ISBN: 978-979-792-552-9

Alternatif Menentukan Persamaan Garis Singgung Parabola

Sri Rahayuningsih [1*], Mashadi [2], Sri Gemawati [2]

[1] Mahasiswa PS S-2 Matematika, Guru MAN 1 Pekanbaru
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

[*]n12ng@yahoo.co.id

Abstrak

Persamaan garis singgung parabola biasanya diperolah dengan cara mensubstitusikan persamaan garis pada parabola sehingga diperoleh persamaan kuadrat. Karena garis menyinggung parabola di satu titik, maka nilai diskriminan persamaan kuadrat tersebut sama dengan nol, sehingga diperoleh nilai konstanta. Kemudian substitusikan pada persamaan garis untuk memperoleh persamaan garis singgung parabola. Pada tulisan ini dibahas alternatif menentukan persamaan garis singgungparabola menggunakan sifat optis untuk menentukan persamaan garis singgung yang melalui titik tertentu dan garis tengah sekawan untuk menentukan persamaangaris singgung yang mempunyai gradien tertentu.

Kata kunci: Garis singgung, garis tengah sekawan, parabola, dan sifat optis.

1 Pendahuluan

Irisan kerucut adalahlokusdari semuatitik yang membentuk kurva dua dimensi, yang terbentuk oleh irisan sebuahkerucutdengan sebuah bidang.Empat jenis irisan yang dapat terjadi adalah Lingkaran,Parabola,Elips,danHiperbola [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Cukup banyak yang dapat dibahas dari irisan kerucut, khususnya parabola, diantaranya adalah garis singgung. Garis singgung kurva adalah garis lurus yang hanya menyentuh kurva pada titik tertentu dan memiliki lereng yang sama sebagai fungsi pada saat itu.

Untuk menentukan persamaan garis singgung parabola, pada [1, 5] diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan garis pada parabola sehingga diperoleh persamaan kuadrat. Karena garis menyinggung parabola di satu titik, maka nilai diskriminan persamaan kuadrat tersebut sama dengan nol, sehingga diperoleh nilai konstanta. Kemudian substitusikan pada persamaan garis untuk memperoleh persamaan garis singgung parabola.

Dengan adanya perubahan kurikulum dari KTSP menjadi Kurikulum 2013, maka guru diharapkan agar mampu berinovasi. Untuk itu maka Penulis menggunakan cara

ISBN: 978-979-792-552-9

lain dalam menentukan persamaan garis singgung parabola sebagai alternatif bagi pengajaran. Dalam tulisan ini menggunakan sifat optis dan garis tengah sekawan.

2 Garis Singgung Parabola

Parabola menurut geometri analitikdidefinisikan sebagai tempat kedudukan titik (himpunan titik) yang berjarak sama terhadap suatu titik dan suatu garis tertentu[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Persamaan parabola dengan puncak$(0,0)$ dan fokus $(p,0)$menurut [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] adalah

$$y^2 = 4px. \qquad (1)$$

Jika parabola dengan persamaan (1) digeser sehingga berpuncak di (α,β) dan sumbu simetri sejajar sumbu X maka persamaan parabolanya menjadi

$$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha).$$

Jika parabola dengan persamaan (1) dirotasikan berlawanan arah jarum jam sejauh 90^0 maka akan diperoleh parabola yang terbuka ke atas dengan titik fokus $F(0,p)$ dan garis direktiks ke $g = -p$, dengan persamaan

$$x^2 = 4py.$$

Jika parabola hasil rotasi ditranslasi sejauh (α,β) maka persamaan parabolanya menjadi

$$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta).$$

Kedudukan garis terhadap parabola ada beberapa, yaitu

1. Garis memotong parabola jika garis tersebut memotong parabola di satu titik atau di dua titik, titiknya disebut titik potong.
2. Garis menyinggungjika garis tersebut menyinggung parabola tepat di satu titik, maka garis tersebut dikatakan garis singgung parabola dan titik tersebut adalah titik singgung parabola.

Persamaan Garis Singgung Parabola dengan Gradien m

Kanginan [1] menurunkanpersamaan garis singgung parabola dengan memisalkan titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada parabola dengan persamaan (1) dan garis

$$l : y = mx + n \qquad (2)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (1) diperoleh

$$m^2x^2 + (2mn - 4p)x + n^2 = 0.$$

Garis akan menyinggung parabola jika kedua titik potongnya berimpit atau absis kedua titik potongnya sama. Berarti harus terpenuhi

$$(2mn - 4p)^2 - 4m^2n^2 = 0$$

$$n = \frac{p}{m}.$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Dengan mensubtitusikan nilai $n = \frac{p}{m}$ pada persamaan (2), diperoleh

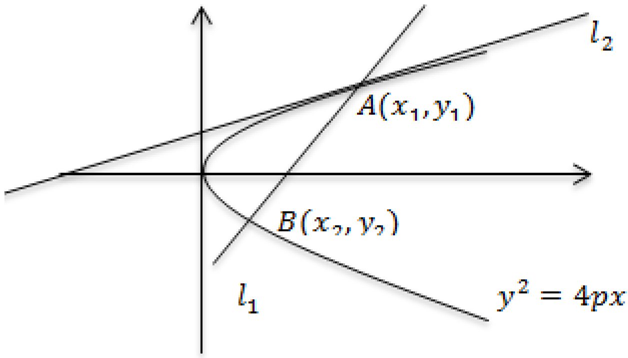
$$y = mx + \frac{p}{m}$$

(3)

yang merupakan persamaan garis singgung parabola dengan gradien m [1, 3, 4, 5, 6].

Persamaan Garis Singgung Parabola di Titik (x_1, y_1)

Parabola pada Gambar 1 mempunyai persamaan $y^2 = 4px$. Garis l_1 memotong parabola di titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ sehingga $y_1^2 = 4px_1$ dan $y_2^2 = 4px_2$.



Gambar 1: Garis singgung parabola $y^2 = 4px$ pada titik (x_1, y_1).

Dengan demikian selisih kuadratnya adalah

$$y_2^2 - y_1^2 = 4p(x_2 - x_1)$$

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4p(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4p}{y_2 + y_1}.$$

Persamaan garis l_1 adalah

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

maka

$$y - y_1 = \frac{4p}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

ISBN: 978-979-792-552-9

Jika titik $B(x_2, y_2)$ digeser sehingga menjadi sangat dekat ke titik $A(x_1, y_1)$ akan didapat $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ sehingga

$$y - y_1 = \frac{4p}{2y_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1).$$

Kedua sisi dikali dengan y_1, diperoleh

$$yy_1 - y_1^{\ 2} = 2px - 2px_1,$$

Karena $y^2 = 4px$ maka

$$yy_1 - y_1^{\ 2} = 2px - 2px_1$$

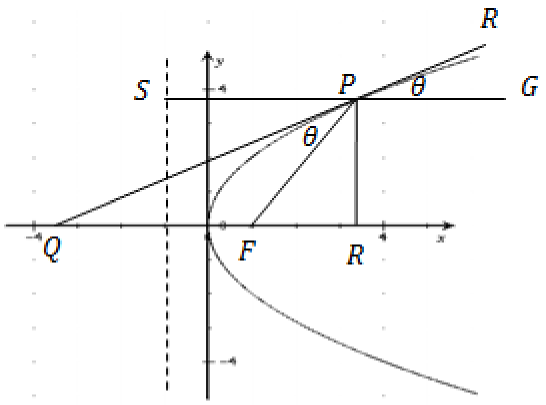
$$yy_1 = 2p(x + x_1). \qquad (4)$$

Persamaan (4) merupakan persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 4px$ menurut [1, 3, 4, 5, 6].

3 Alternatif Persamaan Garis Singgung Parabola

Sifat Optis

Pemantulan cahaya pertama kali diselidiki oleh Snellius. Hasil percobaannya dikenal dengan Hukum Snellius menyatakan bahwa pada cermin datar, sudut yang dibentuk oleh sinar datang sama dengan sudut yang dibentuk oleh sinar yang dipantulkan. Pada cermin cekung yang berbentuk parabola, sinar datang yang sejajar sumbu utama dipantulkan melalui titik fokus.



Gambar 2: Gambar sifat optis parabola

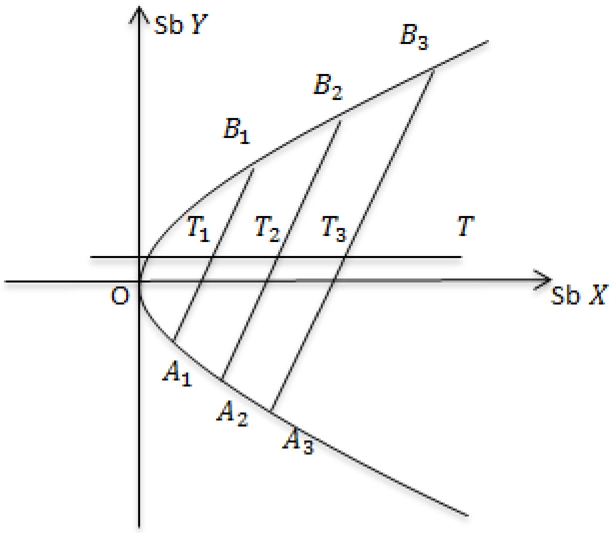
Varberg et. alpada [7] dan Siceloff et. al [4]menjelaskan sifat optis parabola pada Gambar 2, yaitu jika F adalah fokus dan $P(x_1, y_1)$ adalah sebarang titik pada parabola, garis singgung di P pada parabola membuat sudut yang sama dengan FP dan garis GP, yang sejajar dengan sumbu parabola. Karena garis PG sejajar QF dan sudut RPG sehadap dengan sudut PQF maka

$$\angle RPG = \angle PQF = \theta$$

sehingga PQF segitiga sama kaki.

Garis Tengah Sekawan pada Parabola

Garis tengah sekawan pada parabola menurut Siceloff et. al [4, 6] adalah kedudukan titik-titik tengah tali busur yang sejajar. Misalkan titik A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, dan B_3 terletak pada parabola yang membentuk tali busur A_1B_1, A_2B_2, dan A_3B_3.



Gambar 3: Gambar garis tengah sekawan parabola

Dari Gambar 3diketahui bahwa

- Titik T_1, T_2, dan T_3 adalah titik tengah tali busur A_1B_1, A_2B_2, dan A_3B_3
- Garis A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 saling sejajar maka garis T yang melalui T_1, T_2, dan T_3 disebut garis tengah sekawan

Misalkan persamaan tali busur $y = mx + n$, maka

$$x = \frac{y-n}{m} \quad . \qquad (5)$$

Karena tali busur memotong parabola yang mempunyai persamaan (1) maka substitusikan persamaan (5) ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$y^2 = \frac{4py - 4pn}{m}.$$

Kedua sisi dikali dengan m dan ditulis dalam bentuk implisit sebagai

$$my^2 - 4py + 4pn = 0.$$

Karena T_1 titik tengah garis A_1B_1, maka

$$y_t = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{4p}{m}\right) = \frac{2p}{m} \qquad (6)$$

Jadi persamaan (6) merupakan persamaan garis tengah sekawan pada parabola $y^2 = 4px$.

Persamaan Garis Singgung Pada Parabola di Titik $P(x_1, y_1)$ Menggunakan Sifat Optis Parabola

Dari sifat optis parabola seperti pada Gambar 2 maka PQFadalah segitiga sama kaki dengan $QF = PF = PS$, sehingga

$$\begin{aligned} QR &= QF + FR \\ &= (x_1 + p)(x \; - p) = 2x_1. \end{aligned}$$

Karena garis QP menyinggung parabola di titik $P(x_1, y_1)$ maka garis QP merupakan garis singgung parabola dengan gradien

$$m = \frac{y_1}{2x_1}.$$

Sehingga persamaan garis singgungnya menjadi

$$2x_1y - xy_1 = x_1y_1,$$

Karena $y^2 = 4px$ maka $x_1 = \frac{1}{4p}y_1{}^2$ sehingga

$$2\frac{1}{4p}y_1{}^2 y - xy_1 = \frac{1}{4p}y_1{}^3.$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{2p}{y_1}$, sehingga diperoleh

$$y_1y = 2p(x + x_1).$$

Jadi dengan menggunakan sifat optis parabola, diperoleh persamaan garis singgung parabola di titik (x_1, y_1) yang sama dengan persamaan (4).

Persamaan Garis Singgung Pada Parabola Dengan Gradien mMenggunakan Garis Tengah Sekawan

Misalkan garis tengah sekawan (6) memotong parabola (1). Karena garis memotong parabola maka substitusikan persamaan (6) pada persamaan (1), diperoleh

ISBN: 978-979-792-552-9

$$y^2 = 4px$$
$$\left(\frac{2p}{m}\right)^2 = 4px$$
$$\frac{4p^2}{m^2} = 4px$$
$$x = \frac{p}{m^2}.$$

Jadi koordinat titik potong garis tengan sekawan dan parabola adalah $\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$. Jika dari titik potong tersebut ditarik garis yang menyinggung parabola, maka titik $\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$ menjadi titik singgung dengan persamaan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{2p}{m} = m\left(x - \frac{p}{m^2}\right)$$
$$y = mx + \frac{p}{m}.$$

Jadi dengan menggunakan garis tengah sekawan parabola, diperoleh persamaan garis singgung dengan gradien m yang sama dengan persamaan (3).

Kesimpulan

Pada tulisan ini dibahas bagaimana menentukan persamaan garis singgung parabola dengan menggunakan substitusi dan diskriminasi. Sebagai alternatif, persamaan garis singgung parabola di titik (x_1, y_1) dapat diturunkan dengan menggunakan sifat optis parabola. Untuk persamaan garis singgung parabola dengan gradien m dapat diturunkan dengan cara substitusi dan dengan menggunakan garis tengah sekawan.

Daftar Pustaka

[1] Kanginan, M. dan Kustendi, T. 2000. *Matematika 3A untuk SMU Kelas III*, Penerbit Grafindo. Jakarta.

[2] Leung, K. T dan Suen, S. N. *Vectors, Matrices and Geometry*. 1994. Hong Kong University Pres, Hongkong.

[3] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik. Universitas Riau.

[4] Siceloff, L. P., Wentworth, G dan Smith D. E. 1922. *Analitic Geometry*. Ginn and Company, Boston.

[5] Subardjo. Y. 2004. *Matematika 3A untuk SMU Kelas 3 Kurikulum 1994 Semester* 1. Penerbit Bumi Aksara. Jakarta.

[6] Susanto. 2012. *Geometri Analitik Datar*. Bahan Ajar. Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA. FKIP Universitas Jember.

ISBN: 978-979-792-552-9

[7] Varberg, D., Purcell, E. J. dan Rigdon, S. E. 2011, *Kalkulus*, edisi 9, Jilid 2, terjemahan dari *Calculus Ninth Edition*, oleh I Nyoman Susila, Ph.D, Erlangga, Jakarta.

[8] Weisstein, E. W. “Parabola.” From *MathWorld*-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Parabola.html