebut dengan model eksponensial dikarenakan solusi eksak dari model tersebut.

2.2 Solusi Model

Solusi diperoleh dengan memindah ruaskan $N(t)$ pada ruas kanan sehingga diperoleh

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \gamma \, dt$$

yang solusi akhir diperoleh dengan integral masing-masing ruas dimana

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int \gamma \, dt$$

sehingga hasilnya

$$\ln N(t) = \gamma t + C.$$

Ambil nilai eksponensial di masing-masing ruas sehingga menghasilkan

$$N(t) = e^{\gamma t + C} = Ce^{\gamma t}$$

dengan $C \in \mathbb{R}$ adalah konstanta yang diperoleh dari masalah nilai awal.

Misalkan diberikan nilai awal $N(0) = N_0$ maka akan diperoleh

$$N(0) = N_0 = C$$

Oleh karena itu, solusi khusus model eksponensial dengan nilai awal $N(0) = N_0$ adalah

$$N(t) = N_0 e^{\gamma t}$$

dengan $\gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

2.3 Perilaku Kurva

Akan ditunjukkan bahwa kurva selalu terbuka ke atas jika populasi bersifat positif, populasi akan terjadi dengan sangat cepat sedangkan jika populasi bersifat melambat maka perlambatan populasi terjadi dengan semakin lambat.

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Mengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Mengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Perhatikan kembali model eksponensial

$$N'(t) = \gamma N(t)$$

Turunan terhadap t akan menghasilkan

$$N''(t) = \gamma N' = \gamma^2 N(t)$$

Oleh karena $N(t)$ menyatakan jumlah populasi, maka jelas $N(t) > 0$ sehingga $N''(t) > 0$. Berdasarkan sifat kecekungan kurva pada kalkulus, jelas populasi selalu terbuka ke atas untuk berapapun nilai t dan γ.

2.4 Model Eksponensial dan Data

Misalkan diberikan data pengamatan (t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. Perhatikan kembali

$$\ln N(t) = \gamma t + C.$$

yang merupakan persamaan linear dengan variabel t dengan koefisien γ dan C. Langkah selanjutnya adalah menentukan parameter γ, C dengan menyelesaikan least square linear berdasarkan data dan persamaan di atas. Prosedur standar yang dapat dilakukan adalah

1. Diberikan sekumpulan data t_i, y_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$
2. Data akan dicocokan dengan persamaan garis lurus

$$y = \ln N(t) = \gamma t + C.$$

3. Plot data berdasarkan persamaan di atas
4. Tentukan kemiringan garis lurus dari plot tersebut. Gunakan trendline atau least square linear untuk mendapatkan kemiringan γ garis lurus dan nilai C.
5. Gunakan parameter γ, C untuk menyelesaikan persamaan diferensial eksponensial berdasarkan nilai awal yang diberikan.
6. Hitung eror berdasarkan selisih nilai data yang diberikan berdasarkan solusi dari model eksponensial.

3 Model Logistik

Perhatikan persamaan diferensial yang menyatakan model eksponensial

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \gamma\, dt$$

Perhatikan bahwa γ bersifat konstan. Jika $\gamma = a - bN(t)$ yang merupakan fungsi linier dengan kemiringan negatif, akan diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a - bN(t))N(t).$$

Model ini disebut juga dengan model logistik. Pemilihan $\gamma = a - bN(t)$ lebih kepada filosofi penalaran umum. Secara logika, pertumbuhan populasi pada domain tertutup akan melambat jika jumlah populasi di dalamnya terus berkembang. Hal ini dimungkinkan karena aspek pendukung kehidupan menjadi materi yang diperebutkan banyak individu dalam populasi.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

3.1 Analisa Kesetimbangan

Perhatikan bahwa titik kesetimbangan dari model ini dapat diperoleh dengan

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0$$

sehingga menghasilkan

$$(a - bN(t))N(t) = 0.$$

Persamaan kuadrat di atas memiliki 2 penyelesaian, yaitu

$$N_{e,1}(t) = 0 \quad \text{atau} \quad N_{e,2}(t) = \frac{a}{b}.$$

Oleh karena $a, b \in \mathbb{R}^+$ maka terdapat $N_{e,1} \leq N(t) = \psi_1 \leq N_{e,2}$ dan $N(t) = \psi_2 \geq N_{e,2}$. Akan dianalisa bagaimana perilaku model jika $N_0 \in [N_{e,1}, N_{e,2}]$ dan $N_0 \in [N_{e,2}, \infty)$.

Pertama, misalkan $N_0 = \frac{1}{C}N_{e,2} \in [N_{e,1}, N_{e,2}]$ untuk $C \in \mathbb{R} > 1$ sehingga $N_0 = \frac{a}{bC}$. Nilai perubahan $N(t)$ tiap waktu pada daerah ini adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a - b\frac{a}{bC}\right)\frac{a}{bC} = \left(a - \frac{a}{C}\right)\frac{a}{bC} > 0$$

Akibatnya, pada daerah interval $[N_{e,1}, N_{e,2}]$ populasi akan terus tumbuh.

Selanjutnya, jika dimisalkan $N_0 = CN_{e,2} \in [N_{e,2}, \infty)$ untuk $C \in \mathbb{R} > 1$ sehingga $N_0 = \frac{Ca}{b}$. Nilai perubahan $N(t)$ tiap waktu pada daerah ini adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a - b\frac{Ca}{b}\right)\frac{Ca}{b} = (a - Ca)\frac{Ca}{b} < 0$$

Akibatnya, pada daerah interval $[N_{e,2}, \infty)$ populasi akan terus turun.

Berdasarkan penjabaran kedua interval tersebut, maka perilaku populasi pada model logistik dapat dirangkum sebagai berikut

1. Jika populasi awal berada di antara $(0, a/b]$ maka populasi akan naik tetapi tidak memotong a/b.
2. Jika populasi awal berada di atas $(a/b, \infty)$ maka populasi akan turun namun tidak akan memotong titik a/b
3. Jika populasi awal tepat berada di a/b maka populasi akan senantiasa konstan.

3.2 Solusi Model

Solusi dari model ini juga dapat diperoleh dengan integral masing-masing ruas, dimana

$$\int \frac{dN(t)}{(a - bN(t))N(t)} = \int dt$$

Bentuk rasional di ruas kiri perlu untuk diubah menjadi bentuk rasional yang lebih sederhana. Misalkan

$$\frac{A}{N(t)} \quad \text{dan} \quad \frac{B}{a - bN(t)}$$

selanjutnya

$$\frac{A}{N(t)} + \frac{B}{a - bN(t)} = \frac{1}{(a - bN(t))N(t)}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

atau

$$(a - bN(t))A + N(t)B = 1 \longrightarrow aA + N(t)(B - bA) = 1$$

sehingga menghasilkan

$$aA = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{a}$$

dan (asumsi $N(t) \neq 0$)

$$B - bA = 0 \longrightarrow B = bA = \frac{b}{a}.$$

Persamaan integral selanjutnya dituliskan sebagai

$$\int \frac{1}{aN(t)}\, dN(t) + \int \frac{b}{a(a - bN(t))}\, dN(t) = \int dt$$

yang menghasilkan

$$\frac{1}{a} \ln N(t) + \frac{b}{a} \int \frac{du}{-bu} = t + c$$

atau

$$\frac{1}{a} \ln N(t) - \frac{1}{a} \ln (a - bN(t)) = t + c$$

Menggunakan aturan logaritma, diperoleh

$$\ln \left(\frac{N(t)}{a - bN(t)} \right) = at + K$$

atau

$$\frac{N(t)}{a - bN(t)} = C \exp at.$$

Sederhanakan sehingga menghasilkan

$$N(t) = \frac{aC \exp at}{1 + bC \exp at}$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{aC \exp at}{1 + bC \exp at} = \frac{a}{b}$$

sesuai dengan kenyataan bahwa populasi, dimanapun berasal ($N(0) > a/b$ atau $N(0) < a/b$), akan menuju ke titik kesetimbangan untuk suatu waktu.

3.3 Maksimum Populasi

Titik kesetimbangan merupakan titik kritis dalam tinjauan optimisasi. Jika diinginkan untuk mendapatkan keterangan mengenai jumlah populasi maksimum pada model ini, perlu dilakukan uji turunan kedua dengan memanfaatkan titik kritis.

Turunan kedua terhadap waktu t akan menghasilkan

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = a - 2bN(t).$$

Untuk titik kritis pertama, akan diperoleh

$$N_e = 0 \rightarrow \frac{d^2 N}{dt^2} = a > 0$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

sedangkan titik kritis kedua akan menghasilkan

$$N_e = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{d^2N}{dt^2} = -a < 0$$

Hasil uji turunan kedua menghasilkan ringkasan bahwasanya

1. Populasi $N(t) = 0$ adalah populasi minimum dalam model ini. Secara logis kenyataan ini juga dapat diterima karena tidak mungkin jumlah populasi pada suatu area bernilai negatif.
2. Populasi $N(t) = a/b$ adalah populasi maksimum. Hal ini juga menjelaskan bahwasanya, jika populasi awal lebih dari populasi maksimum maka populasi akan diturunkan sampai dengan populasi maksimum tercapai.

3.4 Perilaku Laju Pertumbuhan

Telah diketahui bahwa dalam model ini, jika diberikan populasi awal pada interval $[0, a/b]$ maka populasi akan terus tumbuh mencapai titik a/b. Pertanyaanya adalah, apakah laju pertumbuhan populasi ini sama setiap waktunya?

Perhatikan turunan kedua dari model ini,

$$\frac{d^2N}{dt^2} = a - 2bN$$

yang akan bernilai nol ketika

$$N_s(t) = \frac{a}{2b}$$

atau ketika jumlah populasi mencapai setengah jumlah populasi maksimum. Akibat adanya titik yang membuat turunan kedua bernilai nol, maka titik $N_s(t) = a/2b$ merupakan sebuah titik saddle (titik balik). Kondisi ini dapat dimaknai bahwasanya titik $N_s(t)$ adalah titik pembatas perilaku laju perubahan.

Selanjutnya, akan dianalisa, pada interval mana laju pertumbuhan terjadi secara cepat atau lambat. Misalkan dipilih sebarang titik pada interval $[0, N_s(t)]$ yaitu

$$N(t) = \frac{a}{2bC},\ C \in \mathbb{R} > 1$$

Laju perubahan populasi tiap waktu pada interval ini adalah

$$M_1 = \frac{dN(t)}{dt} = \left(a - b\frac{a}{2bC}\right)\frac{a}{2bC} = \left(a - \frac{a}{2C}\right)\frac{a}{2bC}.$$

Misalkan dipilih sebarang titik pada interval $[N_s(t), a/b]$ yaitu

$$N(t) = \frac{aK}{2b},\ 1 < K \leq 2$$

Laju perubahan populasi tiap waktu pada interval ini adalah

$$M_2 = \frac{dN(t)}{dt} = \left(a - b\frac{aK}{2b}\right)\frac{aK}{2b} = (a - aK)\frac{aK}{2b}.$$

Selisih antara laju perubahan populasi M_1 dan M_2 menghasilkan

$$M_1 - M_2 = \left(a - \frac{a}{2C}\right)\frac{a}{2bC} - (a - aK)\frac{aK}{2b}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

atau

$$M_1 - M_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2}{bC^2}\left(2C - 1 - 2KC^2 + 2K^2C^2\right)$$

Oleh karena $C > 1$ maka $2C - 1 > 0$ dan oleh karena $1 < K \leq 2$ maka

$$2C^2\left(K^2 - K\right) > 0$$

sehingga $M_1 > M_2$. Hal ini berarti bahwa laju pertumbuhan populasi sebelum mencapai nilai separuh dari populasi maksimum lebih besar dibandingkan laju pertumbuhan setelah mencapai separuh populasi maksimum. Jika digambarkan secara kurva, kurva $N(t)$ akan memiliki kecekungan ke atas pada interval $[0, N_s]$ dan kecekungan ke bawah pada interval $[N_s, a/b]$.

Pertanyaan selanjutnya adalah, pada waktu berapakah terjadi perubahan sifat kelajuan pertumbuhan? Atau dalam kata lain, pada waktu berapakah populasi mencapai separuh populasi maksimum. Perhatikan solusi dari model ini, dimana

$$N(t) = \frac{aC\exp at}{1 + bC\exp at}$$

Oleh karena $N(t) = a/2b$ maka

$$\frac{a}{2b} = \frac{aC\exp at}{1 + bC\exp at}$$

Pindah ruas dan menggunakan fakta bahwa $a \neq 0$ akan menghasilkan

$$\exp at = \frac{1}{bC}$$

Untuk mendapatkan nilai t, ruas kanan dan kiri diambil nilai logaritma natural dan setelah disederhanakan akan diperoleh

$$t = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{bC}\right)$$

3.5 Model Logistik dengan Data

Misalkan diberikan data pengamatan (t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. Perhatikan kembali

$$\ln\left(\frac{N(t)}{a - bN(t)}\right) = at + K$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$\ln\left(\frac{N(t)}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)N(t)}\right) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = at + K$$

atau

$$\ln\left(\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{K_e}}\right) = at + C$$

dengan $K_e = a/b$ adalah carrying capacity atau kapasitas maksimum. Langkah selanjutnya adalah menentukan parameter a, b dengan menyelesaikan least square berdasarkan data dan persamaan di atas. Prosedur standar yang dapat dilakukan adalah

1. Diberikan sekumpulan data t_i, y_i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

2. Data akan dicocokan dengan persamaan garis lurus

$$y = \ln\left(\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{K_e}}\right) = at + C$$

3. Nilai K_e adalah nilai maksimum populasi dari data ditambah beberapa populasi. Hal ini dilakukan karena dalam model logistik, populasi tidak pernah mencapai populasi maksimum, hanya mendekati untuk $t \to \infty$
4. Plot data berdasarkan persamaan di atas
5. Tentukan kemiringan garis lurus dari plot tersebut. Gunakan trendline atau least square linear untuk mendapatkan kemiringan garis lurus.
6. Hitung parameter b berdasarkan persamaan

$$b = \frac{a}{K_e}$$

7. Gunakan parameter a, b untuk menyelesaikan persamaan diferensial logistik berdasarkan nilai awal yang diberikan.
8. Hitung eror berdasarkan selisih nilai data yang diberikan berdasarkan solusi dari model logistik.

4 Model Pertumbuhan Populasi Linier

Misalkan pada suatu wilayah terdapat 2 spesies berbeda. Misalkan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pertama pada waktu t. $M(t)$ menyatakan jumlah populasi kedua pada waktu t.

Asumsi

1. Tidak ada migrasi
2. Laju perubahan proporsional terhadap masing-masing populasi

Misalkan laju perubahan populasi $N(t)$ proporsional terhadap $N(t)$ dan $M(t)$ sebesar a dan b, sedangkan laju perubahan populasi $M(t)$ proporsional terhadap $N(t)$ dan $M(t)$ sebesar c dan d. Model matematis dari kondisi ini adalah

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR + bS \\ \frac{dS}{dt} &= cR + dS \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Misalkan di suatu padang rumput terdapat 3 populasi yaitu rumput, rusa dan serigala. Perhatikan gambar berikut ini

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Gambar 2: Skema hubungan Rusa dan Serigala dengan mengabaikan efek interaksi antara kedua individu

Kondisi dari skema di atas dapat dijelaskan sebagai berikut

1. Rusa memakan rumput sebagai kebutuhan hidupnya sebagai hewan herbivora.
2. Serigala memakan rusa sebagai kebutuhan hidupnya sebagai hewan karnivora.
3. Antara serigala dan rumput tidak saling mempengaruhi.
4. Jumlah rumput dan serigala berpengaruh terhadap pertumbuhan rusa disamping faktor pertumbuhan alami.
5. Pertumbuhan serigala dipengaruhi oleh pertumbuhan alami dan jumlah populasi rusa.

Asumsi

1. Model yang akan dibangun adalah model yang menggambarkan pertumbuhan rusa dan serigala saja.
2. Rumput sebagai penunjang hidup bagi rusa diasumsikan selalu tersedia dengan cukup untuk kebutuhan hidup.
3. Pertumbuhan diasumsikan bersifat proporsional dengan jumlah individu pada waktu tersebut.

Proses pemodelan dapat dilakukan dengan tahapan

1. Misalkan $R(t)$ dan $S(t)$ menyatakan jumlah populasi rusa dan serigala pada saat t.
2. Laju pertumbuhan rusa proporsional dengan jumlah populasi rusa pada waktu tersebut, sehingga
$$\frac{dR}{dt} \approx aR(t)$$
3. Laju pertumbuhan rusa akan berkurang secara proporsional seiring dengan bertambahnya jumlah serigala, sehingga
$$\frac{dR}{dt} \approx -bS(t)$$
4. Kondisi dari kedua asumsi ini menghasilkan
$$\frac{dR}{dt} = aR(t) - bS(t)$$
5. Analogi dengan rusa, pertumbuhan serigala juga memiliki perilaku yang mirip sehingga
$$\frac{dS}{dt} = cR(t) + dS(t)$$
6. Tanda pada koefisien c bernilai positif dikarenakan serigala akan tumbuh dengan baik jika makanan (rusa) tersedia dalam kondisi yang baik. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa laju pertumbuhan serigala proporsional dengan jumlah populasi rusa pada saat t.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

6. Sistem akhir diperoleh

$$\frac{dR(t)}{dt} = aR(t) - bS(t)$$
$$\frac{dS(t)}{dt} = cR(t) + dS(t)$$

7. Notasi vektor dapat digunakan untuk menggambarkan model di atas. Misalkan $\vec{x} = (R, S)^T$ maka sistem dapat dituliskan

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

dengan matriks A

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4.1 Titik Ekuilibrium

Perhatikan kembali sistem persamaan diferensial

$$\begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$$

Titik ekuilibrium adalah R^*, S^* yang membuat sistem ini $S' = 0, R' = 0$ secara simultan. Sistem selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yang merupakan sistem persamaan linear homogen dengan dua jenis solusi yaitu solusi trivial $R^* = 0, S^* = 0$ dan solusi tak hingga banyak $R^* = t, S^* = u$ untuk $t, u \in \mathbb{R}$. Nilai titik ekuilibrium trivial $R^* = 0, S^* = 0$ ada jika determinan dari SPL tidak nol atau

$$ad + bc \neq 0$$

4.2 Solusi Model

Solusi dari model linear dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu

1. Solusi dengan substitusi langsung
2. Solusi dengan metode nilai Eigen
3. Solusi dengan menggunakan matriks eksponensial

4.2.1 Substitusi langsung

Pandang kembali sistem persamaan diferensial linier. Untuk mendapatkan solusi dengan substitusi, dilakukan dengan beberapa langkah berikut ini

1. Turunkan persamaan (**??**) sehingga diperoleh

$$\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

2. Substitusikan persamaan (**??**) pada persamaan di atas menjadi

$$\ddot{x} = a\dot{x} + b\,(cx + dy)$$

3. Substitusikan persamaan (**??**) untuk mengganti variabel y sehingga diperoleh

$$\ddot{x} = a\dot{x} + cbx + bd\left(\frac{\dot{x} - ax}{b}\right) \longrightarrow \ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - cb)x = 0$$

yang merupakan PDB orde 2 homogen

4. Solusi dari persamaan di atas disubstitusikan pada persamaan (**??**) yang selanjutnya menjadi PDB orde 1 yang dapat diselesaikan dengan faktor integrasi.

Contoh: Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial berikut ini

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 3x \\ \frac{dx}{dt} &= 8x + y \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan SPDL di atas, dapat dilakukan dengan metode substitusi

1. Turunkan persamaan pertama sehingga diperoleh

$$y'' = 3x'$$

2. Substitusikan persamaan kedua pada hasil langkah pertama sehingga diperoleh

$$y'' = 3(8x + y) = 24x + 3y$$

3. Ganti variabel x menggunakan persamaan pertama pada sistem sehingga diperoleh

$$y'' = 24x + 3y = 24(y'/3) + 3y = 8y' + 3y \longrightarrow y'' - 8y' - 3y = 0$$

yang merupakan PDB orde 2 homogen yang solusinya dapat diselesaikan dengan persamaan karateristik

$$\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$$

sehingga diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 12}}{2}$$

dan solusinya adalah

$$y(t) = C_1 e^{4+\sqrt{19}} + C_2 e^{4-\sqrt{19}}$$

4. Substitusi solusi $y(t)$ pada persamaan kedua dalam sistem sehingga diperoleh PDB orde 1 dengan faktor integrasi

$$x' - 8x = C_1 e^{4+\sqrt{19}} + C_2 e^{4-\sqrt{19}}$$

dengan faktor integrasi

$$\mu(t) = e^{8t}.$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

5. Menyelesaikan solusi untuk $x(t)$ yaitu

$$\begin{aligned}
\mu(x' - 8x) &= \mu\left(C_1 e^{4+\sqrt{19}} + C_2 e^{4-\sqrt{19}}\right) \\
d(\mu x(t)) &= \mu\left(C_1 e^{4+\sqrt{19}} + C_2 e^{4-\sqrt{19}}\right)\, dt \\
\int d(\mu x(t)) &= \int \mu\left(C_1 e^{4+\sqrt{19}} + C_2 e^{4-\sqrt{19}}\right)\, dt \\
\mu x(t) &= C_1 \int e^{(12+\sqrt{19})t}\, dt + C_2 \int e^{(12-\sqrt{19})t}\, dt \\
&= C_1 \frac{e^{(12+\sqrt{19})t}}{12+\sqrt{19}} + C_2 \frac{e^{(12-\sqrt{19})t}}{12-\sqrt{19}} \\
x(t) &= C_1 \frac{e^{(4+\sqrt{19})t}}{12+\sqrt{19}} + C_2 \frac{e^{(4-\sqrt{19})t}}{12-\sqrt{19}}
\end{aligned}$$

Jadi solusi akhir dari SPDL adalah

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 \frac{e^{(4+\sqrt{19})t}}{12+\sqrt{19}} + C_2 \frac{e^{(4-\sqrt{19})t}}{12-\sqrt{19}} \\
y(t) &= C_1 e^{4+\sqrt{19}} + C_2 e^{4-\sqrt{19}}
\end{aligned}$$

4.2.2 Metode Nilai Eigen dengan Nilai Eigen Real Berbeda

Misalkan solusinya berbentuk

$$\vec{x} = \vec{v} \exp \lambda t, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Jika disubstitusikan ke dalam SPDBL, akan menghasilkan

$$\frac{d\vec{v} \exp \lambda t}{dt} - A\vec{v} \exp \lambda t = 0$$

atau

$$\lambda \vec{v} \exp \lambda t - A\vec{v} \exp \lambda t = 0$$

atau

$$(\lambda \vec{v} - A\vec{v}) \exp \lambda t = 0$$

Nilai $\exp \lambda t \neq 0$ sehingga

$$\lambda \vec{v} - A\vec{v} = 0$$

atau

$$\lambda \vec{v} = A\vec{v}.$$

Notasi di atas merupakan bentuk nilai eigen. Jadi λ merupakan nilai eigen dan $\vec{v}$ merupakan vektor eigen dari matriks A.

Langkah untuk mendapatkan solusi dari SPDBL di atas adalah

1. Misalkan diberikan SPDBL

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

2. Tentukan nilai eigen dari matriks A, misalkan $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$
3. Tentukan vektor eigen yang bebas linier yang bersesuaian dengan nilai eigen di atas, misalkan $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$.
4. Jika matriks A memiliki n buah nilai eigen yang berbeda, maka solusi masing-masing nilai

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

eigen dari masalah SPDBL di atas adalah

$$\vec{x}_1(t) = \vec{v}_1 \exp(\lambda_1 t), \quad \vec{x}_2(t) = \vec{v}_2 \exp(\lambda_2 t), \quad \cdots \quad \vec{x}_n(t) = \vec{v}_n \exp(\lambda_n t),$$

Solusi umum dari masalah SPDBL adalah

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t)$$

4.2.2.1 Latihan

1. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

2. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

3. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

4.2.3 Metode Nilai Eigen dengan Nilai Eigen yang Berulang

Misalkan matriks A memiliki nilai eigen yang berulang. Jika multiplisitas dari nilai eigen tersebut berjumlah n maka solusi umumnya adalah

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t)$$

dengan

$$\vec{x}_i = \vec{v}_i \exp(\lambda_i t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Jika multiplisitas kurang dari n, maka perlu ditentukan vektor eigen yang saling bebas linier dari nilai eigen yang bersangkutan. Misalkan nilai eigen yang berulang adalah λ dengan vektor eigennya adalah $\vec{v}_1$, maka solusi lain dapat dituliskan dengan

$$x(t) = t\vec{v}_1 \exp \lambda t + \vec{v}_2 \exp \lambda t$$

dengan $\vec{v}_2$ adalah vektor eigen lain yang harus ditentukan yang jika disubstitusikan ke dalam SPDBL harus memenuhi

$$(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

Solusi umum dari SPDBL ini menjadi

$$x(t) = c_1\vec{v}_1 \exp \lambda t + c_2 \{t\vec{v}_1 \exp \lambda t + \vec{v}_2 \exp \lambda t\}$$

Contoh: Misalkan diberikan SPDBL

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

dimana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Periksa bahwa nilai eigennya adalah $\lambda = 2$ dengan multiplisitas 2, dengan vektor eigen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

akan ditentukan vektor v_2 yang memenuhi

$$(A - \lambda I)\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

sehingga

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Misalkan

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Periksa bahwa determinan sistem di atas adalah nol, sehingga diperoleh (OBE)

$$-a - b = 1$$

atau

$$a = -1 - b$$

sehingga vektor $\vec{v}_2$ menjadi

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dengan $b \in \mathbb{R}$. Pilih $b = 0$ sehingga diperoleh vektor $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

solusi akhir adalah

$$\vec{x}\,(t) = c_1 t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}\right\}$$

4.2.3.1 Latihan

1. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\vec{x}$$

2. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

3. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

4.2.4. Metode Nilai Eigen dengan Nilai Eigen Kompleks

Misalkan SPDBL dinyatakan sebagai

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

dimana A adalah matriks $M_{n\times n}$ dengan entri bilangan riil dan $\vec{x}$ adalah vektor variabel $n \times 1$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$. Misalkan nilai eigen dari A berbentuk

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $i^2 = -1$.

Misalkan matriks A memiliki nilai eigen kompleks konjugat

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut

$$\vec{v} = \vec{w} + i\vec{z}.$$

Misalkan dipilih solusi berupa nilai dan vektor eigen positif, sehingga

$$\vec{x} = \vec{v}\exp(\lambda t) = (\vec{w} + i\vec{z})\exp((\alpha + i\beta)t)$$

Ingat:

$$\exp(iat) = \cos at + i\sin at$$

sehingga

$$\vec{x} = (\vec{w} + i\vec{z})\exp(\alpha t)(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

atau

$$\vec{x} = \exp(\alpha t)(\vec{w}\cos\beta t - \vec{z}\sin\beta t) + i\exp(\alpha t)(\vec{w}\sin\beta t + \vec{z}\cos\beta t)$$

Perhatikan bagian riil dan imajiner dari solusi di atas

$$\vec{a}(t) = \mathrm{Re}(x) = \exp(\alpha t)(\vec{w}\cos\beta t - \vec{z}\sin\beta t)$$
$$\vec{b}(t) = \mathrm{Im}(x) = \exp(\alpha t)(\vec{w}\sin\beta t + \vec{z}\cos\beta t)$$

dimana keduanya merupakan solusi dari sistem. Oleh karena itu, solusi umum bagi sistem SPDBL di atas adalah

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{a}(t) + c_2\vec{b}(t)$$

Contoh: Misalkan diberikan SPDBL

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Nilai eigen dari SPDBL tersebut ditentukan oleh

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 4 = 0$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

sehingga diperoleh hasil

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

sehingga nilai eigennya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

Pilih salah satu eigen, diambil yang positif

$$\lambda_1 = -1 + 2i$$

maka vektor eigen dapat dicari dengan

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = (-1+2i)\,\vec{v}_1 \to \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \to \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$

sehingga

$$-2ia + 2b = 0 \to ai = b$$

atau

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ ir \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$\vec{a} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t)\right)$$

$$\vec{b} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t)\right)$$

Solusi umumnya adalah

$$\vec{x} = c_1 e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t)\right) + c_2 e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t)\right)$$

dengan bentuk sederhananya

$$\vec{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

4.2.4.1 Latihan

1. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

2. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan solusi dari SPDBL berikut ini

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

4.3 Kestabilan Model Linear

Tinjau kembali model linear

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) + bM(t)$$
$$\frac{dM(t)}{dt} = cN(t) + dM(t)$$

Untuk melihat sifat dari titik kestabilan, dapat ditinjau dari bentuk persamaan karateristik dari PDB orde-2. Misalkan untuk $c \neq 0$ maka persamaan di awal menjadi

$$N = \frac{1}{c}\left(\frac{dM}{dt} - dM\right).$$

Nilai dN/dt menjadi

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d^2M}{cdt^2} - \frac{d}{c}\frac{dM}{dt}$$

Substitusikan pada persamaan dN/dt di awal sehingga diperoleh

$$\frac{d^2M}{cdt^2} - \frac{d}{c}\frac{dM}{dt} = a\left(\frac{1}{c}\left(\frac{dM}{dt} - dM\right)\right) + bM$$

Jika disederhanakan diperoleh

$$\frac{d^2M}{dt^2} - (a+d)\frac{dM}{dt} + (ad - bc)M = 0$$

yang merupakan PDB orde-2. Persamaan karateristik di atas adalah

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Akar solusi dari persamaan karateristik terbagi menjadi 5, yaitu

1. λ_1, λ_2 bernilai riil, berbeda, bertanda sama.

   Solusinya berbentuk

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2} t$$

   (a) Jika λ_1, λ_2 bernilai positif maka sistem *unstable*

   (b) Jika λ_1, λ_2 bernilai negatif maka sistem stabil asimtotik.

2. λ_1, λ_2 bernilai riil, berbeda, bertanda beda.

   Solusinya berbentuk

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2} t$$

   Oleh karena salah satu dari λ_1, λ_2 bernilai positif maka $y(t)$ akan bernilai *unstable*.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

3. λ_1, λ_2 bernilai riil dan sama.

   Solusinya berbentuk
$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + tC_2 e^{\lambda} t$$
   (a) Jika λ bernilai positif maka sistem *unstable*

   (b) Jika λ bernilai negatif maka sistem stabil asimtotik.

4. λ_1, λ_2 bernilai imajiner konjugat.

   Misalkan akar konjugatnya
$$\lambda = \alpha + i\beta$$
   Solusinya berbentuk
$$y(t) = e^{\alpha t}\left\{A\cos\beta t + B\sin\beta t\right\}$$
   (a) Jika α bernilai positif maka sistem *unstable*

   (b) Jika α bernilai negatif maka sistem stabil asimtotik.

5. λ_1, λ_2 bernilai imajiner murni.

   Misalkan akar konjugatnya
$$\lambda = i\beta$$
   Solusinya berbentuk
$$y(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$$
   Oleh karena solusi berupa nilai $\sin, \cos$ maka solusi hanya berosilasi di sekitaran $(0,0)$ dengan amplitudo tergantung nilai A, B. Jadi, solusi bersifat stabil, tetapi tidak stabil asimtotik.

Perlu diingat bahwa λ_1, λ_2 merupakan akar karateristik PDB orde-2. Namun, disamping itu, nilai dari λ_1, λ_2 juga dapat diperoleh dengan menghitung nilai dari
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
atau dapat dikatakan λ_1, λ_2 adalah nilai eigen dari matriks A. Kriteria kestabilan ini kemudian dikenal dengan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

Model Pertumbuhan Populasi Nonlinear

Perhatikan kembali model yang diberikan pada persamaan (1). Asumsi yang berlaku pada model tersebut adalah

1. Laju perubahan populasi, baik $R(t), S(t)$ bersifat proporsional, dimana $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
2. Faktor interaksi antara $R(t), S(t)$ diabaikan

Model nonlinear dapat diperoleh dari beberapa kasus; baik yang melibatkan model linear ataupun diperoleh dari persamaan diferensial orde dua. Beberapa kasus yang bisa menghasilkan model nonlinear adalah

Kasus 1 Misalkan diinginkan laju pertumbuhan bersifat logistik maka model baru akan diperoleh
$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= (a - \theta R)R + bS \\ \frac{dS}{dt} &= cR + dS \end{aligned} \tag{2}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Jika diinginkan pada kedua individu, akan diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= (a-\theta R)R + bS \\ \frac{dS}{dt} &= cR + (d-\gamma S)S \end{aligned} \tag{3}$$

Kasus.2 Jika memperhitungkan adanya interaksi pada kedua populasi, maka diberikan faktor perkalian antara $R(t), S(t)$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= (a-\theta R)R + bSR \\ \frac{dS}{dt} &= (d-\gamma S)S \end{aligned} \tag{4}$$

Jika faktor interaksi diperhitungkan di pertumbuhan populasi di kedua populasi, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= (a-\theta R)R + bSR \\ \frac{dS}{dt} &= (d-\gamma S)S + cSR \end{aligned} \tag{5}$$

Kasus.3 Misalkan diberikan persamaan diferensial biasa orde dua homogen, yaitu

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Misalkan didefinisikan $x = y'$ maka diperoleh

$$x' = y''.$$

Persamaan diferensial biasa orde dua dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} y' &= x \\ x' &= \frac{-cy - by'}{a} = \frac{-cy - bx}{a} \end{aligned}$$

5.1 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium adalah titik (R^*, S^*) yang menyebabkan

$$\frac{dR}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0$$

secara simultan. Perhatikan sistem pada persamaan (5) maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= (a-\theta R)R + bSR \\ 0 &= (d-\gamma S)S + cSR \end{aligned} \tag{6}$$

Kombinasi paling umum digunakan untuk menentukan titik ekuilibrium adalah $(R^* = 0, S^* = 0)$ dan $(R^* \neq 0, S^* \neq 0)$. Oleh karena terdapat dua kemungkinan $R = 0, R \neq 0$ dan terdapat dua persamaan $R(t), S(t)$ maka terdapat $2^2 = 4$ kemungkinan titik ekuilibrium.

Kombinasi.1 $R = 0, S = 0$. Substitusikan dalam persamaan (6) sehingga diperoleh

$$\frac{dR}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0.$$

Jelas bahwa kombinasi $(R = 0, S = 0)$ merupakan titik ekuilibrium.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Kombinasi.2 $R = 0, S = \zeta \neq 0$. Substitusikan dalam persamaan (6). Untuk $R = 0$ diperoleh

$$(d - \gamma S)S = 0$$

yang dipenuhi oleh $S = 0$ atau $(d - \gamma S) = 0$. Oleh karena diasumsikan $S \neq 0$ maka akan diperoleh

$$S = \zeta = \frac{d}{\gamma}$$

Jadi, kombinasi $(R = 0, S = \frac{d}{\gamma})$ adalah titik ekuilibrium kedua

Kombinasi.3 $R = \zeta \neq 0, S = 0$. Substitusikan dalam persamaan (6). Untuk $S = 0$ diperoleh

$$(a - \theta R)R = 0$$

yang dipenuhi oleh $R = 0$ atau $(a - \theta R) = 0$. Oleh karena diasumsikan $R \neq 0$ maka akan diperoleh

$$R = \zeta = \frac{a}{\theta}$$

Jadi, kombinasi $(R = \frac{a}{\theta}, S = 0)$ adalah titik ekuilibrium ketiga

Kombinasi.4 $R = \zeta \neq 0, S = \xi \neq 0$. Perhatikan persamaan pertama pada persamaan (6).

$$(a - \theta R)R + bSR = 0 \Longrightarrow ((a - \theta R) + bS)R = 0$$

yang dipenuhi oleh $R = 0$ atau $a - \theta R + bS = 0$. Oleh karena $R \neq 0$ maka diperoleh

$$a - \theta R + bS = 0 \Longrightarrow R = \frac{a + bS}{\theta}$$

Substitusikan nilai R pada persamaan kedua pada persamaan (6) sehingga diperoleh

$$(d - \gamma S)S + cSR = 0 \Longrightarrow (d - \gamma S)S + cS\left(\frac{a + bS}{\theta}\right) = 0$$

Sederhanakan bentuk persamaan diperoleh

$$S\left((d - \gamma S) + c\left(\frac{a + bS}{\theta}\right)\right) = 0$$

yang dipenuhi oleh $S = 0$ atau $(d - \gamma S) + c\left(\frac{a + bS}{\theta}\right) = 0$. Oleh karena diasumsikan $S \neq 0$ maka diperoleh

$$(d - \gamma S) + c\left(\frac{a + bS}{\theta}\right) = 0 \Longrightarrow d + \frac{ca}{\theta} + \left(\frac{cb}{\theta} - \gamma\right)S = 0$$

Selanjutnya, diperoleh nilai S sebagai titik ekuilibrium

$$S = \left(\frac{\theta d + ca}{\theta}\right)\left(\frac{\theta}{\gamma\theta - cb}\right) = \frac{\theta d + ca}{\gamma\theta - cb}$$

Substitusikan ke dalam persamaan R sehingga diperoleh

$$R = \frac{a + bS}{\theta} = \frac{a}{\theta} + \frac{b}{\theta}\left(\frac{\theta d + ca}{\gamma\theta - cb}\right) = \frac{a(\gamma\theta - cb) + b(\theta d + ca)}{\theta(\gamma\theta - cb)} = \frac{a\gamma + bd}{\gamma\theta - cb}$$

Jadi, kombinasi $R = \frac{a\gamma + bd}{\gamma\theta - cb}, S = \frac{\theta d + ca}{\gamma\theta - cb}$ adalah titik ekuilibrium keempat.

Cara Lain

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Oleh karena $R \neq 0$ maka persamaan pertama pada persamaan (6) menghasilkan

$$a - \theta R + bS = 0 \Longrightarrow \theta R - bS = a$$

Oleh karena $S \neq 0$ maka persamaan kedua pada persamaan (6)

$$d - \gamma S + cR = 0 \Longrightarrow \gamma S - cR = d$$

Jika dibentuk sistem persamaan linear akan menghasilkan

$$\begin{pmatrix} \theta & -b \\ -c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$$

Jika diasumsikan bahwa $\theta\gamma - bc \neq 0$ maka nilai R, S dapat ditentukan dengan persamaan

$$\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta\gamma - bc} \begin{pmatrix} \gamma & b \\ c & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta\gamma - bc} \begin{pmatrix} a\gamma + bd \\ ac + \theta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a\gamma + bd}{\theta\gamma - bc} \\ \dfrac{ac + \theta d}{\theta\gamma - bc} \end{pmatrix}$$

yang menghasilkan hasil yang sama dengan langkah sebelumnya.

5.2 Linierisasi

Persamaan (5) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= f(R,S) = (a - \theta R)R + bSR \\ \frac{dS}{dt} &= g(R,S) = (d - \gamma S)S + cSR \end{aligned} \tag{7}$$

Persamaan (7) tidak bisa dianalisis secara kualitatif karena sifatnya yang nonlinear. Oleh karena itu perlu dilakukan analisis lokal. Analisis lokal dilakukan dengan mengubah persamaan (7) menjadi sistem linear di sekitar titik ekuilibrium menggunakan deret Taylor.

Taylor persamaan pertama persamaan (7) di sekitar titik ekuilibrium $\vec{x}_e = (R^*, S^*)$ menghasilkan

$$f(R,S) = f(R^*, S^*) + \nabla f(R^*, S^*)(\vec{x} - \vec{x}_e) + O(2)$$

dengan

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial R} & \dfrac{\partial f}{\partial S} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$$

Oleh karena $f(R^*, S^*) = 0$ dan mengabaikan suku kedua, diperoleh

$$f(R,S) = \nabla f(R^*, S^*)(\vec{x} - \vec{x}_e)$$

Prosedur yang sama diterapkan pada $g(R,S)$ akan menghasilkan

$$g(R,S) = \nabla g(R^*, S^*)(\vec{x} - \vec{x}_e)$$

Jika dinotasikan dengan notasi vektor, diperoleh $\vec{x}' = A(\vec{x} - \vec{x}_e)$, dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial R} & \dfrac{\partial f}{\partial S} \\ \dfrac{\partial g}{\partial R} & \dfrac{\partial g}{\partial S} \end{pmatrix}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Menggunakan persamaan (7) diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} a - 2\theta R^* + bS^* & bR^* \\ cS^* & d - 2\gamma S^* \end{pmatrix}$$

5.3 Kestabilan Lokal

Misalkan diberikan sistem nonlinear

$$y' = f(x, y)$$

yang kemudian dilinierisasi menjadi sistem linier

$$y' = Ax$$

pada titik ekuilibrium x^*.

Kestabilan lokal dari sistem linier dapat dianalisa dengan kriteria Routh-Hurwitz, yaitu

Teorema 5.1 (Kriteria Routh-Hurwitz)**:** Misalkan $x^* = 0$ adalah titik ekuilibrium point dari sistem nonlinear

$$x = f(x)$$

Misalkan A adalah matriks linierisasi

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

pada titik ekuilibrium x^* maka

1. Titik x^* stabil jika $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ untuk setiap λ_i nilai eigen dari A
2. Tidak stabil jika terdapat $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

Contoh: Misalkan diberikan sistem

$$x' = -x + x^3$$
$$y' = -2y$$

Pertama, titik ekuilibriumd dari sistem adalah $y = 0$ dan

$$x(x^2 - 1) = 0$$

sehingga $x = 0, x = \pm 1$. Jadi titik ekuilibriumnya adalah

$$\{(0, 0), (1, 0), (-1, 0)\}$$

Matriks linierisasinya adalah

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Untuk $(0, 0)$ diperoleh matriks

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

dengan nilai eigen $\lambda = -1, \lambda = -2$ yang berarti bahwa sistem stabil.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau

Untuk $(\pm 1, 0)$ akan diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda = -2, \lambda = 2$. Sistem linier pada titik $(\pm 1, 0)$ unstable.

Contoh: Misalkan diberikan sistem

$$\begin{aligned} x' &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ y' &= x + ay(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

dengan a adalah parameter. Salah satu titik ekuilibrium adalah $(0, 0)$ sehingga linierisasi menghasilkan

$$A = \begin{pmatrix} 3ax^2 + ay^2 & -1 + 2axy \\ 1 + 2axy & ax^2 + 3ay^2 \end{pmatrix}$$

disekitar titik ekuilibrium $(0, 0)$ akan menghasilkan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan nilai eigen $\lambda = \pm i$ yang berarti bahwa sistem stable pada titik ekuilibrium.

Misalkan koordinat polar $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$x^2 + y^2 = r^2$$

sehingga

$$2xx' + 2yy' = 2rr'$$

atau

$$rr' = xx' + yy' \to rr' = x(-y + ax(x^2 + y^2)) + y(x + ay(x^2 + y^2))$$

atau

$$rr' = ar^4$$

Untuk θ, sehingga $\tan\theta = y/x$

$$\tan\theta = y/x \to \theta'/\cos^2\theta = \frac{xy' - yx'}{x^2} \to \theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2}$$

Substitusikan nilai x', y' sehingga diperoleh

$$\theta' = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

Jadi, sistem yang baru menggunakan koordinat polar adalah

$$\begin{aligned} r' &= ar^3 \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

Untuk $a > 0$ jelas sistem unstable karena $r \to \infty$ untuk $t \to \infty$ sedangkan jika $a < 0$ sistem stabil karena $r \to 0$ untuk $t \to \infty$.

Perhatikan bahwa kesimpulan pada sistem nonlinier dengan sistem linierisasi berbeda.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

3.4 Model Predator-Prey

Model predator prey adalah model yang menggambarkan dua populasi pada sebuah habitat yang homogen yang saling berinteraksi; dengan salah satu populasi bertindak sebagai pemangsa dan populasi lainnya sebagai mangsanya. Model ini mengasumsikan bahwasanya populasi mangsa adalah populasi yang menjadi sumber kehidupan satu-satunya bagi populasi pemangsa.

Gambar 3: Skema Hubungan antara kelinci dan Serigala

Perhatikan pola interaksi antara kelinci dan serigala.

1. Kelinci adalah makanan satu-satunya yang tersedia bagi Serigala.
2. Kelinci memakan rumput sebagai sumber makanan untuk bertahan hidup.
3. Kelinci dan serigala hidup dalam lingkungan yang sama dan membaur dengan merata.

Beberapa hal yang dapat didefinisikan dalam proses pemodelan

1. Misalkan $R(t)$ adalah jumlah populasi kelinci pada domain Σ pada waktu t.
2. Misalkan $S(t)$ adalah jumlah populasi serigala pada domain Σ pada waktu t.
3. Kelinci diasumsikan tumbuh secara proporsional

Proses pemodelan dilakukan dengan tahapan berikut ini

Langkah. 1 Jika kelinci tidak ada, serigala akan mati secara proporsional.

$$\frac{dS}{dt} \approx -aS$$

Langkah. 2 Jika serigala tidak ada, kelinci akan tumbuh secara proporsional

$$\frac{dK}{dt} \approx bK$$

Langkah. 3 Jika kelinci ada, jumlah populasi serigala akan bertambah karena tersedianya penunjang hidup. Diasumsikan bahwa pertumbuhan sebanding dengan hasil kali jumlah kedua populasi.

$$\frac{dS}{dt} \approx \alpha S(t)K(t)$$

Langkah. 4 Jika rusa ada, jumlah populasi kelinci akan menurun karena dimangsa oleh rusa akibat interaksi yang terjadi. Diasumsikan bahwa kematian sebanding dengan hasil kali jumlah kedua populasi.

$$\frac{dK}{dt} \approx -\beta S(t)K(t)$$

Berdasarkan penjabaran langkah-langkah di atas, diperoleh model untuk menggambarkan

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

kondisi pada Gambar (3) yaitu

$$\frac{dK}{dt} = bK(t) - \beta S(t)K(t) \tag{8}$$

$$\frac{dS}{dt} = -aS(t) + \alpha S(t)K(t) \tag{9}$$

dengan $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

3.4.1 Titik Ekuilibrium

Oleh karena terdapat dua (2) persamaan dalam sistem, maka terdapat empat (4) kemungkinan titik ekuilibrium.

Titik 1 $(K = 0, S = 0)$. Jelas bahwa titik ini memenuhi persamaan

$$\frac{dK}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0$$

Titik 2 $(K = 0, S = \psi)$. Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (9) akan diperoleh $-aS(t) = 0$ yang hanya dipenuhi oleh $S = 0$ yang menyalahi asumsi $S = \psi$. Jadi, titik ini bukan titik ekuilibrium.

Titik 3 $(K = \theta, S = 0)$. Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (8) akan diperoleh $bK(t) = 0$ yang hanya dipenuhi oleh $K = 0$ yang menyalahi asumsi $K = \theta$. Jadi, titik ini bukan titik ekuilibrium.

Titik 4 $(K = \theta, S = \psi)$. Persamaan (8) dapat dituliskan dalam bentuk

$$K(t)(b - \beta S(t)) = 0$$

Oleh karena $K(t) \neq 0$ maka diperoleh $S(t) = \dfrac{b}{\beta}$. Selanjutnya, persamaan (9) dapat dituliskan dalam bentuk

$$(-a + \alpha K(t))S(t) = 0$$

Oleh karena $S(t) \neq 0$ maka diperoleh $K(t) = \dfrac{a}{\alpha}$. Jadi, titik keempat adalah titik ekuilibrium dengan

$$K(t) = \theta = \frac{a}{\alpha}, \quad S(t) = \psi = \frac{b}{\beta}$$

Jadi, sistem ini memiliki dua titik ekuilibrium yaitu

$$\left\{(K(t) = 0, S(t) = 0), \left(K(t) = \frac{a}{\alpha}, S(t) = \frac{b}{\beta}\right)\right\}$$

3.4.2 Kestabilan Model

Untuk menentukan kestabilan model secara lokal, dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini

Langkah. 1 Menentukan matriks linearisasi dengan matriks Jacobian. Matriks linearisasi dari model ini adalah

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(K,S)}{\partial K} & \dfrac{\partial f(K,S)}{\partial K} \\ \dfrac{\partial g(K,S)}{\partial K} & \dfrac{\partial g(K,S)}{\partial K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S\beta + b & -K\beta \\ \alpha S & K\alpha - a \end{pmatrix}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Langkah. 2 Matriks linearisasi titik ekuilibrium dengan cara mensubstitusikan titik ekuilibrium pada matriks linearisasi. Untuk titik ekuilibrium pertama diperoleh

$$A_1 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Untuk titik ekuilibrium kedua diperoleh

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a\beta}{\alpha} \\ \dfrac{\alpha b}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Langkah. 3 Menentukan nilai eigen dari masing-masing matriks linearisasi titik ekuilibrium pertama. Untuk matriks A_1 diperoleh

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + (a-b)\lambda - ab = 0$$

Akar dari persamaan karakteristik di atas adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4ab}}{2} = \frac{(b-a) \pm \sqrt{(b+a)^2}}{2} = \frac{(b-a) \pm (b+a)}{2}$$

Nilai eigen dari matriks A_1 adalah

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Oleh karena $b \in \mathbb{R}^+$ maka titik ekuilibrium pertama tidak stabil. Bidang fase ditunjukkan pada Gambar (4). Pada gambar terlihat vektor arah menjauhi titik $K = 0, S = 0$. Ilustrasi ini cukup untuk menunjukkan bahwa sistem tidak stabil di sekitar titik $K = 0, S = 0$.

Gambar 4: Bidang Fase Titik Ekuilibrium Pertama

Langkah. 4 Menentukan nilai eigen dari masing-masing matriks linearisasi titik ekuilibrium kedua. Untuk matriks A_2 diperoleh

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + ab = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Oleh karena nilai eigen dari sistem linearisasi dari titik ekuilibrium kedua berupa kompleks murni, maka sistem akan stabil di sekitar titik ekuilibrium. Bidang fase ditunjukkan pada Gambar (5). Pada gambar terlihat vektor arah bergerak melingkaran suatu titik, ditunjukkan dengan lingkaran hitam, dengan beragam nilai awal yang dipilih.

Gambar 5: Bidang Fase Sistem Nonlinear di Sekitar Titik Ekuilibrium

5.4.3 Analisa Bidang Fase

Pada Gambar (5) terlihat bahwa populasi berputar di sekitar suatu titik. Terlihat juga bahwa; misalkan amati pada populasi S; terjadi titik balik di suatu titik maksimum. Pada bagian ini akan ditentukan titik maksimum yang akan dicapai oleh populasi kelinci dan serigala dalam siklus pertumbuhannya.

Perhatikan bahwa, untuk melihat pengaruh perubahan S terhadap K dapat ditentukan dengan

$$\frac{dS}{dK} = \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dK}{dt}} = \frac{-aS + \alpha SK}{bK - \beta SK}$$

Menggunakan pemisahan variabel akan diperoleh

$$\frac{(b - \beta S)dS}{S} = \frac{(-a + \alpha K)dK}{K}$$

Oleh karena masing-masing ruas sudah bebas dari varibel, maka dapat diintegralkan secara langsung.

$$\int \frac{(b - \beta S)dS}{S} = \int \frac{(-a + \alpha K)dK}{K} \Longrightarrow b \ln S - \beta S = -a \ln K + \alpha K + C \Longrightarrow \ln \frac{S^b}{e^{\beta S}} = \ln C \frac{e^{\alpha K}}{K^a}$$

Menggunakan kesamaan nilai pada ln diperoleh

$$\frac{S^b}{e^{\beta S}} = C \frac{e^{\alpha K}}{K^a} \Longrightarrow \frac{S^b}{e^{\beta S}} \frac{K^a}{e^{\alpha K}} = C$$

Misalkan didefinisikan $f(K) = \dfrac{K^a}{e^{\alpha K}}$ dan $g(S) = \dfrac{S^b}{e^{\beta S}}$ maka diperoleh persamaan

$$f(K)g(S) = \frac{S^b}{e^{\beta S}} \frac{K^a}{e^{\alpha K}} = C \tag{10}$$

Jika persamaan (10) diplot secara implisit dengan beberapa nilai C berbeda, akan diperoleh

Gambar 6: Plot persamaan (10) secara implisit

Selanjutnya, perhatikan kembali persamaan $f(K)$. Turunan pertama terhadap K akan menghasilkan

$$f'(K) = 2\frac{K^{a-1}a - K^a\alpha}{e^{\alpha K}} \Longrightarrow f'(K) = 0 \Longrightarrow K = \frac{a}{\alpha}$$

Turunan kedua akan menghasilkan

$$f''(K) = -e^{-\alpha K}\left(2K^{a-1}a\alpha - K^a\alpha^2 - K^{a-2}a^2 + K^{a-2}a\right)$$

Jika disubstitusikan nilai $K = \dfrac{a}{\alpha}$ maka akan diperoleh

$$f''\left(\frac{a}{\alpha}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-a}\alpha^2}{a}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^a$$

yang berarti bahwa $K = \dfrac{a}{\alpha}$ adalah titik maksimum. Jika fungsi $f(K)$ diplot, ditunjukkan pada Gambar (7)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Gambar 7: Plot fungsi $f(K)$ dengan garis biru adalah garis titik maksimum $K = \dfrac{a}{\alpha}$

Perhatikan kembali persamaan $g(S)$. Turunan pertama terhadap S akan menghasilkan

$$g'(S) = \frac{S^b b}{S e^{\beta S}} - \frac{S^b \beta}{e^{\beta S}} \Longrightarrow g'(S) = 0 \Longrightarrow S = \frac{b}{\beta}$$

Turunan kedua akan menghasilkan

$$g''(S) = \frac{S^b b^2}{S^2 e^{\beta S}} - \frac{S^b b}{S^2 e^{\beta S}} - 2\,\frac{S^b b \beta}{S e^{\beta S}} + \frac{S^b \beta^2}{e^{\beta S}}$$

Jika disubstitusikan nilai $S = \dfrac{b}{\beta}$ maka akan diperoleh

$$g''\left(\frac{a}{\alpha}\right) = -\frac{\beta^2}{b e^b}\left(\frac{b}{\beta}\right)^b$$

yang berarti bahwa $S = \dfrac{b}{\beta}$ adalah titik maksimum. Jika fungsi $g(S)$ diplot, ditunjukkan pada Gambar (8)

Gambar 8: Plot fungsi $g(S)$ dengan garis biru adalah garis titik maksimum $S = \dfrac{b}{\beta}$

5.4.4 Contoh-1

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

5.5 Model Kompetisi

Gambar 9: Skema hubungan antara rusa dan kelinci dalam suatu habitat dalam proses konsumsi rumput

6 Model Gerak Pendulum

Perhatikan gambar

Gambar 10: Pola Gerakan Pendulum

dengan A adalah posisi awal, B suatu posisi dalam gerakan dan θ adalah sudut yang dibentuk antara posisi A dan posisi B. Pada titik B, kondisi vektor dapat ditunjukkan pada gambar

Gambar 11: Komponen vektor pada posisi B

dengan T adalah vektor gaya tegangan yang menahan bandul dari pusat, mg adalah komponen gaya berat benda yang selalu mengarah ke pusat bumi dengan komponen m adalah massa benda (kg) dan g adalah percepatan gravitasi dengan nilai yang biasanya digunakan adalah $9.8m/s^2$.

Selanjutnya, didefinisikan koordinat kartesian sebagaimana biasa digunakan dalam perhitungan matematika. Vektor satuan i, j juga merupakan vektor satuan standar yang mengarah pada sumbu-x dan sumbu-y.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Perhatikan gambar vektor, pada kondisi tersebut, vektor posisi bola di B dapat dituliskan dalam bentuk

$$s = R\sin\theta\, i - R\cos\theta\, j$$

Turunan pertama terhadap t akan menghasilkan

$$v = s' = R\theta'\cos\theta\, i + \theta' R\sin\theta\, j$$

Turunan kedua akan menghasilkan

$$a = v' = R\left(\theta''\cos\theta - (\theta')^2\sin\theta\right)\, i + R\left(\theta''\sin\theta + (\theta')^2\cos\theta\right) j$$

Vektor gaya yang bekerja pada bandul pada posisi B adalah

$$F = T\cos\theta\, j - T\sin\theta\, i - mg\, j$$

Hukum Newton II $F = ma$ menghasilkan

$$T\cos\theta\, j - T\sin\theta\, i - mg\, j = mR\left(\theta''\cos\theta - (\theta')^2\sin\theta\right)\, i + mR\left(\theta''\sin\theta + (\theta')^2\cos\theta\right) j$$

dengan mengumpulkan variabel dalam masing-masing sumbu diperoleh

$$-T\sin\theta\, i + (T\cos\theta\ - mg)\ j = mR\left(\theta''\cos\theta - (\theta')^2\sin\theta\right)\, i + mR\left(\theta''\sin\theta + (\theta')^2\cos\theta\right) j$$

dengan menyamakan koefisien masing-masing sumbu diperoleh dua persamaan, yaitu

$$-T\sin\theta = mR\left(\theta''\cos\theta - (\theta')^2\sin\theta\right)$$

dan

$$T\cos\theta\ = mR\left(\theta''\sin\theta + (\theta')^2\cos\theta\right) + mg$$

Kedua persamaan ini dapat disederhanakan dengan menghilangkan faktor T. Dengan mengalikan cos dan sin pada persamaan pertama dan kedua akan diperoleh

$$-T\sin\theta\cos\theta = mR\left(\theta''\cos\theta - (\theta')^2\sin\theta\right)\cos\theta$$

dan

$$T\cos\theta\sin\theta\ = mR\left(\theta''\sin\theta + (\theta')^2\cos\theta\right)\sin\theta + mg\sin\theta$$

Penjumlahan keduanya akan menghasilkan

$$mR\theta''\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + mg\sin\theta = 0$$

Oleh karena $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ maka diperoleh

$$R\theta'' + g\sin\theta = 0 \tag{11}$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa orde dua tak linear.

6.1 Bentuk Sistem Persamaan Pendulum

Perhatikan kembali persamaan (11). Misalkan didefinisikan dua variabel

$$x = \theta$$
$$y = x' = \theta'$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Turunkan masing-masing persamaan sehingga

$$x' = \theta' = y$$
$$y' = x'' = \theta'' = -\frac{g}{R}\sin\theta = -\frac{g}{R}\sin x$$

Bentuk akhir sistem persamaan diferensial untuk pendulum adalah

$$x' = y \tag{12}$$
$$y' = -\frac{g}{R}\sin x \tag{13}$$

6.2 Titik Ekuilibrium

Oleh karena terdapat dua (2) persamaan di dalam sistem, maka dimungkinkan untuk mendapatkan empat (4) titik ekuilibrium.

Titik 1 $(x = 0, y = 0)$. Jelas, titik ini memenuhi persamaan

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

Titik 2 $(x = \alpha, y = 0)$. Perhatikan persamaan (13) dengan menyatakan bahwa $y' = 0$

$$\frac{g}{R}\sin\alpha = 0$$

yang hanya dipenuhi oleh $\sin\alpha = 0$. Nilai α yang memenuhi ini adalah

$$\alpha = 0, \pi, 2\pi, \ldots, k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

Jadi, titik $(x = k\pi, y = 0)$ dengan $k = 1, 2, \ldots$ adalah titik ekuilibrium.

Titik 3 $(x = 0, y = \beta)$. Jika dimasukkan pada persamaan (12,13) maka jelas titik ini bukan merupakan titik ekuilibrium karena berdasarkan persamaan (12) maka haruslah $y = \beta = 0$.

Titik 4 $(x = \alpha, y = \beta)$. Jika dimasukkan pada persamaan (12) maka jelas titik ini bukan merupakan titik ekuilibrium $y = \beta = 0$

Jadi, titik ekuilibrium untuk gerak pendulum adalah

$$\{(x(t) = 0, y(t) = 0), (x(t) = k\pi, y(t) = 0)\}, k \in \mathbb{N}$$

Perilaku di sekitar titik ekuilibrium dapat dilihat pada bidang fase yang dihasilkan secara numerik yang ditunjukkan pada Gambar (12)

Gambar 12: Bidang fase di sekitar beberapa titik ekuilibrium

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

6.3 Kestabilan Model

Kestabilan model akan dianalisis secara lokal. Oleh karena itu, langkah analisis dilakukan dengan tahapan berikut

Langkah. 1 Membentuk sistem linear dari model pendulum. Matriks linearisasi dari model adalah

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(K,S)}{\partial K} & \dfrac{\partial f(K,S)}{\partial K} \\ \dfrac{\partial g(K,S)}{\partial K} & \dfrac{\partial g(K,S)}{\partial K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g\cos x}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Langkah. 2 Matriks linearisasi titik ekuilibrium. Untuk titik ekuilibrium pertama, diperoleh matriks A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

sedangkan titik ekuilibrium kedua akan menghasilkan

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g\cos k\pi}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Langkah. 3 Menentukan nilai eigen dari masing-masing matrik linearisasi. Untuk matriks A_1 diperoleh

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \frac{g}{R} = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Oleh karena nilai eigennya kompleks murni, sistem pendulum pada titik ekuilibrium pertama bersifat stabil. Bidang fase untuk sistem linear ditunjukkan pada Gambar (13)

Gambar 13: Bidang fase sistem linearisasi di sekitar titik ekuilibrium pertama

Langkah. 4 Menentukan nilai eigen dari masing-masing matrik linearisasi. Untuk matriks A_2 dengan memilih $k = 2i, i \in \mathbb{N}$ diperoleh matriks A_2 yang baru, yaitu

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \frac{g}{R} = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Oleh karena nilai eigennya kompleks murni, sistem pendulum pada titik ekuilibrium kedua dengan k genap bersifat stabil. Bidang fase untuk sistem linear ditun-

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

jukkan pada Gambar (14)

Gambar 14: Bidang fase sistem linearisasi di sekitar titik ekuilibrium kedua dengan nilai k genap

Langkah. 5 Menentukan nilai eigen dari masing-masing matrik linearisasi. Untuk matriks A_2 dengan memilih $k = 2i + 1, i \in \mathbb{N}$ diperoleh matriks A_2 yang baru, yaitu

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - \frac{g}{R} = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Oleh karena nilai eigennya real dan terdapat $\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ maka sistem pendulum pada titik ekuilibrium pertama dengan k ganjil bersifat tidak stabil. Bidang fase untuk sistem linear ditunjukkan pada Gambar (15)

Gambar 15: Bidang fase sistem linearisasi di sekitar titik ekuilibrium kedua dengan nilai k ganjil

6.4 Simulasi

7 Model Gerak Pegas Mendatar

Materi tentang gerakan pegas meliputi

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

1. Penurunan pegas mendatar untuk satu pegas dan satu benda
2. Solusi dari model gerakan pegas
3. Menentukan titik kesetimbangan
4. Menentukan simpangan terjauh dari pegas mendatar

7.1 Modelling

Susunan sebuah benda bermassa m yang diberi pegas dengan susunan mendatar ditunjukkan pada Gambar (16)

Gambar 16: Sistem pegas mendatar

Berdasarkan Gambar (16) dapat dinyatakan beberapa hal berikut ini

1. Benda memiliki massa m kg.
2. Pegas memiliki koefisien regangan k yang besarannya tergantung pada masing-masing pegas.
3. Titik setimbang didefinisikan sebagai titik diam dimana posisi pegas tidak meregang sama sekali.
4. Sistem koordinat yang digunakan adalah kartesius sehingga jarak $x(t)$ didefinisikan sebagai perpindahan yang ditempuh oleh benda dari titik setimbang yang bernilai positif jika bergerak ke arah kanan.
5. Gerak pegas tidak dipengaruhi oleh gesekan dengan lantai atau dengan kata lain, kondisi lantai sangat licin.
6. Agar benda bergerak, dapat dilakukan dengan tiga langkah berikut ini yang mengacu pada posisi benda di titik setimbang
   (a) Benda diberi dorongan sehingga menghasilkan kecepatan gerak benda.
   (b) Benda ditarik atau ditekan sampai dengan titik tertentu, lalu dilepaskan.
   (c) Benda ditarik atau ditekan sampai dengan titik tertentu kemudian diberi dorongan sehingga menghasilkan kecepatan gerak benda bersamaan dengan dilepaskannya benda dari tarikan atau tekanan yang diberikan.

Skenario gerakan pegas dijelaskan sebagai berikut. Pada saat pegas meregang, $x(t) > 0$ dikarena terdapat gaya luar yang mendorong. Namun, pegas melakukan gaya tarik ke arah titik setimbang. Pada saat pegas merapat, $x(t) < 0$, terjadi dikarenakan benda didorong gaya luar ke arah dinding. Pegas akan melakukan gaya ke arah kanan menuju titik setimbang. Berdasarkan hukum gerak Newton II, gerakan benda dapat dituliskan sebagai

$$F = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$$

dengan $\vec{x}(t)$ menyatakan posisi benda pada saat t. Selain itu, pada pegas terdapat gaya yang disebut dengan gaya Hooke. Hukum Hooke pada pegas dapat dituliskan dalam persamaan

$$F = -k\vec{x}(t).$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Sesuai dengan hukum Newton III, gaya aksi-reaksi, dengan menggunakan Hukum Newton II dan Hukum Hooke, akan diperoleh

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = -k\vec{x}(t)$$

atau

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} + k\vec{x}(t) = 0$$

yang merupakan PDB orde dua homogen. Misalkan $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ maka persamaan menjadi

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} + \omega^2\vec{x}(t) = 0 \tag{14}$$

Persamaan (14) disebut dengan persamaan gerak pegas pada susunan tunggal di lantai mendatar.

7.2 Solusi Eksak

Oleh karena gerakan pegas berupa persamaan diferensial orde dua linear, maka solusi dapat dicari menggunakan metode karakteristik. Misalkan didefinisikan

$$\lambda = \frac{d}{dt}$$

maka diperoleh

$$(\lambda^2 + \omega^2)\vec{x}(t) = 0.$$

Asumsikan bahwa $\vec{x}(t) \neq 0$ maka diperoleh

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

yang berarti bahwa

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega i.$$

Solusi analitik dari masalah di atas adalah

$$\vec{x}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{15}$$

Persamaan (15) dapat ditulis ulang dalam bentuk trigonometri tunggal, yang analogi dengan bentuk

$$x(t) = C\sin(\omega t + \psi) \tag{16}$$

dengan

$$A = C\sin\psi \quad \text{dan} \quad B = C\cos\psi$$

dan

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

dan

$$\psi = \arctan\frac{A}{B}.$$

Selanjutnya, C dinyatakan sebagai amplitudo gelombang. Amplitudo adalah simpangan terjauh gelombang dari titik setimbang. ψ adalah sudut fase awal gelombang sedangkan $\omega t + \psi$ merupakan sudut fase osilasi pegas.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

7.3 Frekuensi dan Periode

Definisi 7.1 (Periode): Periode adalah waktu yang diperlukan untuk melakukan satu getaran penuh. Artinya, benda bergerak dari titik awal hingga melalui titik kesetimbangan lalu kembali ke titik awal.

Oleh karena fungsi pegas adalah fungsi sinus yang periodenya 2π maka sudut fase pada saat $t+T$ dan t

$$(\omega(t+T)+\psi)-(\omega t+\psi)=2\pi$$

atau

$$\omega T = 2\pi \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Jadi, periode getaran pegas tersebut adalah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Definisi 7.2 (Frekuensi): Frekuensi adalah banyaknya getaran dalam satu satuan waktu. Frekuensi dirumuskan sebagai

$$f = \frac{N}{t}$$

dengan f adalah frekuensi, N adalah banyaknya getaran dan t adalah waktu pengamatan selama terjadinya getaran.

Selanjutnya, frekuensi dapat dirumuskan dengan

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Perhatikan bahwa

1. Besaran terkait osilasi adalah periode dan frekuensi.
2. Osilasi dipengaruhi secara langsung oleh massa m dan koefisien pegas k.
3. Misalkan 2 pegas memiliki koefisien pegas k sama besar dengan masing-masing beban memiliki massa m berbeda. Semakin besar m maka waktu yang diperlukan untuk melakukan osilasi semakin besar atau pegas mengalami osilasi lebih sedikit dibandingkan massa m yang lebih kecil.
4. Misalkan 2 benda memiliki massa m yang sama dikaitkan dengan pegas yang memiliki koefisien pegas k yang berbeda. Semakin besar k, artinya semakin kaku pegas tersebut, semakin kecil periode untuk melakukan osilasi. Kesimpulan lainnya bahwa, pegas dengan koefisien pegas k yag lebih besar akan mengalami frekuensi lebih besar dibandingkan dengan pegas yang memiliki koefisien pegas lebih kecil.

7.4 Titik Ekuilibrium

Sesuai dengan definisi titik ekuilibrium, maka titik ekuilibrium diperoleh dengan mendiferensiakan solusi eksak terhadap t sehingga diperoleh

$$v = \frac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t+\psi)$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Oleh karena $C, \omega \neq 0$ maka $v(t) = 0$ dipenuhi oleh

$$\cos(\omega t + \psi) = 0$$

yang dihasilkan oleh

$$\omega t + \psi = \frac{k\pi}{2},\ k = 1, 3, 5, 7, \ldots \tag{17}$$

7.5 Simpangan Terjauh

Untuk melihat simpangan terjauh dari gerakan benda berpegas ini, akan dilakukan uji turunan kedua dari solusi eksak pada Persamaan (16) yang menghasilkan

$$a(t) = -C\omega^2 \sin(\omega t + \psi) \tag{18}$$

Berdasarkan titik ekuilibrium pada Persamaan (17) maka terdapat dua kemungkinan

$$\sin(\omega t + \psi) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega t + \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots \\ -1 & , \quad \omega t + \psi = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots \end{cases} \tag{19}$$

Berdasarkan nilai pada Persamaan (19), diperoleh bahwa Persamaan (eq-pegas-a) dapat dituliskan

$$a(t) = \begin{cases} -C\omega^2 & , \quad \omega t + \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots \\ C\omega^2 & , \quad \omega t + \psi = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots \end{cases} \tag{20}$$

Berdasarkan persamaan (20), diperoleh bahwa $\omega t + \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$ adalah pembuat jarak maksimum dari gerakan benda berpegas. Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (16) diperoleh bahwa simpangan terjauh yang dialami benda adalah $x(t) = C$ yang merupakan amplitudo dari getaran pegas tersebut.

7.6 Pegas teredam

Bayangkan gerakan pegas dengan sebuah peredam.

Gambar 17: Sistem pegas mendatar dengan peredam kecepatan

Misalkan peredam memberikan gaya yang sebanding dengan kecepatan gerak pegas sehingga

$$F_r = -cv(t) = -cx'(t)$$

dengan c adalah konstanta kesebandingan. Berdasarkan hukum Newton dan Hooke, diperoleh

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) - cx'(t)$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial orde dua homogen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \psi\frac{dx}{dt} + \omega x = 0 \tag{21}$$

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Menggunakan metode karakteristik, diperoleh

$$\left(\lambda^2 + \psi\lambda + \omega\right) x(t) = 0$$

sehingga diperoleh nilai karakteristik adalah solusi dari

$$\lambda^2 + \psi\lambda + \omega = 0$$

berupa

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\omega}}{2}.$$

Jika $\psi^2 < 4\omega$ maka akan diperoleh sistem yang stabil. Solusi umum dari model gerakan pegas dengan redaman adalah

$$x(t) = e^{-\psi t/2}\left(A\cos Dt/2 + B\sin Dt/2\right) \tag{22}$$

dengan $D = \mathrm{Im}\left(\sqrt{\psi^2 - 4\omega}\right)$. Nilai A, B bisa diperoleh dari masalah nilai awal yang diberikan. Misalkan diberikan $x(0) = l, x'(0) = m$ maka diperoleh

$$x(0) = l \Longrightarrow A = l$$
$$x'(0) = m \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\psi A + BD\right) = m$$

solusi dari kedua sistem diperoleh

$$A = l, \quad B = \frac{\psi l + 2m}{D}$$

Jika dipilih solusi dalam bentuk sin secara tunggal, misalkan $x = C\sin\left(\frac{Dt}{2} + \theta\right)$ maka akan diperoleh

$$x = C\cos\theta\sin\frac{Dt}{2} + C\sin\theta\cos\frac{Dt}{2}$$

dengan menyamakan dengan Persamaan (22), diperoleh bahwa

$$C\cos\theta = Be^{-\psi t/2}$$
$$C\sin\theta = Ae^{-\psi t/2}$$

sehingga

$$C^2 = \left(B^2 + A^2\right)e^{-\psi t} \Longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}e^{-\psi t/2}$$

dan sudut ψ diperoleh

$$\tan\theta = \frac{A}{B}$$

Jadi, jika diketahui benda bermassa m dengan faktor redaman c, kondisi awal $x(0) = l, x'(0) = m$ maka solusi khusus dari gerak pegas ini adalah

$$x = C\sin\left(\frac{Dt}{2} + \psi\right)$$

dengan

$$A = l, \quad B = \frac{\psi l + 2m}{D}, \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}e^{-\psi t/2}, \quad D = \mathrm{Im}\left(\sqrt{\psi^2 - 4\omega}\right), \quad \omega = \frac{k}{m}, \quad \psi = \frac{c}{m}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

LAMPIRAN II

PROSIDING NASIONAL

SEMIRATA BKS JAMBI 2017

Sertifikat

Diberikan Kepada:

KHOZIN MU`TAMAR

Atas Partisipasinya Sebagai

PEMAKALAH

Pada Kegiatan

SEMIRATA 2017 Bidang MIPA BKS-PTN Barat

"Peran Sains, Teknologi dan Pendidikan MIPA dalam Menopang Sains Park, Teknopark, serta Geopark berbasis Agroindustri dan Lingkungan"

Ratu Convention Center, Jambi 12-14 Mei 2017

Ketua BKS PTN Bidang MIPA

Dr. Ir. Ari M. Iqbalsyah, M.Sc
NIP. 19711010199770310 03

Ketua Panitia

SEMIRATA 2017
BKS-PTN Barat Bidang MIPA
FKIP & FSM UNIVERSITAS JAMBI

Dr. Kamid., M.Si.
NIP. 196609041992031002

SEMIRATA 2017
BIDANG MIPA BKS-PTN
WILAYAH BARAT
UNIVERSITAS JAMBI

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
© Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

SEMIRATA 2017
BADAN KERJASAMA PERGURUAN TINGGI NEGERI
WILAYAH INDONESIA BAGIAN BARAT (BKS-PTN BARAT)
BIDANG MIPA
FKIP DAN FST UNIVERSITAS JAMBI
Kampus Pinang Masak Jl. Raya Jambi-Ma. Bulian KM 15 Mendalo Darat Jambi. Kode Pos. 36361
Telp. 085216140503 (Winda Dwi Kartika), 081394014688 (Muhaimin), 081377551574 (Wawan)
Surel: semirata2017@unja.ac.id, Laman: semirata2017.mipa.unja.ac.id

Jambi, 30 Maret 2017

Nomor : 021/SEMIRATA/MIPA/03/2017
Hal : Undangan Pemakalah pada SEMIRATA BKS PTN Wilayah Barat Tahun 2017

Kepada Yth.
Khozin Mu`tamar, M.Si
di Matematika FMIPA Universitas Riau

Salam hormat,
Berdasarkan hasil seleksi oleh tim Reviewer, kami sampaikan bahwa makalah Saudara dengan judul:
" MODEL PREDATOR-PREY DENGAN POPULASI TERINFEKSI DAN PENYEBARAN INFEKSI MELALUI PREDASI "
Diterima untuk dapat dipresentasikan secara oral pada SEMIRATA BKS PTN Wilayah Barat Bidang MIPA tahun 2017 yang dilaksanakan pada:

Hari, Tanggal : Jumat s.d Minggu, 12 s.d 14 Mei 2017
Pukul : 08.00 s.d 17.00 WIB
Tempat : Ratu Convention Center (RCC) Kota Jambi

Kami ucapkan selamat dan kehadiran Bapak/Ibu/Saudara di tunggu di Sepucuk Jambi Sembilan Lurah.
Demikian Pemberitahuan ini, atas perhatiannya diucapkan terimakasih.

Hormat Kami,
Ketua Panitia

SEMIRATA 2017
BKS-PTN Barat Bidang MIPA
FKIP & FST UNIVERSITAS JAMBI

Dr. Kamid, M. Si
NIP 196609041992031002

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id

BKS PTN BARAT

PROSIDING

SEMIRATA 2017 BIDANG MIPA
BKS-PTN WILAYAH BARAT

Jambi, Ratu Convention Center 12 - 14 Mei 2017

"Peran Sains, Teknologi dan Pendidikan MIPA dalam Menopang Sains Park, Teknopark, Serta Geopark Berbasis Argoindustri dan Lingkungan"

Penerbit: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) bekerja sama dengan Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Universitas Jambi

BUKU 1

MATEMATIKA

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

©Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

PROSIDING SEMIRATA 2017 BIDANG MIPA BKS-PTN WILAYAH BARAT

Editor:
Maison
Feri Tiona Pasaribu
Ahmad Syarkowi
Evitta
Nowfermia
Rosi Widia Asiani
Aulia Ul Millah
Martina Asti Rahayu

Reviewer:
Maison
Evita Anggereini
Haris Effendi

Desain Sampul:
Taufan Dyusanda Putra

ISBN: 978-602-50593-0-8
Penerbit:
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP)
bekerjasama dengan Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Universitas Jambi
Redaksi:
Kampus Unja Mendalo
Jl. Raya Jambi – Ma. Bulian Km. 15, Mendalo Indah
Jambi
Telp./Fax: 0741 - 583453

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

ISBN 978-602-50593-0-8

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, atas karunia yang telah dilimpahkan sehingga kegiatan Seminar dan Rapat Tahunan (SEMIRATA)-BKS PTN Bidang MIPA Wilayah Barat tahun 2017 dapat dilaksanakan secara baik.

Kegiatan SEMIRATA-BKS PTN Bidang MIPA Wilayah Barat tahun 2017 yang dimanatkan kepada Universitas Jambi sebagai penyelenggara dilaksanakan secara gabungan oleh Fakultas Sains dan Teknologi (FST) dan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP). Kegiatan telah dilaksanakan dengan sukses pada tanggal 12-14 Mei 2017 di Ratu Conference Hotel dan Swiss Bellin Hotel Jambi. Salah satu program utama adalah Seminar Nasional Sains dan Pendidikan MIPA dengan tema: "Peran Sains Teknologi dan Pendidikan MIPA dalam Menopang Sainspark, Teknopark serta Geopark berbasis Agroindustri dan Lingkungan".

Sesi pleno seminar di Ratu Conference Center dipaparkan materi oleh dua pembicara utama yaitu akademisi Dr. Ir Yunus Kusumahbrata, M.Sc (Staf Ahli Kementerian ESDM) dan praktisi/birokrat Dr. H. Syahrial, M.P., (Bupati Tajung Jabung Barat Prov. Jambi). Materi yang disajikan berisi topik Pengembangan Geopark, Teknopark dan Sainspark di Indonesia. Selain daripada itu, sesi paralel telah dipresentasikan secara oral lebih dari 600 judul makalah hasil penelitian yang disampaikan dalam 40 ruang seminar secara paralel. Dalam kegiatan komunikasi ilmiah secara langsung ini juga telah dimanfaatkan untuk menjalin jejaring agar lebih bersinergi dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA ke masa mendatang.

Supaya komunikasi ilmiah yang baik ini dapat juga tersampaikan ke komunitas ilmiah lain yang tidak dapat hadir pada kegiatan seminar, panitia memfasilitasi untuk menerbitkan makalah dalam bentuk Prosiding. Panitia juga tetap memberi kesempatan kepada peserta yang akan menerbitkan makalahnya di jurnal ilmiah, sehingga tidak seluruh materi yang disampaikan pada seminar diterbitkan dalam prosiding ini. Dalam proses penerbitan prosiding ini, panitia telah banyak dibantu oleh Tim Reviewer dan Tim Editor yang dikoordinir oleh Drs. Maison, M.Si., Ph.D, yang telah dengan sangat intensif mencurahkan waktu, tenaga dan pikiran untuk melakukan proses *plagiarism check*, review, dan editing. Untuk itu, panitia menyampaikan terima kasih dan penghargaan. Namun, panitia juga menyampaikan permohonan ma'af karena dengan sangat banyaknya makalah yang akan diterbitkan dalam prosiding ini, waktu yang dibutuhkan dalam proses penerbitan prosiding ini cukup lama, dan penerbitan prosiding tidak dilakukan dalam satu buku tetapi dalam empat buku prosiding. Semoga penerbitan prosiding ini selain SEMIRATA-BKS PTN Bidang MIPA Wilayah Barat tahun 2017 bermanfaat bagi para pemakalah dan penulis, juga dapat bermanfaat dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA di Indonesia.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Rektor Universitas Jambi, Dekan FST dan FKIP Universitas Jambi, Ketua Forum Rektor BKS wilayah Barat, Ketua BKS-MIPA Wilayah Barat, panitia dan semua pihak yang ikut menyukseskan acara semirata.

Jambi, 2 Oktober 2017
Ketua Panitia

Dr. Kamid, M.Si

PEMODELAN SUHU PERMUKAAN LAUT MENGGUNAKAN GENERALIZED ADDITIVE MODELS DALAM EFEK WAKTU 325
Shania Ananda, Reza Ariska, Rifa Atul Humaira, Miftahuddin

ANALISIS KORELASI KANONIK UNTUK MENGIDENTIFIKASI FAKTOR-FAKTOR YANG BERPENGARUH TERHADAP DERAJAT KESEHATAN 337
Asep Rusyana, Nurhasanah, dan Restu Deviyanti

PENAKSIR RASIO RATA-RATA POPULASI MENGGUNAKAN STANDAR DEVIASI, KOEFISIEN SKEWNESS, DAN KOEFISIEN KURTOSIS PADA SAMPLING GANDA 349
Rustam Efendi, Firdaus, Haposan Sirait, Marini

DIVISIBILITY PROPERTIES OF THE SUM INVOLVING 357
Baki Swita

PENAKSIR PARAMETER DISTRIBUSI INVERS MAXWELL UKURAN BIAS SAMPEL MENGGUNAKAN METODE BAYESIAN 366
Haposan Sirait Rince Adrianti ,

ANALISIS MODEL DAN ALGORITMA UNTUK MASALAH PEMROGRAMAN STOKASTIK 373
Inda Chasbiyati , Aziskhan

MODEL INTERNET BUNDLING PRICING GENERALIZED MENGGUNAKAN FUNGSI UTILITAS COBB-DOUGLAS DAN QUASI LINIER 378
Fitri Maya Puspita, Maijance Oktarina , Yayan Febrian , Bella Arisha

Multivariate Object Ranking Based On Quantile Method 390
Open Darnius, Indah

MODEL PREDATOR-PREY DENGAN POPULASI TERINFEKSI DAN PENYEBARAN INFEKSI MELALUI PREDASI 396
Khozin Mu'tamar

SISTEM DETEKSI DAN PENGENALAN CITRA OVERLAPPING KOIN DENGAN ALGORITMA CIRCULAR HOUGH TRANSFORMATION (CHT) 403
Zainul Bahri

A NOTE ON k-HYPERGRAPHIC SEQUENCES 411
Muhim Simanihuruk

PENDETEKSIAN OUTLIER PADA REGRESI LOGISTIK DENGAN MENGGUNAKAN TEKNIK TRIMMED MEANS 419
Sigit Sugiarto , Arisman Adnan , Sarimah

KARAKTERISASI BILANGAN PRIMA GAUSSIAN 425
Mahmudi, Syarifah Meurah Yuni

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber: a. pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
2. dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

MODEL PREDATOR-PREY DENGAN POPULASI TERINFEKSI DAN PENYEBARAN INFEKSI MELALUI PREDASI

Khozin Mu'tamar
Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Riau
email: khozin.mutamar@unri.ac.id

ABSTRACT

Predator –prey model is used to analize behaviour of interaction two population which are predator and prey. Basically, this model assume both of predator and prey are healthy. In this article, we develop alternative approach to describe predator-prey model with infected population. Infected population will conduct behaviour between predator and prey population. Stability analysis is done locally using Routh-Hurwitz criterion. In the end of this article, simulation is given to show comparation between numerical solution of nonlinear system with linearized.

Keywords: *Predator-prey model, Routh-Hurwitz criterion, Infected Population*

PENDAHULUAN

Hubungan antar individu merupakan hal alamiah yang selalu terjadi di dunia. Beberapa individu melakukan interaksi untuk mendukung kelangsungan hidup mereka. Interaksi yang dilakukan merupakan wujud mempertahankan kelangsungan hidup berupa memangsa individu dari jenis lain. Beberapa interaksi yang lain dilakukan sebagai wujud penguasaan terhadap suatu wilayah. Hal ini biasanya dilakukan oleh populasi yang memiliki kekuatan lebih dibandingkan populasi lainnya.

Pada suatu wilayah, kadangkala, terdapat dua atau lebih populasi yang saling berinteraksi. Salah satu populasi merupakan pemangsa bagi populasi lainnya. Contoh dalam kehidupan nyata adalah kehidupan ikan Gabus dan ikan Nila dalam suatu kolam. Ikan Gabus yang merupakan ikan predator akan berburu dan memangsa ikan Nila untuk bertahan hidup. Selain itu, kehidupan Kelinci dan Serigala dalam suatu wilayah juga bersifat mangsa-pemangsa. Serigala membutuhkan Kelinci untuk dapat bertahan hidup karena sifat Serigala yang karnivora.

Perilaku hubungan populasi yang bersifat mangsa-pemangsa dapat dianalisa secara matematis. Dalam matematika, perilaku ini dianalisa dengan model yang dikenal dengan Model Predator-Prey. Model ini menganalisa dua buah populasi yang hidup dalam suatu wilayah, dimana satu populasi bersifat pemangsa dan yang lainnya sebagai mangsa. Model yang digunakan berupa sistem persamaan diferensial biasa, yang berfungsi mengamati perubahan jumlah individu di masing-masing populasi setiap waktunya.

Model yang sudah terbentuk terdiri atas dua buah persamaan diferensial biasa nonlinear yang masing-masingnya menggambarkan laju perubahan jumlah populasi mangsa dan pemangsa. Pada pembentukan model ini, diasumsikan bahwa kedua populasi dalam kondisi sehat. Hakikatnya, asumsi ini tidak sepenuhnya benar karena dalam sebuah populasi, ada kemungkinan beberapa individu dalam kondisi sakit. Kondisi individu yang sakit akan mengakibatkan menurunnya kemampuan bertahan hidup alaminya. Selain itu, individu yang sakit lebih mudah untuk diserang oleh pemangsa dan bagi pemangsa akan membuatnya sukar

untuk berburu. Mangsa yang terinfeksi penyakit juga secara langsung akan mempengaruhi kondisi pemangsa karena beberapa penyakit dapat ditularkan melalui makanan.

Beberapa penelitian mengenai model predator-prey dengan melibatkan populasi yang terinfeksi telah dilakukan. Model predator-prey dengan infeksi hanya pada mangsa telah diteliti ada [1,8,11,12,14,15, 17,19,20,21]. Khusus untuk infeksi pada predator telah diteliti pada [4,6,18], sedangkan untuk infeksi yang terjadi di kedua populasi mangsa dan pemangsa telah dikaji dalam [2,3,5,7,9,10,13,16]. Pada [11], model predator prey diterapkan pada pertumbuhan virus pada jaringan komputer. Model infeksi pada mangsa dengan batasan bahwa mangsa tidak bisa berkembang biak dan tumbuh dianalisis pada [1]. [12] meneliti model dengan mempertimbangkan penyebaran infeksi pada mangsa secara bilinier. Konsep susceptible-infectible-susceptible diterapkan pada infeksi mangsa pada [8,14,17] dan pada [8] mengkaji bahwa mangsa yang terinfeksi secara SIS lebih memiliki tingkat kerawanan untuk dipredasi lebih besar. Kombinasi penyebaran infeksi dengan Gower Holling pada pertumbuhan populasi pemangsa dikaji pada [19,21].

Berdasarkan penjabaran di atas, pada paper ini akan dikaji model predator-prey dengan infeksi pada populasi prey. Selanjutnya, populasi prey akan memberi efek kematian bagi predator yang memangsanya. Selanjutnya, paper ini disusun berdasarkan sistematika berikut ini. Perumusan model diberikan setelah bab ini. Analisis kualitatif kestabilan model secara lokal di sekitar titik ekuilibrium diberikan pada bagian tiga. Simulasi numerik diberikan pada bagian empat. Akhirnya, kesimpulan dari paper ini diberikan pada bagian akhir paper ini.

PERUMUSAN MODEL PREDATOR-PREY DENGAN INFEKSI PADA PREY

Misalkan didefinisikan $S(t), X(t), Y(t)$ sebagai jumlah populasi yaitu pemangsa, mangsa sehat, dan mangsa sakit pada suatu wilayah pada waktu t yang diasumsikan membaur secara merata. Hubungan antara keduanya diberikan pada Gambar (1).

Gambar 1. Skema ubungan antara ketiga populasi di wilayah tertutup

Asumsi yang digunakan dalam perumusan model ini adalah

1. Pemangsa akan tumbuh secara logistik dengan *carrying capacity* K
2. Pemangsa akan sakit dan mati ketika berinteraksi dengan mangsa yang sakit, dengan laju α_2.
3. Mangsa saling berinterasi dengan proporsi intensitas penyebaran infeksi sebesar β_2.
4. Hanya mangsa sehat yang bisa tumbuh, dengan laju pertumbuhan proporsional sebesar β_1.
5. Mangsa sakit akan mati dengan laju proporsional sebesar μ dan akan berkurang sebesar α_2.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, rumusan masalah untuk model predator-prey dengan infeksi di populasi dengan skema

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan penelitian atau penulisan artikel atau tinjauan masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id

$$
\begin{aligned}
S' &= S\left(1-\frac{S}{K}\right)+\alpha_1 SX-\alpha_2 SY \\
X' &= \beta_1 X-\alpha_1 SX-\beta_2 XY \qquad (1) \\
Y' &= \beta_2 XY-\alpha_2 SY-\mu Y
\end{aligned}
$$

dengan $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^+$ untuk $i = 1,2$.

Analisis Kualitatif Kestabilan Model

Pertama, sistem ini memiliki enam (6) titik ekuilibrium. Terdapat beberapa titik ekuilibrium yang tidak bergantung pada nilai parameter dari model ini, diantaranya adalah titik ekuilibrium trivial $E_0(0,0,0)$ dan titik ekuilibrium bebas mangsa $E_1(K,0,0)$. Selanjutnya, titik ekuilibrium lain yang bergantung nilai parameter adalah

$$
E_2\left(0,\frac{\mu}{\beta_2},\frac{\beta_1}{\beta_2}\right), E_3\left(S^*, X^*, Y^*\right)
$$

dengan S^*, X^*, Y^* diberikan oleh

$$
\begin{aligned}
S^* &= \frac{K\left(\mu\alpha_1-\alpha_2\beta_1+\beta_2\right)}{\beta_2} \\
X^* &= \frac{K\mu\alpha_1\alpha_2-K\alpha_2^2\beta_1+K\alpha_2\beta_2+\mu\beta_2}{\beta_2^2} \\
Y^* &= \frac{K\mu\alpha_1^2-K\alpha_1\alpha_2\beta_1+K\alpha_1\beta_2+\beta_1\beta_2}{\beta_2^2}
\end{aligned}
$$

Proposisi 1. Titik ekuilibrium trivial E_0 dan bebas mangsa E_1adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Bukti: Matriks Jacobian dari sistem Persamaan (1) dapat dituliskan dengan

$$
A = \begin{pmatrix} 1-\frac{2S}{K}+\alpha_1 X-\alpha_2 X & \alpha_1 S & -\alpha_2 S \\ -\alpha_1 X & \alpha_1 S-\beta_2 Y+\beta_1 & -\beta_2 X \\ -\alpha_2 X & \beta_2 Y & -\alpha_2 S+\beta_2 X-\mu \end{pmatrix}
$$

Substitusikan titik ekuilibrium E_0 akan menghasilkan persamaan karakteristik

$$
\lambda^3-\left(\mu+1+\beta_1\right)\lambda^2-\left(\mu\beta_1+\mu-\beta_1\right)\lambda+\mu\beta_1=0
$$

yang dipenuhi oleh nilai eigen $\lambda_0 = \{1, \beta_1, -\mu\}$. Titik ekuilibrium E_0 tidak stabil karena $1, \beta_1 > 0$. Untuk E_1 dengan proses yang sama, diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$
\begin{aligned}
&\lambda^3-\left(\alpha_1 K-\alpha_2 K-\mu+\beta_1-1\right)\lambda^2 \\
&-\left(K^2\alpha_1\alpha_2-K\mu\alpha_1+K\alpha_2\beta_1+\alpha_1 K-\alpha_2 K+\mu\beta_1-\mu+\beta_1\right)\lambda \\
&-\left(\alpha_2 K+\mu\right)\left(\alpha_1 K+\beta_1\right)=0
\end{aligned}
$$

yang dipenuhi oleh nilai eigen $\lambda_1 = \{-1, K\alpha_1+\beta_1, -K\alpha_2-\mu\}$. Jelas bahwa $K\alpha_1+\beta_1 > 0$ sehingga titik ekuilibrium E_1 juga tidak stabil.

Selanjutnya, oleh karena model melibatkan enam (6) parameter, akan dilakukan penyederhanaan dengan menentukan nilai beberapa parameter. Jika diinginkan untuk menganalisis hubungan antara pemangsa dan mangsa sakit, maka parameter selain α_2, β_2 akan ditentukan nilainya secara spesifik. Misalkan dipilih $K = 1, \mu = 0.01, \beta_1 = 0.8$ dan $\alpha_1 = 0.05$. Titik ekuilibrium E_2 selanjutnya dapat dituliskan menjadi

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tanpa merugikan kepentingan Universitas Riau dan mempertimbangkan kaidah ilmiah, penyusunan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

$$\left\{S=0, X=\frac{0.01}{\beta_2}, Y=\frac{0.8}{\beta_2}\right\}$$

Persamaan karakteristik dari titik ekuilibrium ini adalah

$$\frac{\left(-\beta_2-0.0005+0.8\alpha_2+\lambda\beta_2\right)\left(\lambda^2+0.008\right)}{\beta_2}=0$$

dengan solusinya adalah

$$\left\{0.089443I, -0.089443I, 1-0.8\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\frac{0.0005}{\beta_2}\right\}$$

Kestabilan dari titik ekuilibrium ini ditentukan oleh persamaan $1-0.8\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\frac{0.0005}{\beta_2}$. Bidang kestabilan ditunjukkan pada Gambar (2) berikut ini.

Gambar 2. Daerah kestabilan berdasarkan ketergantungan parameter α_2, β_2.

Daerah abu-abu adalah daerah yang akan menghasilkan kestabilan bagi titik ekuilibrium, sedangkan daerah putih adalah daerah yang membuat titik ekuilibrium ini tidak stabil.

SIMULASI NUMERIK

Bagian ini menyajikan hasil komputasi model dengan menggunakan nilai parameter tertentu untuk melihat perilaku model. Hal pertama yang dilakukan adalah memilih nilai awal di sekitar titik ekuilibrium untuk melihat perilaku kestabilan model di sekitarnya. Untuk titik ekuilibrium E_0, E_1 dan E_2 akan menggunakan data parameter yang sama. Misalkan dipilih $K=1, \mu_a=0.01, \beta_1=0.8$ dan $\alpha_1=0.05$. Selanjutnya, nilai α_2, β_2 dipilih berdasarkan Gambar (2). Misalkan dipilih $\alpha_2=0.2$ dan $\beta_2=0.05$ yang terletak di daerah abu-abu atau daerah stabil. Seluruh simulasi diambil dalam jangka waktu $t \in [0,100]$.

Pada kasus nilai parameter di atas, titik ekuilibrium E_4 tidak termasuk dalam titik ekuilibrium dengan menggunakan data parameter yang digunakan. Hal ini disebabkan, jika substitusikan nilai parameter yang digunakan maka akan diperoleh nilai populasi negatif.

Nilai awal tertentu diperlukan untuk melihat perilaku model ini dalam bentuk bidang fase. Pertama nilai awal akan dipilih sangat dekat dengan E_0 yaitu $E(0)=\{0.05,0.05,0.05\}$. Bidang fase dari nilai awal ini ditunjukkan pada Gambar (3).

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Gambar 3. Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_0.

Gambar (3) menunjukkan bahwa populasi akan menjauhi titik $E_1(0)$ walaupun komposisi awal populasi berada di sekitar titik ekuilibrium E_0.

Nilai awal kedua dipilih di sekitar titik ekuilibrium E_1 yaitu $E(0) = \{1,0.001,0.001\}$ dan bidang fase dari nilai awal ini ditunjukkan pada Gambar (4).

Gambar 4. Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_1.

Nilai awal ketiga dipilih di sekitar titik ekuilibrium $E_2 = \{0,0.2,16\}$ yaitu $E(0) = \{0.001,0.21,16.01\}$. Bidang fase ditunjukkan pada Gambar (5).

Gambar 5. Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_2.

Gambar (5) menujukkan bahwa dari nilai awal $E_2(0)$ sistem bergerak menuju titik E_2. Ketika di titik E_2 populasi akan berkembang secara stabil. Terlihat dari gambar populasi membentuk sebuah lingkaran dikarenakan nilai eigen dari E_2 adalah imajiner murni.

Berikutnya, dipilih parameter pada daerah yang mengakibatkan ketidak stabilan pada titik ekuilibrium E_2. Misalkan dipilih nilai parameter $\alpha_2 = 0.1, \beta_2 = 0.1$. Menggunakan parameter yang baru, diperoleh titik ekuilibrium $E_2 = \{0,0.1,8\}$ dan dipilih nilai awal di sekitar E_2 yaitu $E_2(0) = \{0.1,0.5,10\}$. Ruang fase untuk model ditunjukkan pada Gambar (6). Pada Gambar (6) terlihat bahwa dari populasi awal, sistem bergerak menjauhi titik ekuilibrium E_2 dan tidak pernah mencapai E_2 sepanjang waktu t.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id ©Hak cipta milik Universitas Riau

Gambar 6. Ruang ase model pada persamaan (1) dengan nilai awal di sekitar E_2 dengan parameter yang dipilih sedemikian sehingga sistem tidak stabil.

KESIMPULAN

Model predator-prey dengan infeksi pada prey yang mengakibatkan kematian pada predator telah dikaji dalam paper ini. Secara kualitatif, terdapat empat titik kesetimbangan pada model dimana tiga diantaranya bersifat tidak stabil sedangkan yang lain, kestabilannya sangat tergantung kepada nilai parameter yang dipilih. Hasil numerik juga menunjukkan bahwasanya, perilaku model di sekitar titik kesetimbangan tidak stabil. Hal ini dapat ditunjukkan dari menjauhnya sistem dari titik kesetimbangan dengan pemilihan nilai awal yang cukup dekat.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Riau atas bantuannya sehingga penelitian ini dapat terlaksana.

REFERENSI

G. Arino, A El abdllaoui, J Mikram and J Chattopadhyay, Infection in prey population may act as a biological control in ratio-dependent predator–prey models, Nonlinearity 17 (2004) 1101–1116

A.M. Bate dan Frank M. Hilker, Predator– prey oscillations can shift when diseases become endemic, Journal of Theoretical Biology, 316 (2013) pp. 1–8

S.P. Bera, A. Maiti, G. P. Samanta, A Prey-predator Model with Infection in Both Prey and Predator, Filomat 29:8 (2015), 1753–1767

K.P. Das, A mathematical study of a predator-prey dynamics with disease in predator, ISRN Applied mathematics Vol. 2011 Article ID 807486

S.B. Dash, H. Saini, T.C. Panda, A. Mishra, Predator-Prey Model for Infectious Virtual Machines in IaaS Cloud Environment Based on Lotka-Volterra Equation, Asian Journal of Information Technology, 14(3):84-91, 2015

F.M. Yusof, A.I.B. MD. Ismail dan N.M. Ali, Effect of Predators on the Spread of Hantavirus Infection, Sains Malaysiana 43(7)(2014): 1045–1051

L. Han dan Z. Ma, Four Predator Prey Models with Infectious Diseases, Mathematical and Computer Modelling 34 (2001) 849-858

H.W. Hethcote, W. Wang, L. Han, Zhien Ma, A predator–prey model with infected prey, Theoretical Population Biology 66 (2004) 259 – 268

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Y.H. Hsieh, C.K. Hsiao, Predator–prey model with disease infection in both populations, Mathematical Medicine and Biology (2008) 25, 247 -266, doi:10.1093/imammb/dqn017

A. Hugo, E.S. Massawe and O.D. Makinde, An eco-epidemiological mathematical model with treatment and disease infection in both prey and predator population, Journal of Ecology and the Natural Environment, Vol. 4(10), pp. 266-279, July 2012.

M. Kumar, Bimal Kumar Mishra and T. C. Panda, Predator-Prey Models on Interaction between Computer Worms, Trojan Horse and Antivirus Software Inside a Computer System, International Journal of Security and Its Applications, Vol. 10, No. 1 (2016), pp.1 73-1 90

Md. S. Rahman, Santabrata Chakravarty, A predator-prey model with disease in prey,Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2013, Vol. 18, No. 2, 191–209

S.Z. Rida, M. Khalil, H.A. Hosham, S. Gadellah, predator-prey fractional-order dynamical system with both the populations affected by diseases, Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 5(3S) No. 13, pp. 1-11.

A. Sani, E. Cahyono, Mukhsar, G.A. Rahman, Y.T. Hewindati, F.A.A. Faeldog, F.A. Abdullah, Dynamics of Disease Spread in a Predator-Prey System, Advanced Studies in Biology, vol. 6, 2014, no. 4, 169 – 179

S. Sinha, O.P. Misra a, J. Dhar, Modelling a predator–prey system with infected prey in polluted environment, Applied Mathematical Modelling, 34 (2010) 1861–1872

J. Sooknanan, B. Bhatt, DMG Comission. A modifid predator–prey model for the interaction of police and gangs. R. Soc. open sci. 3: 160083. http://dx.doi.org/10.1098/rsos.160083

K. Sujatha, M. Gunasekaran, Dynamics in a Harvested Prey-Predator Model with Susceptible-Infected-Susceptible (SIS) Epidemic Disease in the Prey, Advances in Applied Mathematical Biosciences. ISSN 2248-9983 Volume 7, Number 1 (2016), pp. 23-31

J. Tewa, R.D. Demasse and S. Bowong, Predator-Prey Model with Prey Harvesting, Holling Response Function of Type III and SIS Disease, Biomath 1 (2012), 1210231, 1–7.

S. Wang, Zhihui Ma, Analysis of an Ecoepidemiological model with prey refuges, Journal of applied mathematics vol. 2012.

S.A. Wuhaib, Y. Abu Hasan, A predator-infected prey model with harvesting of infected prey, ScienceAsia 39S (2013): 37–41

X. Zhou, Jingan Cui, Xiangyun Shi, Xinyu Song, A modified Leslie–Gower predator–prey model with prey infection, J Appl Math Comput (2010) 33: 471–487

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

LAMPIRAN III

JURNAL NASIONAL BER-ISSN

TIDAK TERAKREDITASI

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. X, No. Y, Juni 20xx, pp.1 - 4
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN ADANYA INFEKSI DAN PENGOBATAN PADA POPULASI MANGSA

Khozin Mu'tamar[1], Zulkarnain[1]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Email: khozin.mutamar@unri.ac.id, zulkarnain@unri.ac.id

ABSTRAK

Model *predator-prey* adalah salah satu model yang diperkenalkan dalam perkuliahan matematika. Model ini digunakan untuk menggambarkan interaksi antara dua populasi yang bersifat mangsa dan pemangsa. Namun, pada model *predator-prey* yang dasar selalu diasumsikan bahwa kedua populasi dalam kondisi sehat. Padahal, kondisi pada lingkungan menunjukkan bahwasanya terdapat mangsa dan pemangsa dengan kondisi sakit yang mempengaruhi perilaku untuk bertahan dan berburu makanan. Pada artikel ini, akan dimodelkan sistem yang menunjukkan perilaku *predator-prey* dengan kondisi adanya infeksi penyakit pada populasi mangsa. Selain itu, dipertimbangkan adanya pengobatan yang diberikan pada mangsa untuk mengurangi jumlah infeksi pada populasi mangsa. Analisis kualitatif tentang kestabilan model dilakukan secara lokal dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Pada akhir artikel, diberikan simulasi untuk melihat perilaku model di sekitar titik ekuilibrium dan perbandingan dengan perilaku model nonlinearnya.

Kata Kunci: Predator-prey model, kestabilan Routh-Hurwitz, mangsa terinfeksi, *treatment model*

ABSTRACT

Predator-prey model is basic model that is given in mathematic class. This model is used to describe behaviour two population; that is predator and their prey. This basic model assume that the populations are healthy. However, in real life, some prey may be in ill condition because of some infectious that conduct their behaviour. In this paper, we present an approach to describe behaviour of predator and prey with infectious in prey population. Besides, this model considering about treatment to reduce infected population. Stability analysis of this model is done locally using Routh-Hurwitz criterion. In the end of this paper, some simulation are given to show behaviour model around equilibrium point and compare with nonlinear behaviour.

Keywords: *Predator-prey model, Routh-Hurwitz criterion, infected prey, treatment model*

Pendahuluan

Hubungan antar individu adalah fenomena yang tidak terelakkan di dunia nyata. Beberapa individu berinteraksi untuk menunjang hidup, dengan menjalin relasi dengan individu lain. Interaksi yang seperti ini biasanya bersifat saling menguntungkan. Namun, tidak seluruh antar individu melakukan interaksi yang bersifat seperti ini. Beberapa individu membutuhkan individu lainnya sebagai penunjang hidup. Interaksi yang dilakukan individu seperti ini dilakukan mendukung kelangsungan hidup mereka.

Wujud interaksi yang sifatnya untuk kelangsungan hidup biasanya dilakukan oleh populasi yang sifatnya pemangsa bagi populasi lain. Contoh yang sering ditemui dalam lingkungan adalah perilaku serigala dan kelinci. Serigala yang merupakan hewan karnivora membutuhkan daging untuk bertahan hidup. Oleh karena itu, serigala akan memburu kelinci sebagai sumber makanan untuk bertahan hidup.

Interaksi antar populasi dapat dianalisis dengan menggunakan matematika. Objek yang diamati adalah jumlah kedua populasi yang berkembang setiap waktu. Dalam matematika, telah dikenal dengan model *predator-prey* yang diperkenalkan oleh Lotka dan Voltera pada tahun 1926 [2]. Model ini menganalisis populasi pemangsa dan mangsa di suatu wilayah dengan mempertimbangkan bahwasanya mangsa adalah sumber makanan satu - satunya penunjang kehidupan pemangsa. Interaksi antara mangsa dan pemangsa akan mempengaruhi perkembangan kedua populasi. Model matematika yang digunakan adalah sistem persamaan diferensial biasa, yang berfungsi mengamati perubahan jumlah individu di masing-masing populasi setiap waktunya.

Model *predator-prey* yang dibentuk oleh Lotka dan Voltera mengasumsikan kedua populasi dalam kondisi sehat. Oleh karena kedua populasi dalam kondisi sehat, tidak ada kendala yang menghalangi pemangsa untuk berburu dan mangsa untuk menghindari buruan. Namun, kondisi di lingkungan menunjukkan bahwa adanya

Hak cipta milik Universitas Riau
Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan menyebarkan sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

populasi yang sakit. Kondisi pemangsa yang sakit akan membuat kemampuan berburu menurun sedangkan bagi mangsa membuat kemampuan menghindar berkurang.

Penelitian mengenai model *predator-prey* dengan melibatkan populasi mangsa yang terinfeksi telah banyak dilakukan sebelumnya. Arino et.al [1] meneliti model *predator-prey* dengan infeksi berupa rasio dengan populasi total dan mengasumsikan hanya populasi sehat yang dapat bereproduksi sedangkan mangsa yang sehat tidak bereproduksi dan tidak bisa sembuh. H.W. Hethcote et.al [2] meneliti model *predator-prey* dengan pertumbuhan logistik dan menggabungkan infeksi dengan pola model SIR (*susceptible, infectible, Recovered*). M. Kumar et.al [3] meneliti model *predator-prey* dengan studi kasus pada penyebaran *worm*, *trojan horse* dan antivirus di komputer. Worm yang diasumsikan sebagai pemangsa menginfeksi komputer dengan bantuan interaksi perangkat komputer lainnya yang telah terinfeksi. Md.S. Rahman et.al [4] meneliti model dengan infeksi yang hanya menyebar di populasi mangsa secara bilinear dan mangsa yang terinfeksi tidak mampu untuk sembuh lalu mati. A. Sani dkk [5] meneliti model penyebaran infeksi pada populasi mangsa dengan pola SIS (*susceptible, infectible, susceptible*) dan mengkaji kestabilannya dengan *next generation matrix (NGM)*. S. Sinha dkk [6] memodelkan *predator-prey* dengan pertumbuhan logistik pada mangsa dan infeksi pada mangsa dipengaruhi dari lingkungan dengan pola SIS. K. Sujatha [7] meneliti model *predator-prey* dengan infeksi pola SIS dan mengikutsertakan pemanenan untuk populasi mangsa serta menganalisis kestabilan dengan NGM. S. Wang [8] meneliti model dengan kondisi infeksi dengan tipe fungsi Holling III. S.A. Wuhaib [9] meneliti model dengan infeksi pada mangsa yang melibatkan pemanenan. Populasi mangsa yang terinfeksi mampu untuk sembuh dan menjadi populasi sehat yang dapat terinfeksi kembali. X. Zhou [10] meneliti model *predator-prey* dengan memberikan modifikasi berupa fungsi respon berupa Leslie-Gower atau Holling tanner.

Berdasarkan penjabaran kondisi di atas, pada artikel ini akan dikaji tentang model *predator-prey* dengan infeksi pada populasi mangsa. Kemudian, populasi mangsa akan diberikan pengobatan untuk mengurangi jumlah populasi yang sakit. Pada saat populasi diberi pengobatan, populasi ini dihindarkan dari populasi pemangsa. Pengobatan yang dilakukan di wilayah khusus dengan kepadatan tertentu dan populasi yang telah berhasil diobati tidak kembali dilepas ke lingkungan.

Selanjutnya, artikel ini disusun berdasarkan sistematika berikut ini. Perumusan model diberikan setelah bab ini. Analisis kualitatif kestabilan model secara lokal di sekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz diberikan pada bagian tiga. Simulasi numerik diberikan pada bagian empat. Akhirnya, kesimpulan dari paper ini diberikan pada bagian akhir artikel ini.

Modelling *Predator-Prey* dengan Infeksi dan Pengobatan

Misalkan didefinisikan $x(t), y(t), z(t)$ adalah populasi mangsa pada suatu habitat pada waktu t yang terdiri atas mangsa sehat, mangsa terinfeksi dan mangsa terinfeksi yang masuk daerah treatment. Selanjutnya, didefinisikan $p(t)$ sebagai populasi pemangsa pada habitat yang sama dengan populasi mangsa pada waktu t. Hubungan antara mangsa dan pemangsa pada suatu habitat ini diberikan pada Gambar (1).

Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah

1. Hanya mangsa sehat yang dapat tumbuh. Tanpa adanya pemangsa, mangsa sehat tumbuh secara proporsional sebesar a.
2. Infeksi antar mangsa terjadi akibat interaksi, jumlahnya sebanding dengan hasil kali jumlah kedua populasi dengan konstanta β. Infeksi akan menyebabkan kematian pada populasi terinfeksi secara proporsional sebesar μ.
3. Mangsa yang ditreatment tidak bisa dimangsa oleh pemangsa.
4. Mangsa terinfeksi ditreatment dengan laju proporsional sedangkan populasi infeksi treatment tumbuh secara logistik dengan carrying capasity K. Kegagalan treatment akan mengakibatkan kematian bagi mangsa secara proporsional sebesar b.
5. Mangsa adalah satu-satunya sumber makanan bagi pemangsa sebagai penunjang kehidupan sehingga tidak adanya mangsa akan mengakibatkan kematian pemangsa sebesar μ sedangkan adanya mangsa mengakibatkan pertumbuhan sebanding dengan jumlah populasi keduanya sebesar α_1.
6. Pemangsa yang memangsa mangsa terinfeksi akan mengalami kematian, sebanding dengan jumlah kedua populasi dengan konstanta α_2

Gambar 1. Skema relasi antar populasi mangsa dan pemangsa dalam model

Berdasarkan skema dan asumsi yang digunakan, diperoleh model yang menggambarkan perilaku pemangsa dan mangsa dengan infeksi pada mangsa yaitu

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. X, No. Y, Juni 20xx, pp.1 - 4
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Hak cipta milik Universitas Riau
https://repository.unri.ac.id
Repository University of Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

$$\begin{aligned} x' &= ax - \beta xy - \alpha_1 xp \\ y' &= \beta xy - \alpha_2 yp - \gamma y - \mu y \\ z' &= \gamma y\left(1 - \frac{y}{K}\right) - \mu z \\ p' &= -\mu p + \alpha_1 xp - \alpha_2 yp \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0, z(0) \geq 0, p(0) \geq 0$ dan $a, b, \alpha_i, \beta, \theta_i, \gamma, \mu \in \mathbb{R}^+$.

Analisis Kualitatif Kestabilan Lokal Model

Analisis kestabilan lokal dilakukan di sekitar titik ekuilibrium dari persamaan (1). Ada tiga (3) kondisi yang nantinya menarik untuk diamati, yaitu tidak ada populasi, tidak adanya infeksi pada mangsa dan tidak ada populasi pemangsa. Selanjutnya, titik ekuilibrium dari persamaan (1) diberikan oleh(p, x, y, z)

$$\begin{aligned} E_0 &= \{0, 0, 0, 0\}, \\ E_1 &= \left\{\frac{a}{\alpha_1}, \frac{\mu}{\alpha_1}, 0, 0\right\} \\ E_2 &= \left\{0, \frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{a}{\beta}, \frac{(K\beta - a)\gamma a}{\beta^2 Kc}\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

Titik ekuilibrium E_0 merupakan titik ekuilibrium bebas populasi, E_1 adalah titik ekuilibrium bebas infeksi dan E_2 adalah titik ekuilibrium bebas pemangsa. Kestabilan dari masing titik ekuilibrium ini akan diamati secara lokal menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Proposisi 1. *Titik ekuilibriumbebas populasiE_0 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.*

Bukti.Matriks Jacobian dari persamaan (1) diberikan oleh

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dengan masing masing komponen $a_i, i = 1,2,3,4$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} -\beta y - p\alpha_1 + a & \beta y & 0 & p\alpha_1 \end{pmatrix}^T \\ a_2 &= \begin{pmatrix} -\beta x & \beta x - p\alpha_2 - \gamma - \mu & -\frac{\gamma y}{K} + \left(1 - \frac{y}{K}\right)\gamma & -p\alpha_2 \end{pmatrix}^T \\ a_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}^T \\ a_4 &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 x & -\alpha_2 y & 0 & \alpha_1 x - \alpha_2 y - \mu \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Jika disubstitusikan nilai E_0 pada persamaan (3) akan diperoleh matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium E_0 yaitu

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik dari A_0 adalah

$$(\lambda + \mu)^2 (a - \lambda)(\lambda + \gamma + \mu) = 0$$

Solusi dari persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu \\ a \\ -\gamma - \mu \end{pmatrix}$$

Oleh karena terdapat nilai eigen positif; $a > 0$, maka titik ekuilibrium E_0 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Proposisi 2. *Titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 adalah titik ekuilibrium yang stabil jika $R_0 < 1$ dengan R_0 didefinisikan dalam bentuk*

$$R_0 = \frac{\beta\mu - \mu\alpha_1 - \gamma\alpha_1}{a\alpha_2}$$

Bukti. Jika disubstitusikan nilai E_1 pada persamaan (2) pada persamaan (3) lalu ditentukan persamaan karakteristiknya, akan diperoleh

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + \frac{\left(a\alpha_2 - \beta\mu + c\alpha_1 + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1\right)\lambda^3}{\alpha_1} \\ &+ \frac{\left(ac\alpha_2 + a\mu\alpha_1 - \beta c\mu + c\gamma\alpha_1 + c\mu\alpha_1\right)\lambda^2}{\alpha_1} \\ &+ \frac{a\mu\left(a\alpha_2 - \beta\mu + c\alpha_1 + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1\right)\lambda}{\alpha_1} \\ &+ \frac{ca\mu\left(a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1\right)}{\alpha_1} = 0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan karakteristik dipenuhi oleh

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} -\mu \\ \sqrt{-a\mu} \\ -\sqrt{-a\mu} \\ -\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa kestabilan dari E_1 hanya bergantung kepada $\lambda_{1,4}$ karena nilai ini yang belum bisa dipastikan positif atau negatif. Selanjutnya, jika diinginkan sistem stabil maka dari $\lambda_{1,4}$ haruslah memenuhi kondisi

$$\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} > 0 \tag{4}$$

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Berdasarkan nilai R_0 yang telah didefinisikan, persamaan (4) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\frac{a\alpha_2 - R_0 a\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a\alpha_2}{\alpha_1}(1-R_0) > 0 \qquad (5)$$

Jelas persamaan (5) akan terpenuhi oleh $R_0 < 1$. Jika kondisi pada persamaan (5) telah terpenuhi maka $Re(\lambda_i) \leq 0, i = 1,2,3,4$ sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium E_1 stabil dengan $R_0 < 1$. Sistem ini tidak mungkin stabil asimtotik pada titik ini dikarenakan terdapat nilai eigen kompleks yaitu pada titik $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{a\mu}$.

Proposisi 3. *Titik ekuilibrium bebas pemangsa E_2 stabil lokal untuk sebarang nilai R_0.*

Bukti. Substitusikan nilai E_2 pada persamaan (3) akan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} -\mu \\ \sqrt{-a(\gamma+\mu)} \\ -\sqrt{-a(\gamma+\mu)} \\ \dfrac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta} \end{pmatrix}$$

Kestabilan sistem di sekitar E_2 hanya dipengaruhi oleh nilai eigen keempat $\lambda_{2,4} = \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta}$, yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda_{2,4} = \frac{-a\alpha_2}{\beta}(1 + R_0),$$

yang nilainya akan selalu negatif untuk berapapun nilai R_0.

Simulasi Model

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi dengan mengambil beberapa nilai parameter yang diperlukan dalam model.Pada Tabel 1 diberikan dua nilai parameter untuk digunakan dalam simulasi dimana salah satu bagian nilai parameter akan menghasilkan nilai $R_0 < 1$ sedangkan nilai parameter lainnya akan menghasilkan nilai $R_0 > 1$.

Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi

Parameter	Nilai jenis 1	Nilai jenis 2
a	4	2
b	1	2
α_1	3	1
α_2	3	1
β	1	4
γ	2	2
μ	1	2
K	50	50

Berdasarkan parameter yang dipilih pada jenis pertama, diperoleh titik ekuilibrium yaitu

$$E_0 = \{p = 0, x = 0, 0y =, z = 0\},$$
$$E_1 = \{p = 1.3, x = 0.3, y = 0, z = 0\},$$
$$E_2 = \{p = 0, x = 3, y = 4, z = 7.4\},$$

dan berdasarkan parameter jenis kedua diperoleh titik ekuilibrium

$$E_0 = \{p = 0, x = 0, 0y =, z = 0\},$$
$$E_1 = \{p = 2, x = 2, y = 0, z = 0\},$$
$$E_2 = \{p = 0, x = 1, y = 0.5, z = 0.5\}.$$

Nilai dari parameter jenis pertama pada Tabel 1 akan mengakibatkan nilai $R_0 = -\frac{2}{3} < 1$ sehingga akan menghasilkan sistem yang stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan bebas pemangsa. Sedangkan, untuk nilai parameter jenis kedua akan menghasilkan nilai $R_0 = 2 > 1$ yang berarti bahwa sistem tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas pemangsa.

Gambar 2.Ruang fase model persamaan (1) dengan parameter pada Tabel 1 jenis pertama dengan beberapa nilai awal dengan $t \in [0,100]$

Gambar 2 menunjukkan bahwa populasi dengan nilai awal yang berbeda terus bergerak mengelilingi titik ekuilibrium bebas penyakit. Kurva tidak menyentuh titik ekuilibrium bebas penyakit E_1, hanya bergerak mengelilingi dikarenakan nilai eigen yang imajiner murni. Kurva juga selalu menjauhi titik ekuilibrium bebas populasi E_0 sepanjang waktu t.

Gambar 3.Ruang fase model persamaan (1) dengan parameter pada Tabel 1 jenis keduadengan $t \in [0,1.000]$ dengan nilai awal di sekitar E_1

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. X, No. Y, Juni 20xx, pp.1 - 4
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id Hak cipta milik Universitas Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Berdasarkanproposisi 2 dan proposisi 3, untuk $R > 1$ maka sistem tidak stabil di titik E_1 dan stabil pada titik E_2.Gambar 3 dihasilkan dengan nilai awal di sekitar E_1. Terlihat bahwa perilaku sistem menjauhi nilai awal dan E_1 dan bergerak menuju titik ekuilibrium E_2 dan berputar terus menerus di sekitarnya.

Terakhir, akan dilakukan simulasi dengan menyelesaikan sistem pada persamaan (1) secara numerik dengan menggunakan nilai parameter jenis pertama.Metode yang digunakan dengan metode Euler dengan mengambil nilai awal jauh dari semua titik ekuilibrium. Tujuan yang ingin dicapai adalah melihat bagaimana perilaku solusi numerik terhadap titik ekuilibrium yang ada.

Gambar 4.Perilaku $y(t), z(t)$ untuk $t \in [0,10]$ yang diselesaikan secara numerik.

Gambar 5.Perilaku $x(t), p(t)$ untuk $t \in [0,10.000]$ yang diselesaikan secara numerik.

Hasil simulasi numerik untuk $y(t), z = (t)$ terhadap t ditunjukkan pada Gambar 4. Gambar 4 menunjukkan bahwa untuk t yang sangat singkat diperoleh bahwa $y(t) = z(t) = 0$, yang bersesuaian dengan E_1. Selanjutnya, Gambar 5 menunjukkan bahwa sistem bergerak secara kontinu di suatu titik, yang jika disesuaikan dengan penjelasan dari Gambar 4, dapat diprediksi bahwa sistem stabil di sekitar titik E_1.

Kesimpulan

Model *predator-prey* dengan infeksi dan *treatment*pada populasi mangsa telah dikaji dalam paper ini. Secara kualitatif, paper ini mengkaji perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium bebas populasi, bebas penyakit dan bebas pemangsa. Titik ekuilibrium bebas populasi senantiasa tidak stabil, titik ekuilibrium bebas pemangsa senantiasa stabil tanpa syarat di sekitar titik ekuilibriumnya, dan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil jika $R_0 < 1$. Jika dibandingkan dengan model *predator-prey* yang standar, model dalam paper ini memiliki dinamika yang lebih beragam. Pada model ini juga dimungkinkan populasi mangsa yang sakit untuk hilang karena akibat adanya kegiatan *treatment.* Simulasi yang telah dilakukan secara lokal di sekitar titik ekuilibrium dan yang dilakukan secara numerik menunjukkan keselarasan.Dari berbagai nilai awal yang diambil dalam simulasi, pada waktu tertentu, sistem akan bergerak di sekitar titik ekuilibrium.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Riau atas bantuannya sehingga penelitian ini dapat terlaksana.

Daftar Pustaka

[1]. O. Arino, A El abdllaoui, J Mikram and J Chattopadhyay, *Infection in prey population may act as a biological control in ratio-dependent predator–prey models*, Nonlinearity 17 (2004) 1101–1116

[2]. W.E. Boyce dan R.C. Diprima, *Elementary differential equations and boundary values problems 10th edition*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2012.

[3]. H.W. Hethcote, W. Wang, L. Han, Zhien Ma, *A predator–prey model with infected prey*, Theoretical Population Biology 66 (2004) 259 – 268

[4]. M. Kumar, Bimal Kumar Mishra and T. C. Panda, *Predator-Prey Models on Interaction between Computer Worms, Trojan Horse and Antivirus Software Inside a Computer System*, International Journal of Security and Its Applications, Vol. 10, No. 1 (2016), pp.1 73-1 90

[5]. Md. S. Rahman, Santabrata Chakravarty, *A predator-prey model with disease in prey*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2013, Vol. 18, No. 2, 191–209

[6]. A. Sani, E. Cahyono, Mukhsar, G.A. Rahman, Y.T. Hewindati, F.A.A. Faeldog, F.A. Abdullah, *Dynamics of Disease Spread in a Predator-Prey System*, Advanced Studies in Biology, vol. 6, 2014, no. 4, 169 – 179

[7]. S. Sinha, O.P. Misra a, J. Dhar, *Modelling a predator–prey system with infected prey in*

polluted environment, Applied Mathematical Modelling, 34 (2010) 1861–1872

[8]. K. Sujatha, M. Gunasekaran, *Dynamics in a Harvested Prey-Predator Model with Susceptible-Infected-Susceptible (SIS) Epidemic Disease in the Prey*, Advances in Applied Mathematical Biosciences. ISSN 2248-9983 Volume 7, Number 1 (2016), pp. 23-31

[9]. S. Wang, Zhihui Ma, *Analysis of an Ecoepidemiological model with prey refuges*, Journal of applied mathematics vol. 2012.

[10]. S.A. Wuhaib, Y. Abu Hasan, *A predator-infected prey model with harvesting of infected prey*, ScienceAsia 39S (2013): 37–41

[11]. X. Zhou, Jingan Cui, Xiangyun Shi, Xinyu Song, *A modified Leslie–Gower predator–prey model with prey infection*, J Appl Math Comput (2010) 33: 471–487

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan Universitas Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Universitas Riau.

Repository University of Riau https://repository.unri.ac.id © Hak cipta milik Universitas Riau