Kajian Komputasi Metode Iterasi Bertipe Newton Untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear dengan Orde Konvergensi Sebarang Bilangan Bulat

Aziskhan

Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia
azizkhan.ur@gmail.com

Ayunda Putri

Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia.

Abstrak

Pada artikel ini dibahas kajian komputasi pengkombinasian metode iterasi berorde p dan q dengan p dan q bilangan bulat ke metode newton sehingga diperoleh metode iterasi bertipe Newton berorde $p+q$. Pengkombinasian juga dilakukan untuk metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Pengkombinasian dilakukan untuk metode berorde dua dan berorde tiga, yang menghasilkan metode bertipe Newton berorde lima, metode berorde tiga dan berorde empat yang menghasilkan metode bertipe Newton berorde tujuh dan metode berorde tiga dan berorde lima yang menghasilkan metode bertipe Newton berorde delapan. Pengkombinasian untuk metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear adalah metode orde dua dan orde tiga yang menghasilkan metode berorde lima. Untuk semua formula hasil pengkombinasian dilakukan uji komputasi menggunaan tiga contoh fungsi nonlinear dan dua sistem persamaan nonlinear.

Kata kunci: orde konvergensi, persamaan nonlinear, sistem persamaan nonlinear, akar sederhana, metode Newton.

1 Pendahuluan

Persamaan nonlinear adalah salah satu subjek yang memegang peranan penting dalam bidang ilmu matematika baik analisis maupun terapan. Namun terkadang pembahasan mengenai persamaan nonlinear ini terkendala karena bentuk persamaannya yang rumit dan tidak dapat diselesaikan dengan cara analitik, misalnya persamaan nonlinear dalam bentuk fungsi transenden. Seiring dengan pesatnya riset di bidang analisis numerik maka semakin berkembang pula metode untuk mencari akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi skalar pada interval buka D. Salah satu metode yang umum dikenal adalah metode Newton yang bentuk iterasinya adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

Metode Newton konvergen secara kuadratik untuk tebakan awal yang cukup dekat dengan α [4, h. 282].

Metode Newton merupakan salah satu metode yang cukup banyak dimodifikasi oleh para peneliti. Misalnya modifikasi metode Newton dengan orde konvergensi tiga oleh Potra [6] yang didefinisikan dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f\left(x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

King [2] melakukan modifikasi metode Newton menjadi keluarga satu parameter dengan orde konvergesi empat yang ditunjukkan dengan

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Zhanlav [8] melakukan modifikasi metode Newton menjadi suatu metode berorde konvergensi empat dengan bentuk iterasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n) + f(z_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Metode oleh King [2], Potra [6] dan Zhanlav [8] merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi bilangan bulat.

Pada bagian dua dari artikel ini dibahas metode iterasi bertipe Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan orde konvergensi sebarang bilangan bulat yang merupakan review dari artikel yang ditulis oleh Zhong Li, Chensong Peng, Tianhe Zhou dan Jun Gao [3] dengan judul *"A New Newton-Type Method for Solving Nonlinear Equations with Any Integer Order of Convergence"*. Pada bagian tiga, metode ini diaplikasikan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Kemudian di bagian empat dilakukan perbandingan numerik untuk kasus persamaan nonlinear dan sistem persamaan nonlinear terhadap beberapa fungsi uji.

2 Metode Iterasi Bertipe Newton Untuk Persamaan Nonlinear

Sebelum membahas tentang metode iterasi bertipe Newton untuk persamaan nonlinear akan diperkenalkan dua lema sebagai berikut.

Lema 1 [3] Asumsikan bahwa $f \in C^p(D)$ dan terdapat sebuah akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi skalar pada interval buka D. Jika terdapat sebuah fungsi iterasi $\varphi(x)$ dengan orde konvergensi p (p adalah bilangan bulat) yang menghasilkan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, maka

$$x_{n+1} - \alpha = A(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{p+1}), \quad \text{jika} \quad x_n \in U(\alpha), \tag{3}$$

dengan konstanta $A \neq 0$ dan $U(\alpha)$ adalah lingkungan dari α.

Lema 2 [3] Misalkan bahwa $f \in C^{p+q}(D)$ dan terdapat sebuah akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi skalar pada interval buka D. Misalkan $\psi(x)$ dan $\phi(x)$ adalah dua fungsi iterasi dengan orde konvergensi masing-masing p dan q (p, q bilangan bulat dan $p > q$). Jika hasil dari iterasi ke-$n+1$ dari $\psi(x)$ dan $\phi(x)$ adalah u_{n+1} dan v_{n+1}, maka orde konvergensi dari formula iterasi

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(v_{n+1})} \tag{4}$$

adalah $p + q$.

Teorema 3 berikut ini menjamin bahwa metode iterasi yang didefinisikan pada persamaan (4) berorde sebarang bilangan bulat jika terdapat dua metode berorde p dan q dengan p dan q bilangan bulat.

Teorema 3 [3] Jika terdapat sebuah akar sederhana α dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi skalar pada interval buka D, dan $f(x)$ mempunyai turunan secukupnya pada D maka diperoleh metode iterasi dari persamaan (4) berorde konvergensi sebarang bilangan bulat.

Berikut ini dikonstruksi dua metode iterasi bertipe Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear.

(1) Formula iterasi bertipe Newton orde lima
Berdasarkan Lema 1, Lema 2 dan Teorema 3 maka dengan menggunakan metode Newton pada persamaan (1) dan metode orde tiga Potra [6] pada persamaan (2) kemudian mensubstitusikannya ke persamaan (4) diperoleh metode iterasi orde lima berikut

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}. \end{aligned} \tag{5}$$

(2) Formula iterasi bertipe Newton orde tujuh
Formula iterasi ini dikonstruksi dari metode orde tiga [6] dan metode iterasi bertipe Newton berorde konvergensi empat [8] dan menerapkannya ke persamaan (4) sehingga diperoleh metode iterasi orde tujuh berikut

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ v_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ w_n &= y_n - \frac{f(y_n) + f(v_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'(z_n)}. \end{aligned} \tag{6}$$

(3) Formula iterasi bertipe Newton orde delapan
Formula iterasi ini dikonstruksi dari metode orde tiga [6] dan metode iterasi baru bertipe Newton berorde lima dari persamaan (5) dan menerapkannya ke

persamaan (4) diperoleh metode iterasi orde delapan berikut

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ w_n &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}, \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'(z_n)}. \end{aligned} \tag{7}$$

3 Metode Iterasi Untuk Sistem Persamaan Nonlinear

Metode iterasi untuk sistem persamaan nonlinear pada bagian ini merupakan bentuk aplikasi dari metode iterasi bertipe Newton berorde konvergensi sebarang bilangan bulat untuk persamaan nonlinear. Teorema 4 di bawah ini untuk merupakan bentuk analisis metode iterasi berorde sebarang bilangan bulat untuk sistem persamaan nonlinear.

Teorema 4 [3] Misalkan $F : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ terdiferensial Frechet t-kali pada himpunan konveks D yang memuat akar $\boldsymbol{\alpha}$ dari $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Jika terdapat dua fungsi iterasi $\psi(\mathbf{x})$ dan $\phi(\mathbf{x})$ dengan orde kekonvergenan masing - masing p dan q (p dan q bilangan bulat dan $p > q$). Hasil iterasi ke $n+1$ dari $\psi(\mathbf{x})$ dan $\phi(\mathbf{x})$ adalah $\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}$, maka orde konvergensi formula iterasi

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \big(F'(\mathbf{v}_{n+1})\big)^{-1}\big(F(\mathbf{u}_{n+1})\big) \tag{8}$$

adalah $p+q$.

Berikut ini diaplikasikan metode bertipe Newton yang didefinisikan pada Teorema 4 untuk mengkonstruksi formula iterasi berorde lima untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Metode ini dibentuk dari metode Newton untuk sistem persamaan nonlinear [5, h. 140] dan metode orde tiga Darvishi [1] sehingga diperoleh metode iterasi bertipe Newton untuk sistem persamaan nonlinear berorde lima berikut.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \mathbf{x}_n - \big(F'(\mathbf{x}_n)\big)^{-1}\big(F(\mathbf{x}_n)\big), \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{x}_n - \big(F'(\mathbf{x}_n)\big)^{-1}\big(F(\mathbf{x}_n)+F(\mathbf{v}_n)\big), \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{u}_n - \big(F'(\mathbf{v}_n)\big)^{-1}\big(F(\mathbf{u}_n)\big), \end{aligned} \tag{9}$$

dengan $F^{'}$ adalah matriks Jacobian dari sistem persamaan nonlinear tersebut.

4 Perbandingan Numerik

Pada bagian ini dilakukan perbandingan numerik antara metode iterasi bertipe Newton untuk kasus persamaan nonlinear dan sistem persamaan nonlinear terhadap beberapa metode pembanding, untuk melihat jumlah iterasi yang diperlukan setiap metode untuk mencapai akar pendekatan.

Kasus Persamaan Nonlinear

Berikut ini dilakukan perbandingan numerik antara metode Newton (NM), metode iterasi bertipe Newton orde lima (MOL) metode iterasi bertipe Newton orde tujuh (MOT) dan metode iterasi bertipe Newton orde delapan (MOD) pada untuk menyelesaikan sembilan persamaan nonlinear. Semua komputasi menggunakan program Matlab dengan kriteria pemberhentian iterasi sebagai berikut:

1. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi 1.0×10^{-14}.
2. Jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.

Berdasarkan uji komputasi pada Tabel 1, dapat disimpulkan bahwa MOL, MOT dan MOD lebih unggul dibandingkan dengan NM dalam hal jumlah iterasi yang diperlukan untuk memperoleh akar pendekatan. MOL, MOT dan MOD memerlukan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan NM untuk semua fungsi pada setiap tebakan awal yang berbeda. Selain itu, MOL, MOT dan MOD relatif lebih stabil daripada NM ketika tebakan awal diambil lebih jauh dari akar.

Kasus Sistem Persamaan Nonlinear

Untuk kasus sistem persamaan nonlinear berikut dilakukan simulasi numerik untuk melihat perbandingan dari metode Newton untuk sistem persamaan nonlinear (NMS), metode orde tiga Darvishi (MOTS), dan metode baru orde lima (MOLS) pada persamaan (9) terhadap dua sistem persamaan nonlinear. Kriteria pemberhentian iterasi sama dengan pada kasus persamaan nonlinear.

Contoh 1 Tentukan akar pendekatan dari sistem persamaan nonlinear berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \\
2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 &= 0, \\
3x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

dengan tebakan awal $x_0 = [0.5, 0.5, 0.5]^T$ dan toleransi 1.0×10^{-14}.

Contoh 2 Tentukan akar pendekatan dari sistem persamaan nonlinear berikut:

$$x_1^2 + 3\log x_1 - x_2^2 = 0,$$
$$2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0,$$

dengan tebakan awal $x_0 = [1.5,\ 0]^T$ dan toleransi 1.0×10^{-14}.

Tabel 1: Perbandingan Numerik Metode Newton dan Metode Baru Bertipe Newton

Fungsi	Akar pendekatan	x_0	NM	MOL	MOT	MOD
$f_1(x) = \cos(x) - x$	0.739085133215161	1.7	4	2	2	2
		3.0	6	3	2	2
$f_2(x) = x - 3\log(x)$	1.857183860207835	0.5	7	3	3	3
		1.0	6	3	3	2
$f_3(x) = e^{-x} + \cos(x)$	1.746139530408013	2.0	4	2	2	2
		-3.0	7	3	3	3
$f_4(x) = x - \sin(\cos(x)) + 1$	-0.166039051051030	1.0	5	3	3	2
		-5.0	12	9	3	3
$f_5(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{100}$	0.000000000000000	0.5	4	2	2	2
		-1	2	2	2	2
$f_6(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$	0.641714370872883	1.6	4	2	2	2
		2.5	8	3	2	2
$f_7(x) = (x-1)^3 - 1$	2.000000000000000	10	10	5	4	4
		20	12	6	5	5

Pada Tabel 2 dan Tabel 3, kolom pertama menunjukkan metode yang digunakan, kolom n untuk iterasi, dan kolom x_i dengan $i = 1,\ 2, \cdots$ menyatakan variabel ke-i dari x. Dari simulasi numerik terhadap dua contoh sistem persamaan nonlinear tersebut, secara keseluruhan MOLS lebih cepat meraih akar pendekatan daripada MOTS dan NM dimana untuk kedua contoh tersebut MOLS memerlukan lebih sedikit iterasi daripada MOTS dan NM. Meskipun pada Contoh 1 MOTS dan MOLS sama-sama memerlukan tiga iterasi, akan tetapi MOLS telah mendekati akar yaitu nilai x_2 dan x_3 pada iterasi ke-2. Jadi dapat disimpulkan bahwa MOLS lebih unggul dari MOTS dan NM.

Tabel 2: Hasil Komputasi Beberapa Metode Iterasi Contoh 1

Metode	n	x_1	x_2	x_3
MOLS	0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
	1	0.696448843864469	0.628319947168216	0.342567396978022
	2	0.698288609971492	0.628524297960214	0.342564189689569
	3	0.698288609971514	0.628524297960214	0.342564189689569
MOTS	0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
	1	0.676250000000000	0.623000000000000	0.343250000000000
	2	0.698276805058875	0.628524079591708	0.342564189760303
	3	0.698288609971512	0.628524297960214	0.342564189689570
NM	0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
	1	0.750000000000000	0.650000000000000	0.350000000000000
	2	0.700091575091575	0.628888419273035	0.342582417582418
	3	0.698290931715408	0.628524403430205	0.342564189799643
	4	0.698288609975374	0.628524297960223	0.342564189689569
	5	0.698288609971514	0.628524297960214	0.342564189689569

Tabel 3: Hasil Komputasi Beberapa Metode Iterasi Contoh 2

Metode	n	x_1	x_2
MOLS	0	1.500000000000000	0.000000000000000
	1	1.130272909949347	−1.302845782238588
	2	1.319216001938406	−1.600899173170174
	3	1.319205803329892	−1.603556555187414
MOTS	0	1.500000000000000	0.000000000000000
	1	1.450205653511357	−1.555545744845718
	2	1.320199088981654	−1.604718032960449
	3	1.319205804247141	−1.603556557551876
	4	1.319205803329892	−1.603556555187415
NM	0	1.500000000000000	0.000000000000000
	1	0.806720935135101	−1.795519376576599
	2	1.631383234754615	−2.124070741932193
	3	1.366728041815741	−1.716322788648612
	4	1.320405291443372	−1.608866218515106
	5	1.319205229843023	−1.603564378990663
	6	1.319205803322461	−1.603556555195104
	7	1.319205803329892	−1.603556555187415

Daftar Pustaka

[1] Darvishi, M. T. & A. Barati. 2007. A Third-Order Newton-type Method to Solve Systems of Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 187 : 630–635.

[2] King, R. F. 1973. A Family of Fourth Order methods for Nonlinear Equations. *SIAM Journal on Numerycal Analysis*, 5(10) : 876–879.

[3] Li, Z., C. Peng, T. Zhou, & J. Gao. 2011. A New Newton-type Method for Solving Nonlinear Equations with Any Integer Order of Convergence. *Journal of Computational Information System 7*, 7 : 2371–2378.

[4] Neumaier, A. 2001. *Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Ortega, J. M. 1990. *Numerical Analysis: A Second Course*. SIAM, Philadelphia.

[6] Potra, F. A. & V. Ptak. 1984. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. *Research Notes in Mathematics*, Vol 203. Pitman, Boston.

[7] Traub, J. F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[8] Zhanlav, T., O. Chuluunbaatar, & G. Ankhbayar. 2010. On Newton-type Methods with Fourth and Fifth-Order Convergence. *Bulletin of PFUR series Mathematics Information Science. Physics*, 2 : 29–34.