ISBN: 978-979-792-552-9

Sifat-sifat Fungsi Karakteristik dari Sebaran Geometrik

Dodi Devianto

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Andalas
Kampus Limau Manis, Padang 25163, Sumatera Barat, Indonesia

Abstrak

Fungsi karakteristik dari suatu sebaran dapat ditentukan melalui definisi $\phi(t) = E[\exp(itX)]$ dimana i adalah unit imajiner, t adalah bilangan real dan X peubah acaknya. Fungsi karakteristik dari sebaran geometrik dapat diperoleh yaitu $\phi(t) = (1-p)/(1-p\exp[it])$ dimana $0 < p < 1$. Sifat-sifat yang diformulasikan untuk fungsi karakteristik dari sebaran geometrik dalam tulisan ini dikarakterisasi melalui proposisi yang menjelaskan eksistensi, kekontinuan seragam dan keterbagian tak hingganya.

Kata kunci: fungsi karakteristik, sebaran geometrik, kekontinuan seragam, keterbagian tak hingga

1 Pendahuluan

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang paling sering digunakan sebagai rujukan dalam teori peluang dan statistika. Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X didefiniskan sebagai

$$\phi(t) = E[\exp(itX)]$$

dimana $\exp(itX) = \sin tX + i \sin tX$, t adalah bilangan real dan i adalah unit imajiner. Peranan fungsi karakteristik dalam memberikan sifat-sifat suatu sebaran memiliki kesamaan dengan fungsi pembangkit momen, akan tetapi fungsi pembangkit momen hanya terbatas pada ruang riil saja dan tidak semua sebaran dapat ditentukan fungsi pembangkit momennya. Perbedaan ini menjadikan fungsi karakteristik menjadi lebih istimewa dimana fungsi karakteristik yang bergerak dalam ruang kompleks dapat memberikan arahan baru yang lebih komprehensif dalam memberikan sifat-sifat suatu sebaran.

Selain keistimewaannya yang bergerak dalam bidang kompleks fungsi karakteristik selalu ada untuk setiap sebaran, hal ini dapat dipastikan melalui

$$|\phi(t)| = \left|\int \exp(itx)\, dF(x)\right| \le 1$$

ISBN: 978-979-792-552-9

untuk setiap peubah acak X dengan fungsi sebaran $F(x)$. Eksistensi fungsi karakteristik ini menghasilkan kajian-kajian penting dalam memberikan sifat-sifat sebaran baik sebaran kontinu maupun sebaran diskret.

Sebaran geometrik sebagai salah satu sebaran diskrit memainkan peranan yang penting dalam teori peluang. Misalkan X adalah peubah acak geometrik dengan ekpektasi $p/(1-p)$ untuk $0<p<1$. Berdasarkan definisi dari fungsi karakteristik dan eksistensinya, maka fungsi karakteristik dari sebaran geometrik ini dapat ditentukan. Pada kertas kerja ini akan diberikan secara lebih jelas penurunan fungsi karakteristik dari sebaran geometrik dan sekaligus dibentuk sifat-sifatnya yang disajikan dalam beberapa teorema dan proposisi.

2 Terminologi Dasar Fungsi Karakteristik

Pada bagian ini diberikan secara rinci definisi dan eksistensi fungsi karakteristik. Definisi dan proposisi yang disajikan berikut dirujuk melalui Lukacs [1] dan Chung [3]. Sedangkan terminologi teori peluang yang digunakan untuk menentukan fungsi karakteristik yang ditentukan berdasarkan peubah acak dan sebarannya dirujuk berdasarkan Bain dan Marx [2] maupun Laha dan Rohatgi [4].

Definisi 1. Jika X suatu peubah acak dengan fungsi sebaran $F(x)$, maka fungsi karakteristik $\phi(t)$ dari peubah acak X didefinisikan sebagai

$$\phi(t) = E[\exp(itX)] = \int \exp(itx)\, dF(x)$$

dimana $t \in R$ dan $i = \sqrt{-1}$.

Proposisi 2. Fungsi karakteristik ada untuk setiap sebarang sebaran.

Bukti: Misalkan X adalah sebarang peubah acak dengan fungsi sebaran $F(x)$. Perhatikan bahwa dengan menggunakan definisi fungsi karakteristik dapat diperoleh

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= \left| \int \exp(itx)\, dF(x) \right| \\ &\le \int |\exp(itx)|\, dF(x) \\ &= \int dF(x) = 1. \end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa fungsi karakteristik selalu ada untuk setiap sebarang sebaran. ■

Definisi berikut ini memberikan terminologi keterbagian tak hingga suatu sebaran dan keterbagian tak hingga fungsi karakteristik yang merujuk pada Lukacs [1] dan Chung [3].

Definisi 3. Suatu fungsi sebaran F dikatakan terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat suatu fungsi sebaran F_n sedemikian sehingga F adalah konvolusi n-kali dari F_n, yaitu $F = F_n * \ldots * F_n$ (n kali).

Berdasarkan definisi keterbagian tak hingga suatu sebaran, maka dapat pula dinyatakan kerterbagian tak hingga berdasarkan fungsi karakteristik. Suatu fungsi sebaran F dengan fungsi karakteristik ϕ adalah terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat fungsi karakteristik ϕ_n sedemikian sehingga $\phi(t) = (\phi_n(t))^n$ untuk setiap t.

3 Fungsi Karakteristik dari Sebaran Geometrik

Suatu peubah acak yang menyatakan jumlah percobaan untuk mendapatkan sukses ataupun gagal yang pertama kali disebut sebagai peubah acak untuk sebaran geometrik. Berdasarkan referensi yang dituliskan oleh Bain dan Marx [2] maupun Laha dan Rohatgi [4] sebaran geometrik dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4. Misalkan X adalah peubah acak dari sebaran geometrik, maka fungsi peluangnya didefinisikan sebagai

$$\Pr(X = n) = (1 - p)\, p^n$$

dimana p adalah peluang "gagal" dan n suatu bilangan bulat positif.

Berdasarkan definisi dari sebaran geometrik maka dapat diperoleh ekspektasi dan variannya sebagai berikut

$$\mu = E[X] = p/(1-p)$$

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = p/(1-p)^2 .$$

Teorema 5. Fungsi karakteristik dari peubah acak X yang mempunyai sebaran geometrik adalah

$$\phi(t) = \frac{1-p}{1-p\exp[it]}$$

Bukti: Perhatikan bahwa dengan menggunakan definisi fungsi karakteristik dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp[itn](1-p)p^n \\ &= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} (p\exp[it])^n \\ &= \frac{1-p}{1-p\exp[it]}\end{aligned}$$

untuk $|p\exp[it]|<1$. ■

Proposisi 6. Fungsi karakteristik dari sebaran geometrik pada saat $t=0$ adalah $\phi(0)=1$.

Bukti: Proposisi ini dengan mudah dapat ditunjukkan dengan memberikan nilai $t=0$ pada fungsi karakteristik dari sebaran geometrik. ■

Proposisi 7. Fungsi karakteristik dari sebaran geometrik adalah kontinu seragam.

Bukti: Kekontinuan seragam fungsi karakteristik dari sebaran geometri dapat ditunjukkan dengan cara bahwa untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga

$$|\phi(s)-\phi(t)| = \left|\frac{1-p}{1-p\exp[is]} - \frac{1-p}{1-p\exp[it]}\right| \quad \text{untuk } |s-t|<\delta$$

dimana δ hanya bergantung pada ε. Selanjutnya dengan mendefinisikan suatu fungs ψ yang bergantung kepada peubah acak X yaitu

$$\psi(X=n) = \sum_{k=2}^{\infty}\left((isn)^k - (itn)^k\right)$$

maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned}|\phi(s)-\phi(t)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\exp(isn)(1-p)p^n - \sum_{n=0}^{\infty}\exp(itn)(1-p)p^n\right| \\ &= (s-t)\left|\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)p^n\psi(X=n)\right|,\end{aligned}$$

sehingga untuk $|s-t|$ yang sangat kecil yaitu $|s-t|\to 0$ maka dapat dinyatakan bahwa $|\phi(s)-\phi(t)|\to 0$. Hal ini menunjukkan bahwa δ hanya bergantung pada ε dimana $|\phi(s)-\phi(t)|<\varepsilon$ untuk $|s-t|<\delta$. Hal ini menegaskan bahwa fungsi karakteristik dari sebaran geometrik adalah kontinu seragam. ■

Selanjutnya dengan menggunakan definisi keterbagian tak hingga akan diberikan pula sifat keterbagian tak hingga fungsi karakteristik dari sebaran geometrik.

Proposisi 8 Fungsi karakteristik dari sebaran geometrik adalah terbagi tak hingga.

Bukti: Perhatikan kembali sebaran geometrik yang didefinisikan dalam bentuk $\Pr(X=n)=(1-p)\,p^n$ dimana p adalah peluang "*gagal*" untuk n suatu bilangan bulat positif. Sebaran geometrik ini mempunyai fungsi karakteristik

$$\phi(t)=\frac{1-p}{1-p\ \exp[it]}=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n}(\exp[itn]-1)\right].$$

Fungsi karakteristik ini berasal dari sebaran terbagi tak hingga karena dapat ditentukan suatu fungsi karakteristik

$$\phi_n(t)=\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{n}(\exp[ikt]-1)\right]$$
$$=\left(\frac{1-p}{1-p\exp[it]}\right)^{\frac{1}{n}}$$

yang merupakan fungsi karakteristik dari suatu generalisasi sebaran binomial negatif dengan fungsi peluang

$$\Pr(X_n=r)=v(v+1)\ldots(v+r-1)\frac{p^r}{r!}(1-p)^v$$

dimana $r=0,1,2,\ldots$ dan $v=1/n$ untuk setiap bilangan bulat positif n serta $0<p<1$. Sehingga dapat dinyatakan bahwa $\phi(t)=(\phi_n(t))^n$ untuk setiap n. ■

Daftar Pustaka

[1] Lukacs, E. 1987. *Characteristic Function*. Second edition. Oxford University Press, Oxford.

[2] Bain, L. J. and Max. E. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. Duxbury Press, California.

[3] Chung, K. L. 2001. *A Course in Probability Theory*. Third Edition. Academy Press, San Diego.

[4] Laha, R. G. and V. K. Rohatgi. 1979. *Probability Theory*. John Wiley dan Sons, New York.