

Titik Gergonne pada Segiempat Siklik

Hesy Herlinawati ^{1*}, Mashadi ², Hasriati ²

¹ Mahasiswa Program Studi Magister Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Binawidya 28293 Indonesia

*hesy_herlinawati@gmail.com

Abstrak

Titik Gergonne pada umumnya diberlakukan pada sebarang segitiga yang terdiri dari dua bentuk, yaitu satu buah titik Gergonne dalam dan tiga buah titik Gergonne luar. Pada tulisan ini dibahas cara mengkontruksi titik Gergonne pada sebarang segiempat siklik serta beberapa perhitungan panjang sisi-sisi yang terbentuk dari pengkonstruksian lingkaran singgung luar tersebut.

Kata kunci: lingkaran singgung luar, segiempat siklik, titik Gergonne

1 Pendahuluan

Misalkan terdapat sebarang segitiga dengan lingkaran yang berada di dalamnya, lingkaran yang menyinggung ketiga sisinya yang berpusat pada titik pusat lingkaran dalam (*incenter*) [3, 7, 9], sehingga terdapat tiga titik singgung terhadap segitiga, yang mana apabila ditarik garis dari ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung lingkaran dalam terhadap sisi segitiga tersebut maka ketiga garis tersebut akan berpotongan disatu titik (*concurrent*) yang disebut titik Gergonne [2, 4, 5].

Konsep terbentuknya titik Gergonne adalah berasal dari *incircle*. Selanjutnya jika terdapat lingkaran singgung luar segitiga (*excircle*) dengan titik pusat lingkaran singgung luar segitiga (*excenter*) juga dapat dibentuk titik Gergonne diluar segitiga yang berasal dari lingkaran singgung luar segitiga. Pembuktian konkurensi titik Gergonne biasanya digunakan pada sebarang segitiga. Pada artikel ini dibahas konkurensi titik Gergonne pada segiempat siklik.

Pada segiempat siklik $ABCD$, terdapat empat buah lingkaran singgung luarnya. Yaitu lingkaran singgung luar yang berpusat di I_a , lingkaran singgung luar yang berpusat di I_b , lingkaran singgung luar yang berpusat di I_c dan lingkaran singgung luar yang berpusat di I_d . Masing-masing bersinggungan dengan salah satu sisi segiempat. Lingkaran singgung luar segiempat adalah lingkaran yang menyinggung sisi luar pada salah satu sisi segiempat dan perpanjangan dua sisi lainnya

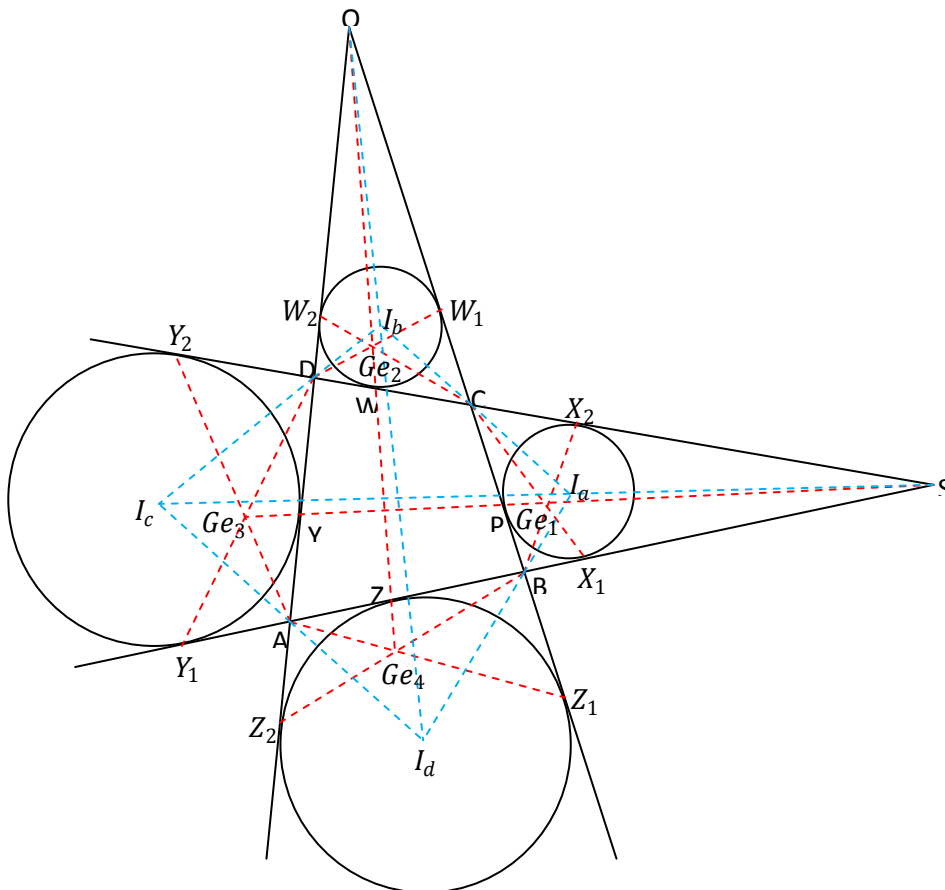
Pada segiempat siklik $ABCD$, lingkaran singgung luar yang berpusat di I_a didapat dari perpanjangan sisi AB dan perpanjangan sisi DC yang bertemu di titik S .



Garis bagi pada sudut luar segiempat (*external bisector*) yaitu $\angle C$ dan $\angle B$ serta garis bagi pada $\angle S$ akan berpotongan disatu titik, yang merupakan pusat lingkaran luar yaitu I_a . Begitu juga untuk lingkaran singgung luar yang berpusat di I_b , lingkaran singgung luar yang berpusat di I_c dan lingkaran singgung luar yang berpusat di I_d .

2 Mengkontruksi Titik Gergonne

Disini akan dibahas mengenai mengkontruksi titik Gergonne. Perhatikan Gambar 1, misalkan sebarang segiempat siklik, dengan perpanjangan masing-masing sisi disetiap sisi segiempat dibentuk lingkaran singgung luar (*excircle*). Sehingga masing-masing lingkaran menyinggung di titik P, W, Y dan Z . Hubungkan tiap sudut ke titik singgung di hadapannya, maka ketiga garis tersebut akan konkuren dan konkurensi ini yang disebut dengan titik Gergonne.



Gambar 1: Segiempat ABCD mempunyai empat titik Gergonne

3 Konkurensi Titik Gergonne

Konkurensi titik Gergonne dapat dibuktikan dengan berbagai cara. Dalam artikel ini dibuktikan dengan Teorema Ceva [1, 7, 10]. Pada Gambar 1, titik Gergonne dapat

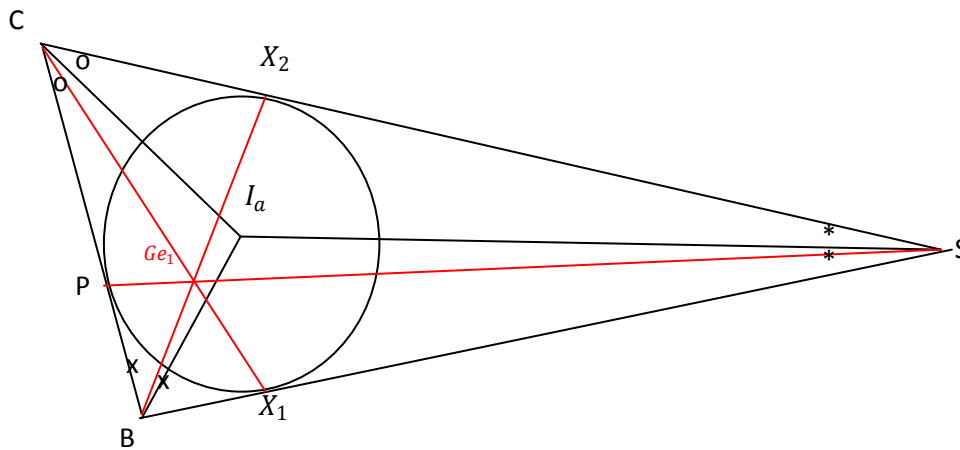


dilihat menjadi dua bentuk. Yaitu titik Gergonne dalam pada segitiga dan titik Gergonne luar pada segitiga. Untuk titik Gergonne dalam pada segitiga dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva kasus I (konkurensi titik berada di dalam segitiga).

Teorema 1 (Teorema Gergonne Dalam) Di dalam segitiga garis yang dibentuk dari titik-titik puncak ΔBCS yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi di hadapannya adalah konkuren.

Bukti: Dari Gambar 2, pandang ΔBCS , akan ditunjukkan PS , CX_1 dan BX_2 konkuren di Ge_1 jika dan hanya jika

$$\frac{BX_1}{X_1S} \cdot \frac{SX_2}{X_2C} \cdot \frac{CP}{PB} = 1 \tag{1}$$



Gambar 2: Titik Gergonne dalam ΔBCS

(\Rightarrow) Misalkan ketiga garis PS , CX_1 dan BX_2 konkuren di Ge_1 , akan ditunjukkan persamaan (1) berlaku. Pada Gambar 2, perhatikan ΔBCX_1 dan ΔCX_1S dengan masing-masing alasnya BX_1 dan X_1S .

$$\begin{aligned} \frac{BX_1}{X_1S} &= \frac{L\Delta BCX_1}{L\Delta CX_1S} = \frac{L\Delta BGe_1X_1}{L\Delta Ge_1X_1S} \\ &= \frac{L\Delta BCX_1 - L\Delta BGe_1X_1}{L\Delta CX_1S - L\Delta Ge_1X_1S} \\ &= \frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta CGe_1S} \end{aligned}$$

Perhatikan ΔBX_2S dan ΔBCX_2 dengan masing-masing alasnya SX_2 dan CX_2 .

$$\begin{aligned} \frac{SX_2}{CX_2} &= \frac{L\Delta BX_2S}{L\Delta BCX_2} = \frac{L\Delta Ge_1X_2S}{L\Delta CGe_1X_2S} \\ &= \frac{L\Delta BX_2S - L\Delta Ge_1X_2S}{L\Delta BCX_2 - L\Delta CGe_1X_2S} \end{aligned}$$



$$= \frac{L\Delta BGe_1S}{L\Delta BCGe_1}$$

Perhatikan ΔCPS dan ΔBPS dengan masing-masing alasnya CP dan BP .

$$\begin{aligned} \frac{CP}{BP} &= \frac{L\Delta CPS}{L\Delta BPS} = \frac{L\Delta CPGe_1}{L\Delta BGe_1P} \\ &= \frac{L\Delta CPS - L\Delta CPGe_1}{L\Delta BPS - L\Delta BGe_1P} \\ &= \frac{L\Delta CGe_1S}{L\Delta BGe_1S} \end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{BX_1}{X_1S} \cdot \frac{SX_2}{X_2C} \cdot \frac{CP}{PB} = \frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta CGe_1S} \cdot \frac{L\Delta BGe_1S}{L\Delta BCGe_1} \cdot \frac{L\Delta CGe_1S}{L\Delta BGe_1S} = 1.$$

(\Leftarrow) Untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (1), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis PS , CX_1 dan BX_2 konkuren. Untuk itu misalkan BX_2 dan SP berpotongan dititik Ge_1 , selanjutnya buat garis CGe_1 dan perpanjang sehingga memotong garis BS , katakan titik potongnya adalah X_1' , berdasarkan hipotesis maka berlaku

$$\begin{aligned} \frac{BX_1'}{X_1'S} \cdot \frac{SX_2}{X_2C} \cdot \frac{CP}{PB} &= 1 \\ \frac{BX_1'}{X_1'S} &= \frac{X_2C}{SX_2} \cdot \frac{PB}{CP} \\ \frac{BX_1'}{X_1'S} &= \frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta SGe_1X_1} \cdot \frac{L\Delta SGe_1X_1}{L\Delta CGe_1S} \\ \frac{BX_1'}{X_1'S} &= \frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta CGe_1S} \\ \frac{BX_1'}{X_1'S} &= \frac{BX_1}{X_1S} \end{aligned}$$

karena $X_1' = X_1$ dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari titik sudut C yang memotong garis BX_2 dan SP tepat di Ge_1 yaitu garis CX_1 . Jadi garis PS , CX_1 dan BX_2 konkuren di Ge_1 . ■

Dengan menggunakan cara yang sama akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari Ge_2 (lihat Gambar 1).

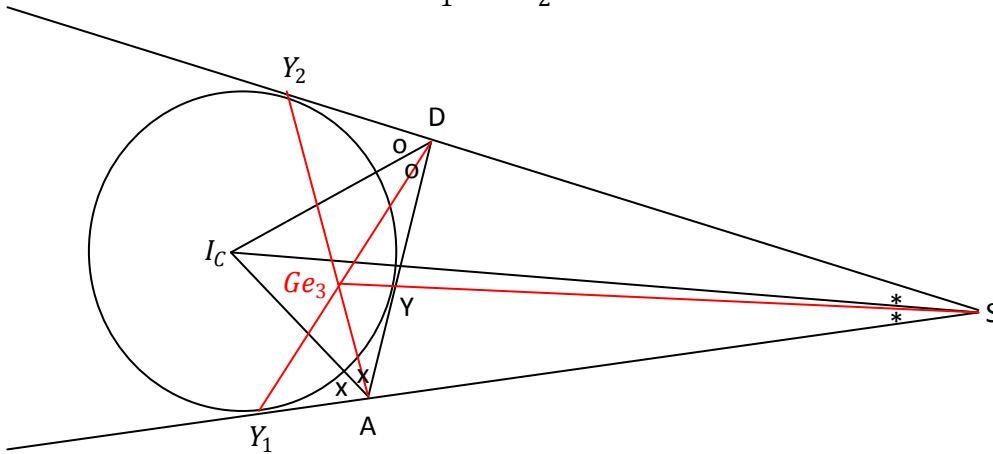
Selanjutnya jika terdapat lingkaran singgung luar segitiga (*excircle*) dengan titik pusat lingkaran singgung luar segitiga (*excenter*) juga dapat dibentuk titik Gergonne di luar segitiga yang berasal dari lingkaran singgung luar segitiga. Konkurensi titik Gergonne luar pada segitiga dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva kasus 2 (konkurensi titik berada di luar segitiga).



Teorema 2 (Teorema Gergonne Luar) Pada segitiga ΔADS garis yang dibentuk dari titik-titik singgung lingkaran luar segitiga ΔADS terhadap sudut segitiga dihadapannya maka ketiga garis tersebut adalah konkuren.

Bukti: Dari Gambar 3, pandang ΔADS , akan ditunjukkan SGe_3 , DY_1 dan AY_2 konkuren di Ge_3 jika dan hanya jika :

$$\frac{DY}{AY} \cdot \frac{AY_1}{Y_1S} \cdot \frac{SY_2}{Y_2D} = 1 \tag{2}$$



Gambar 3: Titik Gergonne luar ΔADS

(\Rightarrow) Misalkan ketiga garis SGe_3 , DY_1 dan AY_2 konkuren di Ge_3 , akan ditunjukkan persamaan (2) berlaku. Pada Gambar 3, perhatikan ΔDSY dan ΔASY dengan masing-masing alasnya DY dan AY .

$$\begin{aligned} \frac{DY}{AY} &= \frac{L\Delta DSY}{L\Delta ASY} = \frac{L\Delta DGe_3Y}{L\Delta AGe_3Y} \\ &= \frac{L\Delta DSY + L\Delta DGe_3Y_2}{L\Delta ASY + L\Delta AGe_3Y} \\ &= \frac{L\Delta DGe_3S}{L\Delta AGe_3S} \end{aligned}$$

Perhatikan ΔADY_1 dan ΔDY_1S dengan masing-masing alasnya AY_1 dan Y_1S .

$$\begin{aligned} \frac{AY_1}{Y_1S} &= \frac{L\Delta ADY_1}{L\Delta DY_1S} = \frac{L\Delta DY_1S}{L\Delta Ge_3Y_1S} \\ &= \frac{L\Delta ADY_1 - L\Delta DY_1S}{L\Delta ADS - L\Delta Ge_3Y_1S} \\ &= \frac{L\Delta ADGe_3}{L\Delta DGe_3S} \end{aligned}$$

Perhatikan ΔASY_2 dan ΔADY_2 dengan masing-masing alasnya SY_2 dan DY_2 .

$$\frac{SY_2}{DY_2} = \frac{L\Delta ASY_2}{L\Delta ADY_2} = \frac{L\Delta Ge_3SY_2}{L\Delta DGe_3Y_2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{L\Delta ASY_2 - L\Delta Ge_3SY_2}{L\Delta ADY_2 - L\Delta DGe_3Y_2} \\
 &= \frac{L\Delta AGE_3S}{L\Delta ADGe_3} ,
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{DY}{AY} \cdot \frac{AY_1}{Y_1S} \cdot \frac{SY_2}{Y_2D} = \frac{L\Delta DGe_3S}{L\Delta AGE_3S} \cdot \frac{L\Delta ADGe_3}{L\Delta DGe_3S} \cdot \frac{L\Delta AGE_3S}{L\Delta ADGe_3} = 1.$$

(\Leftarrow) untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (2), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis SGe_3 , DY_1 dan AY_2 konkuren. Untuk itu misalkan SGe_3 dan AD berpotongan dititik Y' , berdasarkan hipotesis maka berlaku

$$\begin{aligned}
 \frac{DY'}{AY'} \cdot \frac{AY_1}{Y_1S} \cdot \frac{SY_2}{Y_2D} &= 1 \\
 \frac{DY'}{AY'} &= \frac{Y_1S}{AY_1} \cdot \frac{Y_2D}{SY_2} \\
 \frac{DY'}{AY'} &= \frac{L\Delta DGe_3S}{L\Delta ADGe_3} \cdot \frac{L\Delta ADGe_3}{L\Delta AGE_3S} \\
 \frac{DY'}{AY'} &= \frac{L\Delta DGe_3S}{L\Delta AGE_3S} \\
 \frac{DY'}{AY'} &= \frac{DY}{AY} .
 \end{aligned}$$

Karena $Y' = Y$ maka garis SGe_3 , DY_1 dan AY_2 konkuren di Ge_3 . ■

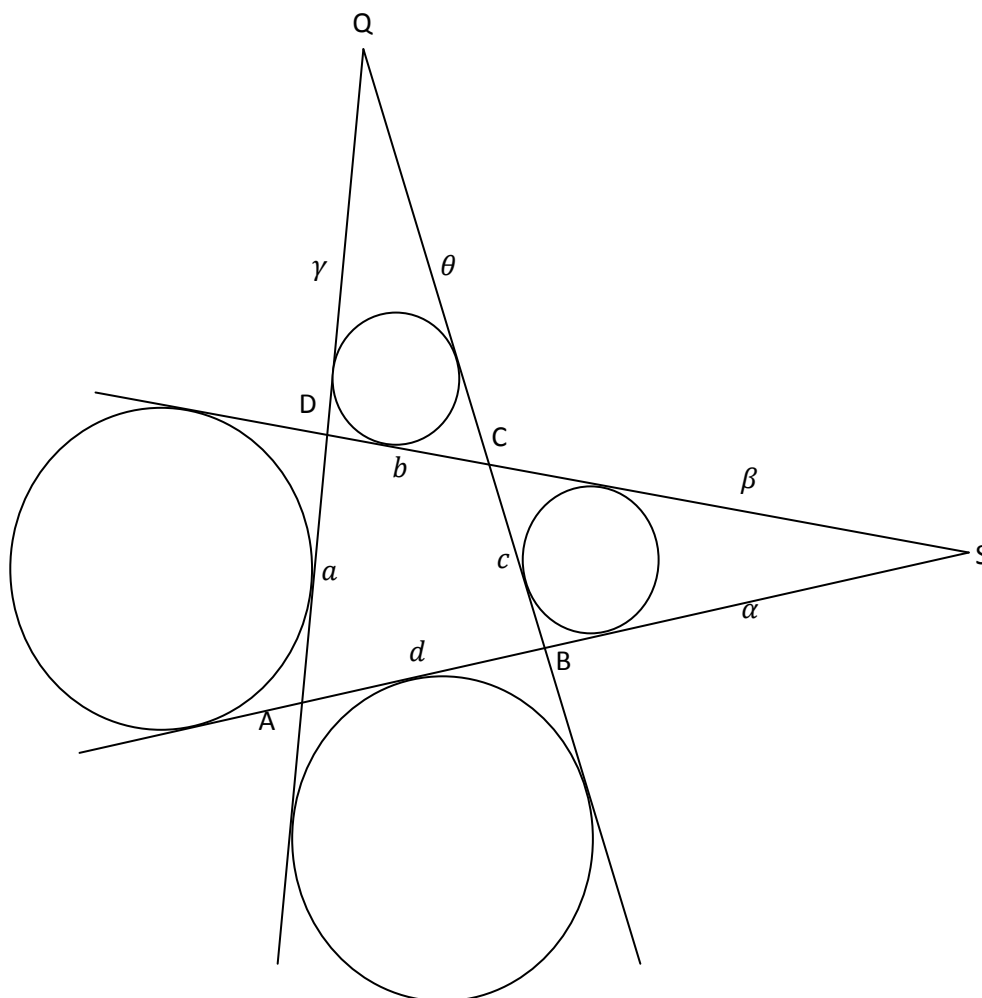
Dengan menggunakan cara yang sama akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari Ge_4 .

4 Panjang Sisi Baru

Pada segiempat siklik $ABCD$, jika tiap sisi diperpanjang maka akan ada sisi yang bertemu disatu titik, sehingga terbentuklah beberapa sisi baru. Selanjutnya akan dibahas cara menghitung panjang sisi-sisi baru tersebut berdasarkan panjang sisi segiempat konveks. Misalkan segiempat sebarang dengan panjang sisi yang diketahui, yaitu $AD = a$, $DC = b$, $BC = c$ dan $AB = d$.

Pada Gambar 4, tidak ada sisi segiempat yang sejajar. Keempat sisi berbeda panjang antara satu dengan yang lainnya. Perpanjang sisi AB dan DC , karena salah satu sisi lebih pendek dari sisi yang didepannya maka perpanjangan garis tersebut akan berpotongan disatu titik. Namakan titik perpotongannya adalah titik S , dan misalkan panjang $BS = \alpha$ dan panjang $CS = \beta$. Perpanjang sisi AD dan BC . Maka perpanjangan garis tersebut akan berpotongan di satu titik. Namakan titik perpotongannya adalah titik Q , dan misalkan panjang $DQ = \gamma$ dan panjang $CQ = \theta$.





Gambar 4: Segiempat $ABCD$ dengan perpanjangan sisi AB , DC , AD dan BC

Pada segiempat $ABCD$ dan $\triangle BCS$ akan diperoleh

$$\angle DAB + \angle DCB = 180^0 \quad (3)$$

$$\angle DCB + \angle BCS = 180^0 \quad (4)$$

Kemudian dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$\angle DAB = \angle BCS \quad (5)$$

dengan

$$\angle DAB = \angle DAS \quad (6)$$

Kemudian pandang segiempat $ABCD$ dan $\triangle BCS$, akan diperoleh

$$\angle CDA + \angle ABC = 180^0 \quad (7)$$

$$\angle ABC + \angle SBC = 180^0 \quad (8)$$

Maka dari persamaan (7) dan (8) diperoleh

$$\angle CDA = \angle SBC \quad (9)$$

dengan



$$\angle CDA = \angle SDA, \tag{10}$$

sehingga dari persamaan (5) dan (10) dan dengan kesebangunan [8] sudut-sudut, diperoleh

$$\Delta ADS = \Delta BCS \tag{11}$$

Akibatnya

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{d+\alpha}{\beta} = \frac{b+\beta}{\alpha} \tag{12}$$

Dengan mengambil dua persamaan dari persamaan (12)

$$\frac{a}{c} = \frac{d+\alpha}{\beta}$$

$$a\beta = c(d+\alpha)$$

$$\beta = \frac{c}{a}(d+\alpha)$$

$$\beta = \frac{cd+c\alpha}{a} \tag{13}$$

Selanjutnya dengan mengambil dua persamaan lainnya dari persamaan (12)

$$\frac{a}{c} = \frac{b+\beta}{\alpha}$$

$$a\alpha = c(b+\beta)$$

$$a\alpha = cb+c\beta \tag{14}$$

Substitusikan persamaan (13) ke persamaan (14) diperoleh

$$a\alpha = cb + c\left(\frac{cd+c\alpha}{a}\right)$$

$$a^2\alpha = abc + c^2d + c^2\alpha$$

$$a^2\alpha - c^2\alpha = abc + c^2d$$

$$\alpha(a^2 - c^2) = abc + c^2d$$

$$\alpha = \frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}, \tag{15}$$

sehingga panjang $BS = \alpha = \frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}$. Setelah memperoleh nilai α , maka substitusikan persamaan (15) ke persamaan (13)

$$\beta = \frac{cd+c\alpha}{a}$$

$$a\beta = cd+c\alpha$$

$$a\beta = cd + c\left(\frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}\right)$$

$$a\beta = \left(\frac{a^2cd - c^3d + abc^2 + c^3d}{a^2-c^2}\right)$$

$$\beta = \frac{acd+bc^2}{a^2-c^2}, \tag{16}$$

sehingga panjang $CS = \beta = \frac{acd+bc^2}{a^2-c^2}$.



Dari pembahasan di atas didapatlah panjang sisi $BS = \alpha = \frac{abc + c^2 d}{a^2 - c^2}$ dan $CS = \beta = \frac{acd + bc^2}{a^2 - c^2}$. Ini berlaku untuk nilai $a > c$ dan $d > b$, tetapi jika sebaliknya $a < c$ dan $d < b$ maka nilai α dan β akan menjadi negatif. Hal ini tidak mungkin, karena panjang sisi tidak mungkin negatif. Oleh karena itu maka diambil nilai mutlaknya. Sehingga panjang sisi α dan β menjadi $BS = \alpha = \frac{abc + c^2 d}{|a^2 - c^2|}$ dan $CS = \beta = \frac{acd + bc^2}{|a^2 - c^2|}$.

Dengan menggunakan cara yang sama maka akan didapat nilai γ dan θ .

Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa titik Gergonne tidak hanya terdapat pada segitiga, tapi juga terdapat pada segiempat siklik. Konkurensi titik Gergonne dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva, sedangkan untuk mencari panjang sisi baru yang didapat dari perpanjangan segiempat siklik bisa digunakan kesebangunan.

Daftar Pustaka

- [1] H. S. M. Coxeter dan S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C, 1967.
- [2] T. Desi, M. Natsir dan Hasriati. *Konkurensi Titik Gergonne*. Skripsi, Universitas Riau, Pekanbaru.
- [3] F. L. Down Jr. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company. INC., Reading, 1964.
- [4] Gogeometry.com/center/Gergonne-point-theorem-html-ipad-nexus.htm, diakses pada 16 Oktober 2014, pk. 02.15 PM.
- [5] http://gogeometry.com/geometry/p682_triangle_Gergonne_points_excircle_tangency_point_concurrent.htm, diakses pada 16 Oktober 2014, pk. 02.15.
- [6] M. Josefsson, More Characterizations of Tangential Quadrilaterals. *Forum Geometricorum*, 11 (2011), 65-82.
- [7] Mashadi, 2012, *Geometri*, Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.
- [8] W. Simangunsong dan Sukino, *Matematika Untuk SMP Kelas IX*, Erlangga, Jakarta, 2006.
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Incircle_and_excircles_of_a_triangle, diakses 10 Agustus 2014, pk. 04.37 PM.
- [10] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Departement of Mathematics Florida Atlantic University, Summer, 2001.

