Ketaksamaan Nilai Singular Pada Products Hadamard

Asli Sirait, Rolan Pane, M.Natsir

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Abstrak. Misalkan $M_{m,n}$ merupakan ruang dari matriks kompleks mxn , dimana $A , B \in M_{n,n}$ dan merupakan product Hadamard (atau Schur) dari A dan B oleh AoB, Untuk $A \in M_{n,n}$ maka $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \sigma_3(A) \geq \ldots \geq \sigma_{\min[m,n]}(A)$ merupakan nilai singular terurut dan menyusut terurut menurut baris Euclidean dan panjang kolom dari A terhadap $r_1(A) \geq r_2(A) \geq \ldots r_m(A) \geq$ dan $c_1(A) \geq c_2(A) \geq \ldots c_n(A)$ akan ditunjukkan bahwa untuk suatu $A,B \in M_{n,n}$ berlaku hubungan

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} \min\{ c_i(A), r_i(A)\} \sigma_i(B)$$, dengan k = 1 , 2 , ….. , min { m,n }

Kata kunci: nilai singular , products Hadamard

1. Pendahuluan

Misalkan $M_{m,n}$ merupakan ruang dari matriks kompleks m x n , dimana $A,B \in M_{n,n}$ dan merupakan product Hadamard (atau Schur) dari A dan B oleh AoB, Untuk $A \in M_{n,n}$ maka $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \sigma_3(A) \geq \ldots \geq \sigma_{\min[m,n]}(A)$ merupakan nilai singular terurut dan menyusut terurut menurut baris Euclidean dan panjang kolom dari A terhadap $r_1(A) \geq r_2(A) \geq \ldots r_m(A) \geq$ dan $c_1(A) \geq c_2(A) \geq \ldots c_n(A)$

Akan ditunjukkan bahwa untuk suatu $A , B \in M_{n,n}$ berlaku hubungan

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} \min\{ c_i(A), r_i(A)\} \sigma_i(B)$$, *dengan k = 1 , 2 , ….. , min { m,n }*

2. Permasalahan dan Perumusannya

Misalkan $M_{m,n}$ merupakan ruang matriks kompleks $M_n = M_{m,n}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}$ product Hadamard dari A dan B didefinisikan sebagai AoB = $[a_{ij}b_{ij}]$ Nilai singular dari $A \in M_{m,n}$ dalam derajat naik $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)}(A)$ yang merupakan derajat turun Hadamard dari panjang baris dan kolom dari matriks $A \in M_{m,n}$ oleh $r_1(A) \geq r_2(A) \geq \ldots\ldots \geq r_m(A)$ pada $c_1(A) \geq c_2(A) \geq \ldots\ldots\ldots \geq c_n(A)$

dengan $r_k(A)$ nilai terbesar ke k dari

$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$, i = 1 , 2 , … , m dan $c_k(A)$ *merupakan* nilai terbesar ke k

dari $\left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$, j = 1,2,…, n

A Horn dan C.R. Johnson , memformulasikan ketaksamaan bentuk

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(AoB) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i A^{\alpha} r_i(A)^{1-\alpha} \sigma_i(B) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Yang berlaku pada $0 \leq \alpha \leq 1$ dan k = 1,2, … , min {m,n} dan hanya bernilai α dari persamaan [1] untuk α = 0 , ½, dan 1 .

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk merumuskan hasil ketaksamaan ketaksamaan nilai singular pada product Hadamard dianlisa dari teorema dan lemma berikut :

a. **Teorema :** Untuk suatu

$$A, B \in M_{m,n},\ \sum_{i=1}^{k}\sigma_i(AoB) \le \sum_{i=1}^{k}\min\{c_i(A), r_i(A), \sigma_i(B) \qquad ....[2]$$

$k = 1, 2, \ldots, \min\{m,n\}$

Untuk matriks yang non persegi [$m \neq n$] dapat dijadikan dalam bentuk matriks lengkap [augmanted] pada suatu matriks persegi tanpa blok dan untuk matriks Hermitian $H, G \in M_{m,n}$ dapat ditulis $H \le G$ dengan $G - H$ merupakan semi definit positip dan dari penelusuran lebih lanjut diperoleh hubungan pada Lemma 2 berikut :

b. **Lemma 2** . Untuk sutau $A, B \in M_{m,n}$, diperoleh hubungan :

$a)$ $(AoB)(AoB)^* \le \sigma_1(B)^2 I \text{ o } (AA^*)$,

b) $(AoB)^*(A0B) \le \sigma_1(B)^2 I \text{ o } (A^*A)$,

c) $\sigma_1(AoB) \le \min\{c_i(A), r_i(A)\}\sigma_i(B)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

c. **Bukti :** Dari analisa yang dilakukan oleh **A . Horn** [1990] diperoleh

$$(AoB)(AoB^*) \le (AA\ )o(BB^*) \qquad ....[3]$$

Untuk semua $A, B \in M_n$

Karena $BB^* \le \sigma_1(B)^2 I$,

Akibat dari teorema hasil kali Schur diperoleh

$$(AA^*)(BB^*) \le (AA^*)\text{ o }\{\sigma_1(B)^2 I\} \qquad ....[4,$$

Kombinasi dari [3] dan [4] menghasilkan :

Pengembalian A dan B dalam 1) adjoint A dan B yang ditentukan

2) jika $0 \le X \le Y$ maka $\sigma_i(X) \le \sigma_i(Y)$

$I = 1, 2, ...$

(A. Horn dan C.R. Johnson , (1985)

d. **Lemma 3** , Misalkan $A \in M_n$ dan $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ..... \ge \alpha_n$, dan

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\,o\,B) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sigma_1(B),$$

$k = 1, 2, .., n$, untuk semua $B \in M_n$ maka

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\text{ o }B) \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sigma_i(B)\ ,\ k = 1, 2, \ldots, n \text{ untuk semua } B \in M_n$$

e. **Bukti :** Suatu matriks

$K \in M_n$ dinamakan suatu rank / tingkatan r partial isometry jika

$\sigma_1(K) = ... = \sigma_r(K) = 1$ dan $\sigma_{r+1}(K) = ... = \sigma_n(K) = 0$

Untuk $c_i(X)\, c_i(Y)$ ditransformasikan oleh α_i ditunjukan oleh

$\left|tr[(AoK_r)K_s\right| \le \sum_{i=1}^{\min(r,n)}\alpha_i$ untuk suatu isometry partial $K_r, K_s \in M_n$

Pada rank r dan s

Pembuktian yang terkait dengan kasus persegi $m = n$ telah diaplikasikan pada lemma 3 dengan $0 \le \alpha \le 1$, $\min\{c_i(A), r_i(A)\} \le c_i(A)^{\alpha} r_i(A)^{1-\alpha}$

Sebagai ilustrasi dapat ditinjau untuk $A = I_2$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Daftar Pustaka

1. T. ANDO, R. A. HORN, AND C. R. JOHNSON, *The singular values of a Hadamard product : A basic inequality*. Linear and Multilinear Algebra, 21 (1987), pp. 345-365
2. R. A. HORN, *The Hadamard product*, in matrix Theory and Applications, Proceedings of Applied Mathematics. Vol.40, C.R. Johnson, ed. AMS, Providence, RI, 1990.
3. R.A. HORN AND C.R. JOHNSON, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.
4. R.A.HORN AND C.R. JOHNSON, *Hadamard and conventional submultiplicativity for unitarily invariant norms on matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 20 (1987), pp 91-106.
5. R.A.HORN AND C.R.JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York,1985