SOLUSI ALTERNATIF PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Asli Sirait, M. Natsir, Rolan Pane
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
email: aslisirait@gmail.com

ABSTRAK

Pada makalah ini akan ditunjukkan penyelesaian sistem persamaan diferensial $x' = Ax$ *diformulasikan oleh persamaan* $x(t) = e^{At}x_o = Pe^{At}P^{-1}x_o = c_1v_1e^{\lambda t_1} + ,,,, + c_nv_ne^{\lambda_n t}$, *dengan menentukan nilai* (v_1 , v_2 , ..., v_n) *yang merupakan eigenvektor yang berkoresponden dengan eigen value* λ *dari matriks A .Matriks modal P =* (v_1 , v_2 , ... , v_n) , *dipenuhi oleh transformasi bentuk kanonik Jordan* $P^{-1}AP = J$, *Untuk nilai eigen berbeda* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$ *penyelesaian* $x' = Ax$ *diberikan oleh* $x(t) = e^{At}x_o = \sum_{k=0}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} x_o$ *dimana* $Z_o = \prod_{j=1, j\neq k} \frac{(A - \lambda I_{nj}\}}{\lambda_k - \lambda_j}$ *dan* $e^{At} = \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t}$ *Beberapa metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan* $x' = Ax$ *antara lain metode Silvester dan metode langsung .*

Kata kunci : eksponensial matriks, metode Silvester , metode langsung .

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial yang memuat turunan fungsi satu variabel muncul hampir disetiap cabang matematika , suatu fenomena yang mengekspresikan setiap situasi fisik yang berhubungan dengan kecepatan perubahan satu variabel terhadap variabel lainnya akan menuju ke suatu persamaan diferensial , Sebagai ilustrasi tentang kecepatan perubahan y terhadap x yang sebanding dengan y diformulasikan dalam bentuk persamaan $\frac{dy}{dx} = y$, yang menghasilkan penyelesaian $y = C\,e^x$, untuk sembarang konstanta C .

Bentuk umum persamaan differensial linier adalah $x' = Ax$ atau $x'(t) = Ax(t)$ dengan $x(t) = e^{At}x_o = Pe^{At}P^{-1}x_o = c_1v_1e^{\lambda t_1} + ,,,, + c_nv_ne^{\lambda_n t}$ berupa n-vektor dan A matriks konstan berukuran $n \times n$ dengan $x(0) = x_0$.

Solusi umum dari persamaan differensial $x'(t) = Ax(t)$ adalah $x(t) = e^{At}x_0$, dimana e^{At} adalah matriks eksponensial yang diekspresikan melalui perluasan fungsi matriks

Eksponensial matriks merupakan deret dari fungsi eksponensial yang konstantanya diganti menjadi matriks A berukuran $n \times n$, sehingga terbentuklah deret matriks A berukuran $n \times n$. Suatu deret matriks dapat diperluas berdasarkan. Teorema Cayley-Hamilton yang menguraikan polynomial nilai eigen dari suatu matriks A $n \times n$ kedalam bentuk polinomial matriks A_{nxn} .

Penelitian ini menelusuri lebih mendalam tentang beberapa metode penyelesaian persamaan $x' = Ax$ yaitu Metode Sylvester's dan metode langsung .

METODOLOGI

Penelitian ini berbentuk studi literatur dengfan menelusuri beberapa buku teks dan journal terkait untuk menganalisa lebih lanjut tentang penyelesaian persamaan $x' = Ax$ dengan metode Sylvester's , metode Putzer's dan metode langsung dengan pendekatan dan langkah-langkah berikut :

1. Tentukan nilaieigen λ_1 , λ_2 , …. , λ_n dari matriks A yang diketahui .
2. Formulasikan $x(t) = e^{At} x_o = \sum_{k=0}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} x_o$ dimana $Z_o = \prod_{j=1, j\neq k} \frac{(A - \lambda I_{nj}\}}{\lambda_k - \lambda_j}$

   dan $e^{At} = \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t}$ [Metode Sylvester 's]
3. Rumuskan $x(t) = [\, I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k \,] e^{\lambda t} x_o$ [Metode Langsung]

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelusuran literature tentang materi yang berkaitan dengan eksponen matriks memberikan informasi yang diperlukan dalam menganalisa perumusan dari eksponen matriks baik dari segi penelaahan nilai eigen dari matriks A tersebut maupun tinjauan tentang solusi dari sistem persamaan diferensial linier yang dibangun oleh A_{nxn} sebagaii matriks koefisien sistem linier tersebut .

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi sebelumnya dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value λ_1, λ_2, λ_3, …….., λ_n yang diformulasikan dalam bentuk :

$$F(A) = \frac{(A - \lambda I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} F(\lambda_1\} + \frac{(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} F(\lambda_2) \text{ , untuk matriks } A_{2x2}$$

$$F(A) = \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} F(\lambda_1) + \frac{(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} F(\lambda_2) + \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} F(\lambda_3) \quad (1)$$

untuk matriks A_{3x3}

A. Nilai Eigen dan Teorema Cayley-Hamilton

Dibagian ini dijelaskan pengertian nilai eigen dan vektor eigen untuk menjelaskan teorema Cayley-Hamilton.

- <u>Definisi 1 [4].</u>

Skalar λ disebut nilai eigen, bila $AX=\lambda x$ untuk $x \neq 0$ dengan matriks A $n \times n$ dan X adalah vektor eigen. Selanjutnya dapat dibentuk$(\lambda I - A)X = 0$ dan $\det(\lambda I - A) = 0$, dperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$

- <u>Definisi 2 [5].</u>

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A ordo $n \times n$,maka dapat dibentuk polinomial nilai eigen $P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$

(2)

- Teorema 1

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigennya. Dan Jika polynomial nilai eigen matriks A : $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \lambda^n$ Maka diperoleh

$$\boldsymbol{P(\lambda) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + A^n = 0} \quad \textbf{(3)}$$

B. Solusi Sistem Persamaan Differensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk sistem persamaan differensial linear homogen dengan koefisien konstan dirumuskan :

$$\begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ \vdots \\ x_n^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

dengan titik awal,

$$\begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_1''(0) \\ \vdots \\ x_1'^{n}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2' \\ \vdots \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n(0) \\ x_n'(0) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Secara singkat persamaan (4) dan (5) dapat ditulis sbb:

$X'(t) \quad = AX(t)$ (6)

dengan nilai awal, $X(0) \;= x_0$

(7)

Solusi umum persamaan (6) dinyatakan sebagai

$$x(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t) \;= a_1 e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + a_n e^{\lambda_n t} \tag{8}$$

Selanjutnya asumsikan persamaan (8) adalah solusi persamaan linier homogen orde-*n* dengan koefisien konstan, yaitu :

$$x^{(n)} + e_{n-1}x^{n-1} + \cdots + e_1 x^1 + e_0 x = 0 \tag{9}$$

dengan syarat , $x_k^{(k-1)} = 1$ dan $x_k^{(i)}(0) = 0$, untuk $i \neq k-1$, $0 \le i \le n-1$

Dari persamaan (9) dapat diketahui terdapat *n* solusi eksak dan ditulis [2] ,

$$S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\} \tag{10}$$

persamaan (10) adalah suatu basis pada fungsi turunan vektor

Oleh karena itu , dari persamaan (10) dapat dibentuk matriks yang non singular :

$$B_t = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_1^{(n-1)}(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(t) & \varphi_n'(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Suatu bentuk eksponensial matriks adalah sebuah solusi khusus dari sistem persamaan linier homogen pada teorema dibawah ini.

- Teorema 2 Jika *A* matriks konstan $n \times n$ konstan dengan polynomial karakteristik $P(\lambda)$, maka eksponensial matriksnya adalah:

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{(n-1)} \tag{12}$$

dengan,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = B_0^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

B_0 adalah matriks persamaan (10) untuk $t = 0$ dan $S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ merupakan basis solusi sistem persamaan differensial homogen yang persamaan karakteristiknya adalah persamaan karakteristik dari matriks A dengan $p(\lambda) = 0$.

Penelusuran Literature tentang materi yang berjkaitan dengan eksponen matriks memberikan informasi yang diperlukan dalam menganalisa perumusan dari eksponen matriks baik dari segi penelaahan nilai eigen dari matriks A tersebut maupun tinjauan tentang solusi dari sistem persamaan diferensial linier yang dibangun oleh A_{nxn} sebagai matriks koefisien sistem linier tersebut .

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi sebelumnya dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value λ_1, λ_2, λ_3, …….., λ_n yang diformulasikan dalam bentuk :

- $e^{At} = \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t}$ dan $x(t) = e^{At} x_o = \sum_{k=0}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} x_o$ dimana $Z_o = \prod_{j=1, j\neq k} \frac{(A - \lambda I_{nj}\}}{\lambda_k - \lambda_j}$

Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada dua metode untuk mendapatkan hasil eksponen matriks persegi berikut ,

Tentukanlah e^A , Jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cara (A) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = |A - \lambda I| = 0$$

$$= \left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$= \left|\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + (1-\lambda) + 3(1-\lambda) = 0$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 14 - 16 + 8\lambda + (1-\lambda) - 3 - 3\lambda = 0$$
$$= (2 - 3\lambda + \lambda^2)(-1-\lambda) + 4\lambda - 4 = 0$$

$$= -2 - 2\lambda + 3\lambda + 3\lambda^{2} - \lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda - 4 = 0$$
$$= -\lambda^{3} + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$
$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$= (\lambda - 1)\ (\lambda + 2)\lambda - 3) = 0$$

Maka nilai Eigennya :

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = 3$

$$e^{At} = \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{t} + \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_2 - \lambda_3)\ (\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-2t} + \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)\ (\lambda_3 - \lambda_2)} e^{3t}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}}{(1+3)(1-3)} e^{t} + \frac{\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}}{(-2-3)(-2-1)} e^{-2t} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{(3-1)(3+2)} e^{3t}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 12 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}}{-6} e^{t} + \frac{\begin{bmatrix} 5 & 5 & -15 \\ -5 & -5 & 15 \\ -5 & -5 & 15 \end{bmatrix}}{15} e^{-2t} + \frac{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}}{(3-1)(3+2)} e^{3t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/2 \\ -2/3 & 4/3 & -2 \\ 1/6 & 1/3 & -1/2 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6\,.e^{t} & -1/3.e^{t} & 1/2.e^{t} \\ -2/3.e^{t} & 4/3.e^{t} & -2.e^{t} \\ 1/6.e^{t} & 1/3.e^{t} & -1/2.e^{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3.e^{-2t} & 1/3.e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -1/3.e^{-2t} & -1/3.e^{-2t} & e^{-2t} \\ -1/3.e^{-2t} & -1/3.e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1/2.e^{3t} & 0 & 1/2.e^{3t} \\ e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ 1/2.e^{3t} & 0 & 1/2.e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{t} + e^{-2t} + e^{3t} \\ \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

Cara (B) :

$$S = \{e^{t}, e^{-2t}, e^{3t}\}$$

$$B_t = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} & e^{t} \\ e^{-2t} & -2e^{-t} & 4e^{-2t} \\ e^{3t} & 3e^{3t} & 9e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & {}^{1}/_{5} & -{}^{1}/_{5} \\ {}^{1}/_{6} & -{}^{4}/_{15} & {}^{1}/_{10} \\ -{}^{1}/_{6} & {}^{1}/_{15} & {}^{1}/_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \end{bmatrix} = B_0^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & {}^1/_5 & -{}^1/_5 \\ {}^1/_6 & -{}^4/_{15} & {}^1/_{10} \\ -{}^1/_6 & {}^1/_{15} & {}^1/_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t + {}^1/_5\, e^{-2t} - {}^1/_5\, e^{3t} \\ {}^1/_6\, e^t - {}^4/_{15}\, e^{-2t} + {}^1/_{10}\, e^{3t} \\ -{}^1/_6\, e^t + {}^1/_{15}\, e^{-2t} + {}^1/_{10}\, e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = x_1^{(1)} I + x_2^{(t)} A + x_3^{(t)} A^2$$

$$= \left[e^t + \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{3t}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left[\frac{1}{6}e^t - \frac{4}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t}\right] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$+ \left[-\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} e^t + \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t + \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t + \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^t - \frac{4}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} & -\frac{1}{6}e^t + \frac{4}{15}e^{-2t} - \frac{1}{10}e^{3t} & \frac{4}{6}e^t - \frac{16}{15}e^{-2t} + \frac{4}{10}e^{3t} \\ \frac{3}{6}e^t - \frac{12}{15}e^{-2t} + \frac{3}{10}e^{3t} & \frac{2}{6}e^t + \frac{8}{15}e^{-2t} - \frac{2}{10}e^{3t} & -\frac{1}{6}e^t + \frac{4}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} \\ \frac{2}{6}e^t - \frac{8}{15}e^{-2t} + \frac{2}{10}e^{3t} & \frac{1}{6}e^t - \frac{4}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} & -\frac{1}{6}e^t + \frac{4}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -e^t + \frac{6}{15}e^{-2t} + \frac{6}{10}e^{3t} & -\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} & -\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} \\ -\frac{7}{6}e^t + \frac{7}{15}e^{-2t} + \frac{7}{10}e^{3t} & 0 & -\frac{11}{6}e^t + \frac{11}{15}e^{-2t} + \frac{11}{10}e^{3t} \\ -\frac{3}{6}e^t - \frac{3}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t} & -\frac{1}{6}e^t - \frac{1}{15}e^{-2t} - \frac{1}{10}e^{3t} & -\frac{8}{6}e^t + \frac{8}{15}e^{-2t} + \frac{8}{10}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^t - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} + e^{3t} \\ -\frac{1}{6}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^t + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

Jadi dapat disimpulkan dengan menggunakan dua cara A dan B diatas menghasilkan e^{At} yang sama.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{t} + e^{-2t} + e^{3t} \\ \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

- Sebagai ilustrasi tambahan untuk solusi sistem $x^! = Ax$ dapat dilihat pada contoh berikut Selesaikan persamaan $x^! = Ax$, dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $x_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Diperoleh $c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. menghasilkan $\lambda = \{-1 , -2\}$

Maka $Z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$; $Z_1 x_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

$Z_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $Z_2 x_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Sehingga penyelesaian dari persamaan $x' = Ax$ adalah

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} Z_k e^{\lambda_k t} x_o = e^{-t} Z_1 x_o + e^{-2t} Z_2 x_o = e^{-t}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + e^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Jika dibandingkan dengan cara biasa , dari nilaieigen $\lambda = \{-1 , -2\}$ diperoleh matriks P yang dibentuk oleh eigenvektor $[v_1 , v_2]$,

sehingga $P = [v_1 , v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} x_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$,

diperoleh hubungan $Z_1 x_o = c_1 v_1$ dan $Z_2 x_o = c_2 v_2$ Jadi solusi persamaan

$$x(t) = Pe^{\Lambda t} P^{-1} x_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Untuk metode langsung , solusi persamaan $x^! = Ax$ adalah $x(t) = e^{At} x_o = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda It} x_o$
$= e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} x_o$

$$= [I + (A - \lambda I)t + (A - \lambda I)^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots]\ e^{\lambda t} x_o$$

$$x(t) = [I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k] e^{\lambda t} x_o$$

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian dalam bentuk penelusuran penyelesaian persamaan $x^! = Ax$ dapat ditarik beberapa kesimpulan :

1. Dengan menggunakan Metode Sylvester's diperoleh perumusan yang lebih efiisien

2. Dengan menggunakan Metode langsung diperoleh hasil eksak dengan menggunakan definisi e^{At}

3. Dengan membandingkan metode Sylvester's dan metode Langsung terdapat hubungan
   $Z_1 x_o = c_1 v_1$ dan $Z_2 x_o = c_2 v_2$

DAFTAR PUSTAKA

Aston,H,& C. Rorres , 1984 , *Elementary Linear Algebra with Applications* , J, Wiley & Sons , New York

Coddington , E,A , & Levinson , 1955 , *Theory of Ordinary Differential Equations* . Mc Graw- Hill , New York .

Jack,L.G.1991.*Matrix theory with application.* Mc Graw Hill,New York

Liz, E. 1998., *A Note on the matrix exponential. SIAM Rev*., *40* : 700–702

Leonard, I.E.1996., The matrix exponential. *SIAM Rev*., *38* : 507–512.

Piere N,V. Tu , 1994 , *Dynamical Systems* , Springer Verlag , New York .