KELUARGA METODE ITERASI ORDE EMPAT UNTUK MENCARI AKAR GANDA PERSAMAAN NONLINEAR

Kiki Reski Ananda[1*], Khozin Mu'tamar[2]

[1,2]Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya, Pekanbaru 28293

*reskiananda.kiki@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article presents a new family iterative method for finding a multiple root of nonlinear equation with known multiplicity. Analytically it is showed using a Taylors expansion, geometric series, and binomial series that the iterative method has fourth order of convergence. Two particular cases of the proposed method are also considered. Four numerical examples are given to show the performance of the presented method compared with some known methods.

Keywords: Nonlinear equation, orde of convergence, multiple root, iterative methods

ABSTRAK

Artikel ini mendiskusikan tentang keluarga baru metode iterasi untuk mencari akar ganda dari persamaan nonlinear dengan multiplisitas diketahui. Secara analitik dengan menggunakan ekspansi Taylor, deret geometri, dan deret binomial ditunjukkan bahwa metode iterasi yang diusulkan mempunyai orde kekonvergensi empat. Dua kasus khusus dari metode ini juga dibahas. Beberapa contoh numerik diberikan untuk melihat performa dari metode yang dibahas dan kemudian dibandingkan dengan beberapa metode yang sudah dikenal.

Kata kunci: Persamaan nonlinear, orde konvergensi, akar ganda, metode iterasi

1. PENDAHULUAN

Secara umum permasalahan yang sering dijumpai dalam ilmu matematika adalah mencari akar dari suatu persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Adakalanya dalam mencari suatu akar persamaan tersebut akan sulit menggunakan metode analitik, sehingga salah satu caranya dengan menggunakan metode numerik. Banyak metode numerik yang digunakan untuk mencari akar sederhana atau akar ganda dari suatu persamaan nonlinear.

Metode numerik untuk mencari akar sederhana akan sangat lambat jika digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear yang berakar ganda, sehingga diperlukan modifikasi untuk mengatasi hal ini. Salah satu metode numerik yang dimodifikasi untuk akar ganda adalah metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik yang dijelaskan oleh Ralston dan Rabinowits [4, h. 354] yang bentuk iterasinya adalah

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$ dan m adalah bilangan multiplisitas akar. Selain modifikasi metode Newton terdapat beberapa metode lain untuk mencari akar ganda, diantaranya metode Halley yang dikembangkan oleh Hansen dan Patrick [2] dengan orde konvergensi tiga.

Pada artikel ini di bagian dua dibahas keluarga metode iterasi dengan orde konvergensi empat untuk mencari akar ganda yang merupakan tinjauan ulang dari sebagian artikel Singh dan Jaiswal [7]. Kemudian dilanjutkan di bagian tiga dengan melakukan uji komputasi menggunakan empat persamaan nonlinear.

2. KELUARGA METODE ITERASI ORDE EMPAT

Diberikan skema keluarga metode iterasi untuk mencari akar ganda dengan menggunakan fungsi bobot:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_n &=& x_n - a\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &=& x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}F(P), \end{array}\right\} \tag{1}$$

dengan $F(P)$ merupakan sebuah fungsi dengan

$$P = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{af'(x_n)}, \tag{2}$$

dan a suatu parameter yang ditentukan. Jika $a = \frac{2}{3}$, maka metode pada persamaan (1) menjadi metode Chun et al. [1] untuk mencari akar sederhana.

Kekonvergenan metode iterasi pada persamaan (1) disajikan pada Teorema 1.

Teorema 1 (Orde Konvergensi) Misalkan F suatu fungsi, $f : D \to \mathbb{R}$ terdiferensial secukupnya pada interval buka D dan $\alpha \in D$ adalah akar ganda dengan multiplisitas m. Misalkan $a \in \mathbb{R}$, jika x_0 cukup dekat dengan α, maka metode iterasi yang didefinisikan oleh persamaan (1) memiliki orde konvergensi empat dengan syarat $F(u) = m, F'(u) = \frac{1}{2}m^{4-m}, F''(u) = m^{6-2m}(2+m)^{m-1}$ dan memenuhi persamaan *error*

$$\begin{aligned} e_{n+1} =& \frac{1}{3m^{12}m!}(2+m)^{-2-3m}(m-1)!\bigg(m^8(m+2)^{3m}\big(3c_3m^6 - 3c_1c_2m^4(m+2)^2 \\ &+ c_1^3(m+2)^2(12 - 2m + 2m^2 + 2m^3 + m^4)\big) - 4c_1^3m^{3m}(2+m)^5 \\ &\times F^{(3)}(u)\bigg)e_n^4 + O(e_n^5), \end{aligned}$$

dengan

$$u = \frac{m(2+m) - m^m(2+m)^{2-m}}{2m^2}.$$

Bukti. Misalkan α adalah akar ganda dari fungsi $f(x) = 0$ dengan bilangan multiplisitas m. Asumsikan $e_n = x_n - \alpha$, kemudian dengan melakukan ekspansi Taylor dari $f(x)$ di sekitar $x = \alpha$ dan dievaluasi di titik $x = x_n$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$ untuk $j \geq m+5$ diperoleh

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_n^m \big(1 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4\big) + O(e_n^5). \tag{3}$$

dengan $c_j = \frac{m! f^{(m+j)}(\alpha)}{(m+j)! f^{(m)}(\alpha)}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Kemudian dilakukan ekspansi Taylor terhadap $f'(x)$ di sekitar $x = \alpha$ dan dievaluasi di titik $x = x_n$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$ untuk $j \geq m+5$, diperoleh

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{m-1} \big(1 + d_1 e_n + d_2 e_n^2 + d_3 e_n^3 + d_4 e_n^4\big) + O(e_n^5). \tag{4}$$

dengan $d_j = \frac{(m-1)!}{(m+j-1)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Selanjutnya $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dihitung menggunakan persamaan (3) dan persamaan (4), sehingga dengan menggunakan deret geometri diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =& \frac{e_n}{m} - \frac{c_1 e_n^2}{m^2} + \frac{(-2c_2 m + c_1^2(1+m))e_n^3}{m^3} \\ & - \frac{(3c_3 m^2 + c_1^3(1+m^2) - c_1 c_2 m(4+3m))e_n^4}{m^4} + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{5}$$

Kemudian persamaan (5) disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned} y_n = \alpha +& (1 - \frac{a}{m})e_n + \frac{a c_1 e_n^2}{m^2} - \frac{a(-2c_2 m + c_1^2(1+m))e_n^3}{m^3} \\ & - \frac{a(3c_3 m^2 + c_1^3(1+m^2) - c_1 c_2 m(4+3m))e_n^4}{m^4} + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya misalkan $E_n = y_n - \alpha$ dan dilakukan ekspansi Taylor terhadap $f(x)$, $f'(x)$ di sekitar $x = \alpha$ dan dievaluasi di titik $x = y_n$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(y_n - \alpha)^j$ untuk $j \geq m+5$, berturut turut diperoleh

$$f(y_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} E_n^m \left(1 + c_1 E_n + c_2 E_n^2 + c_3 E_n^3 + c_4 E_n^4\right) + O(E_n^5), \tag{7}$$

dan

$$f'(y_n) = \frac{f^m(\alpha)}{(m-1)!} E_n^{m-1}(1 + d_1E_n + d_2E_n^2 + d_3E_n^3 + d_4E_n^4) + O(e_n^5). \tag{8}$$

Selanjutnya karena $E_n = y_n - \alpha$ dan nilai y_n diketahui pada persamaan(6), maka diperoleh nilaiE_n yaitu

$$\begin{aligned} E_n = \left(1-\frac{a}{m}\right)e_n\Bigg(1+\left(1-\frac{a}{m}\right)\bigg(\frac{ac_1e_n}{m^2} - \frac{a(-2c_2m + c_1^2(1+m))e_n^2}{m^3} \\ - \frac{a(3c_3m^2 + c_1^3(1+m)^2 - c_1c_2m(4+3m))e_n^3}{m^4}\bigg)\Bigg) + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{9}$$

Selanjutnya dihitung $(E_n)^{m-1}$ dan dengan menggunakan deret binomial diperoleh

$$E_n^{m-1} = e_n^{m-1}(Q_1 + Q_2e_n + Q_3e_n^2 + Q_4e_n^3 + Q_5e_n^4) + O(e_n^5), \tag{10}$$

dengan

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-1}, \\ Q_2 &= \left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-2} m^2ac_1(-1+m), \\ Q_3 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-3} m^3a\big(-3\,ac_1{}^2 + 4\,c_2m^2 - 4\,ac_2m + 2\,c_1{}^2 - 4\,c_2m \\ &\quad + 4\,ac_2 + 3\,ac_1{}^2m - 2\,c_1{}^2m^2\big), \\ Q_4 &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-4} m^5a\big(-18\,a^2c_3m + 13\,m^2a^2c_1{}^3 - a^2c_1{}^3 - 12\,a^2c_1{}^3m \\ &\quad - 30\,a^2c_1c_2m^2 + 30\,a^2c_2c_1m + 18\,a^2c_3m^2 + \cdots + 6\,m^4c_1{}^3 - 18\,c_3m^3\big), \\ Q_5 &= \frac{1}{24}\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-5} m^8a^2\big(-72\,a^2c_2c_1{}^2m^2 - 216\,a^2c_3c_1m^3 - 120\,ac_2c_1{}^2m^3 \\ &\quad + 432\,ac_3c_1m^4 + \cdots + 24\,a^2c_1{}^4\big). \end{aligned}$$

Kemudian persamaan (9) dan (10) disubstitusikan ke persamaan (8) setelah disederhanakan diperoleh

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{m-1}(Q_1 + T_1e_n + T_2e_n^2 + T_3e_n^3 + T_4e_n^4) + O(e_n^5), \tag{11}$$

dengan nilai Q_1 seperti pada persamaan (10) dan

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-2} m^2\left(d_1m^2-2\,d_1ma+ac_1m-ac_1+d_1a^2\right),\\
T_2 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-3} m^4\big(3\,m^2a^2{c_1}^2-3\,a^2{c_1}^2m-8\,d_2m^3a+12\,d_2m^2a^2\\
&\quad+4\,am^3c_2+\cdots+2\,d_1a^3c_1m\big),\\
T_3 &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-4} m^6\big(90\,d_3a^4m^2-36\,d_3a^5m+6\,d_2a^5c_1+6\,d_3a^6+6\,m^6d_3\\
&\quad-18\,a^3c_3m^2+\cdots+3\,d_1a^4{c_1}^2m\big),\\
T_4 &= \frac{1}{24}\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-5} m^8\big(72\,a^4c_3c_1m^4-576\,a^3c_2{c_1}^2m^4+144\,a^2c_1c_3m^4\\
&\quad-144\,a^4c_2{c_1}^2m^4+192\,a^2c_2{c_1}^2m^4+\cdots-96\,m^6d_1ac_2c_1\big).
\end{aligned}
$$

Kemudian persamaan (8) dan (11) disubstitusikan ke persamaan (2) diperoleh

$$P = H_1 + H_2e_n + H_3e_n^2 + H_4e_n^3 + H_5e_n^4 + O(e_n^5), \tag{12}$$

dengan

$$
\begin{aligned}
H_1 =& \frac{1-\left(1-\frac{a}{m}\right)^{m-1}}{a},\\
H_2 =& \frac{-c_1(m(-2+a)+a)\left(1-\frac{a}{m}\right)^m}{m(m-a)^2},\\
H_3 =& \frac{1}{2m^2\left(-m+a\right)^3}\left(\left(1-\frac{a}{m}\right)^m\bigg(2\,a^3c_2m+4\,a^3c_2+4\,m^2a^2{c_1}^2+6\,a^2m{c_1}^2\right.\\
&+2\,a^2{c_1}^2-16\,a^2c_2m-8\,a^2c_2m^2-15\,am^2{c_1}^2+6\,am^3c_2\\
&\left.-3\,m^3a{c_1}^2+24\,ac_2m^2-6\,am{c_1}^2-12\,m^3c_2+6\,m^3{c_1}^2+6\,m^2{c_1}^2\bigg)\right),\\
H_4 =& -\frac{1}{6m^3\left(-m+a\right)^4}\left(\left(1-\frac{a}{m}\right)^m\bigg(-24\,m^5{c_1}^3-48\,m^4{c_1}^3+96\,m^4c_2c_1\right.\\
&\left.+24\,a^4c_1c_2-108\,a^4c_3m+270\,a^3c_3m^2+\cdots+18\,a^5c_3+6\,a^3{c_1}^3\bigg)\right),\\
H_5 =& \frac{1}{24\left(-m+a\right)^5m^4)}\left(\left(-\frac{-m+a}{m}\right)^m\bigg(-2400\,a^4c_2{c_1}^2m^2-5616\,a^3c_3c_1m^3\right.\\
&+2016\,a^3c_2{c_1}^2m^2-1248\,m^6a^2c_2{c_1}^2+1404\,m^5a^3c_2{c_1}^2+4848\,m^5ac_2{c_1}^2\\
&\left.+6024\,a^3c_2{c_1}^2m^3+\cdots+288\,m^7{c_2}^2+24\,m^8{c_1}^4\bigg)\right).
\end{aligned}
$$

Misalkan $u = H_1$ dan $v = H_2e_n + H_3e_n^2 + H_4e_n^3 + H_5e_n^4 + O(e_n^5)$, sehingga persamaan

(12) ditulis

$$P = u + v. \tag{13}$$

Kemudian dengan melakukan ekspansi Taylor dari $F(x)$ disekitar $x = u$ dan divaluasi di titik $x = P$ dengan mengabaikan suku yang memuat $(P-u)^n$ untuk $n \geq 4$ diperoleh

$$\begin{aligned} F(P) = F(u) &+ F'(u)(P-u) + \frac{1}{2!}F''(u)(P-u)^2 + \frac{1}{3!}F^{(3)}(u)(P-u)^3 \\ &+ \frac{1}{4!}F^{(4)}(u)(P-u)^4. \end{aligned} \tag{14}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (5), (14) dan $x_n = e_n - \alpha$ ke dalam persamaan (1) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + K_1 e_n + K_2 e_n^2 + K_3 e_n^3 + K_4 e_n^4 + O(e_n^5), \tag{15}$$

dengan

$$\begin{aligned}
K_1 =& 1 - \frac{F(u)}{m}, \\
K_2 =& \frac{1}{m^2}\left[c_1\left(F(u) + \frac{(m(-2+a)+a)\left(1-\frac{a}{m}\right)^m F'(u)}{(m-a)^2}\right)\right], \\
K_3 =& -\frac{1}{2m^3}\Bigg(2(-2c_2 m + c_1^2(1+m))F(u) + \frac{1}{(m-a)^4} \\
& \times \left(1-\frac{a}{m}\right)^m \Big((m-a)\big(c_1^2(-2m^2(5+3m) + m\big(12+m(17+3m)\big)a \\
& - 4(1+m)^2 a^2) + 2c_2(6m^3 - 3m^2(4+m)a + 4m(2+m)a^2 \\
& - (2+m)a^3)\big)F'(u) + c_1^2(m(-2+a)+a)^2 \\
& \times \left(1-\frac{a}{m}\right)^m F''\left(\frac{1-(1-\frac{a}{m})^{m-1}}{a}\right)\Big)\Bigg), \\
K_4 =& \frac{1}{6m^4}\Bigg(6(3c_3m^2 + c_1^3(1+m)^2 - c1c2(4+3m)) \\
& \times F(u) + \frac{1}{(m-6)}\left(1-\frac{a}{m}\right)^m\Big((m-a)^2\big(6c_3(m-a)^2 \\
& \times (-12m^3 + 6m^2(3+m)a - 4m(3+m)a^2 + (3+m)a^3\big) \\
& + c_1^3\big(-6m^3(1+m)(9+4m) + 3m^2(34+m(77 \\
& + 3(1+m)^2(6+7m)a^3\big) + 6c_1c2\big(2m^4(13+6m) \\
& - m^3(68+m(55+6m))a + m^2(68+m(75+16m))a^2 \\
& - m(32+3m(13+4m))a^3 + (2+m)(3+2m)a^4\big)\big)F'(u) \\
& + c_1(m(-2+a)+a)(1-\frac{a}{m})^m\Big(3(m-a)\big(c_1^2\big(-2m^2(4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+3m)+m(9+m(16+3m))a-(1+m)(3+4m)a^2\big)\\
&+2c_2(6m^3-3m^2(4+m)a+4m(2+m)a^2-(2+m)a^3)\big)\\
&\times F''(u)+c_1^2(m(-2+a)+a)^2(1-\frac{a}{m})^m F^{(3)}(u)\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Karena $e_{n+1}=x_{n+1}-\alpha$ maka persamaan (15) dapat ditulis

$$e_{n+1}=K_1e_n+K_2e_n^2+K_3e_n^3+K_4e_n^4+O(e_n^5), \tag{16}$$

Untuk mendapatkan metode iterasi dengan orde konvergensi empat, haruslah $K_1=K_2=K_3=0$. Dari syarat $K_1=0$ diperoleh $F(u)=m$, dengan $u=\frac{m(2+m)-m^m(2+m)^{2-m}}{2m^2}$ diperoleh $a=\frac{2m}{m+2}$. Selanjutnya untuk $K_2=0$, $K_3=0$ diperoleh $F'(u)=\frac{1}{2}m^{4-m}$ dan $F''(u)=m^{6-2m}(2+m)^{m-1}$. Kemudian nilai $a, F(u), F'(u)$ dan $F''(u)$ disubtitusikan ke persamaan (16), diperoleh

$$
\begin{aligned}
e_{n+1}=&\frac{1}{3m^{12}m!}(2+m)^{-2-3m}(m-1)!\Big(m^8(m+2)^{3m}\big(3c_3m^6-3c_1c_2m^4(m+2)^2\\
&+c_1^3(m+2)^2(12-2m+2m^2+2m^3+m^4)\big)-4c_1^3m^{3m}(2+m)^5\\
&\times F^{(3)}\left(\frac{m(2+m)-m^m(2+m)^{2-m}}{2m^2}\right)\Big)e_n^4+O(e_n^5),
\end{aligned} \tag{17}
$$

sehingga Teorema 1 telah terbukti. ■

Persamaan (17) merupakan persamaan *error* untuk metode iterasi yang diberikan oleh persamaan (1). Dari definisi persamaan *error* [5] dilihat bahwa metode iterasi tersebut memiliki orde konvergensi empat.

Kasus Khusus

Selanjutnya diamati dua kasus khusus yang tergantung pada pemilihan $F(x)$.

Kasus Pertama. Misalkan diketahui $F(x)=Ax^2+Bx+C$, sehingga $F'(x)=2Ax+B$ dan $F''(x)=2A$. Untuk $x=u$, akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
F(u)&=Au^2+Bu+C,\\
F'(u)&=2Au+B,\\
F''(u)&=2A.
\end{aligned}
$$

Kemudian jika $F(u), F'(u)$ dan $F''(u)$ didefinisikan pada Teorema 1, maka diperoleh solusi dari persamaan $F(x)=Ax^2+Bx+C$ yaitu

$$
\begin{aligned}
A=&\frac{1}{2}m^{6-2m}(2+m)^{-2+2m},\\
B=&\frac{1}{2}m^{4-2m}(2+m)^{-1+m}(-m(2+m)^m+m^m(3+m)),\\
C=&\frac{1}{8}m(8+m^{1-2m}(m^m(2+m)-m(2+m)^m)\times(-m(2+m)^m\\
&+m^m(4+m))).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dari persamaan (1) dan untuk $F(x) = Ax^2 + Bx + C$ diperoleh bentuk baru dari metode iterasi orde empat untuk akar ganda yaitu

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \tfrac{2m}{2+m}\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \left[A\left(\tfrac{f'(x_n)-f'(y_n)}{\frac{2m}{m+2}f'(x_n)}\right)^2 + B\left(\tfrac{f'(x_n)-f'(y_n)}{\frac{2m}{m+2}f'(x_n)}\right) + C\right]\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Persamaan (18) disebut metode OMK1 dan persamaan *error*-nya adalah

$$\begin{aligned} e_{n+1} =& \frac{1}{3m^5(2+m)^2}\big(3c_3m^6 - 3c_1c_2m^m(2+m)^2 + c_1^3(2+m)^2\big(12 \\ & + m(-2+m(2+m(2+m))))\big)e_n^4\big) + O(e_n^5) \end{aligned}$$

Kasus Kedua. Misalkan diketahui $F(x) = Ax + \frac{B}{x} + C$, sehingga $F'(x) = A - \frac{B}{x^2}$, dan $F''(x) = \frac{2B}{x^3}$. Untuk $x = u$, akan diperoleh

$$\begin{aligned} F(u) &= Au + \frac{B}{u} + C, \\ F'(u) &= A - \frac{B}{u^2}, \\ F''(u) &= \frac{2B}{u^3}. \end{aligned}$$

Selanjutnya jika $F(u), F'(u)$ dan $F''(u)$ didefinisikan pada Teorema 1, maka diperoleh solusi dari persamaan $F(x) = Ax + \frac{B}{x} + C$ yaitu

$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{4}m^{5-2m}(2+m)^{-1+m}(-m^m + (2+m)^m), \\ B =& \frac{1}{16}m^{-2m}(2+m)^{1-m}(-m^m(2+m) + m(2+m)^m)^3, \\ C =& \frac{1}{4}m(4 - m^{1-2m}(m^m(1+m) - m(2+m)^m)(m^m(2+m) - m(2+m)^m)), \end{aligned}$$

Selanjutnya dari persamaan (1) dan untuk $F(x) = \frac{A}{x} + \frac{1}{B+Cx}$ diperoleh bentuk baru dari metode iterasi orde empat untuk akar ganda yaitu

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \tfrac{2m}{2+m}\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \left[A\left(\tfrac{f'(x_n)-f'(y_n)}{\frac{2m}{m+2}f'(x_n)}\right) + \frac{B}{\left(\frac{f'(x_n)-f'(y_n)}{\frac{2m}{m+2}f'(x_n)}\right)} + C\right]\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Persamaan (19) disebut metode OMK2 dan persamaan *error*-nya adalah

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} =& \frac{1}{3m^{13}m}(2+m)^{-2-3m}\Bigg(m^8(m+2)^{3m}\big(3c_3m^6 - 3c_1c_2m^4(m+2)^2 \\
&+ c_1^3(m+2)^2(12-2m+2m^2+2m^3+m^4)\big) \\
&+ \frac{24c_1^3m^{8+m}(2+m)^{2+3m}}{(m(2+m)^m - m^m(2+m))}\Bigg)e_n^4 + O(e_n^5)
\end{aligned} \tag{20}
$$

3. CONTOH NUMERIK

Pada bagian ini, dilakukan uji komputasi dengan menggunakan Metode Newton (MN) , metode Zhou (MZ) [8], metode Sharma (MS) [6], metode OMK1, dan metode OMK2. Berikut adalah persamaan nonlinear dan multiplisitas akar yang digunakan dalam membandingkan metode yang telah disebutkan.

1. $f_1(x) = (\cos(x) - x)^3,$ $\quad m = 3,$
2. $f_2(x) = (1 - xe^{(1-x)}),$ $\quad m = 2,$
3. $f_3(x) = (8xe^{(-x^2)} - 2x - 3)^8,$ $\quad m = 8,$
4. $f_4(x) = x^2e^x - \sin(x) + x,$ $\quad m = 2.$

Untuk melakukan uji komputasi dari contoh-contoh persamaan nonlinear di atas digunakan program Maple 13 dengan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk semua metode, di antaranya yaitu:

1. Nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
2. Selisih nilai mutlak antara dua akar hampiran yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
3. Jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi.

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi dari beberapa metode iterasi

f_i	x_0	Metode	$n+1$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	COC
f_1	1.5	MN	8	$9.69325e-770$	$1.11493e-128$	2.00
		MZ	4	$1.20417e-543$	$1.01651e-45$	4.00
		MS	4	$6.55430e-546$	$6.67056e-46$	4.00
		OMK1	4	$1.20417e-543$	$1.01651e-45$	4.00
		OMK2	4	$7.06046e-543$	$1.17267e-45$	4.00
	2.5	MN	9	$3.59346e-849$	$6.43803e-142$	2.00
		MZ	5	$1.09417e-698$	$1.22173e-58$	4.00
		MS	5	$3.00474e-705$	$3.51509e-59$	4.00
		OMK1	5	$1.09417e-698$	$1.22173e-58$	4.00
		OMK2	5	$2.10537e-696$	$1.88532e-58$	4.00

f_i	x_0	Metode	$n+1$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$	COC
f_2	0.0	MN	9	$8.44198e-548$	$3.51099e-137$	2.00
		MZ	5	$8.41668e-944$	$2.73666e-118$	4.00
		MS	5	$3.51845e-1057$	$2.07362e-132$	4.00
		OMK1	5	$8.41668e-944$	$2.73666e-118$	4.00
		OMK2	5	$5.47663e-897$	$1.83819e-112$	4.00
	0.5	MN	9	$9.50708e-826$	$1.14375e-206$	2.00
		MZ	5	$7.32009e-1476$	$8.50438e-185$	4.00
		MS	5	$1.49091e-1604$	$7.85447e-201$	4.00
		OMK1	5	$7.32009e-1476$	$8.50438e-185$	4.00
		OMK2	5	$4.92762e-1420$	$7.64990e-178$	4.00
f_3	0.5	MN	16	$4.13807e-884$	$4.36665e-56$	2.00
		MZ	6	$2.01148e-1634$	$1.07301e-51$	4.00
		MS	6	$1.50648e-1638$	$8.02836e-52$	4.00
		OMK1	6	$2.01148e-1634$	$1.07301e-51$	4.00
		OMK2	6	$7.98108e-1634$	$1.11913e-51$	4.00
	-3.5	MN	8	$2.63141e-885$	$3.67587e-56$	2.00
		MZ	5	$1.58777e-1889$	$1.14457e-59$	4.00
		MS	5	$3.22686e-1894$	$8.22176e-60$	4.00
		OMK1	5	$1.58777e-1889$	$1.14457e-59$	4.00
		OMK2	5	$7.61693e-1889$	$1.20087e-59$	4.00
f_4	1.0	MN	10	$8.89738e-790$	$7.15084e-198$	2.00
		MZ	5	$1.46155e-632$	$1.23356e-79$	4.00
		MS	5	$1.38301e-707$	$5.61834e-89$	4.00
		OMK1	5	$1.46155e-632$	$1.23356e-79$	4.00
		OMK2	5	$2.00678e-600$	$1.22879e-75$	4.00
	1.1	MN	10	$4.73464e-730$	$6.10750e-183$	2.00
		MZ	5	$2.93074e-580$	$4.25532e-73$	4.00
		MS	5	$4.20787e-653$	$3.63088e-82$	4.00
		OMK1	5	$2.93074e-580$	$4.25532e-73$	4.00
		OMK2	5	$2.19664e-549$	$2.94703e-69$	4.00

Berdasarkan Tabel 1 semua metode yang dibandingkan berhasil menemukan akar pendekatan yang diharapkan dari keempat contoh fungsi yang diberikan. Kemudian dapat dilihat MN memerlukan jumlah iterasi yang lebih banyak dibandingkan dengan metode pembanding lainnya. Secara keseluruhan dapat dilihat bahwa OMK1, OMK2 memerlukan jumlah iterasi yang sama dibandingkan dengan MZ dan MS, tetapi OMK1 mempunyai nilai fungsi yang relatif sama dengan MZ dan lebih besar dibandingkan dengan MS. Jadi OMK1 dan OMK2 dapat dijadikan metode alternatif untuk mencari akar ganda dari persamaan nonlinear.

DAFTAR PUSTAKA

[1] C. Chun, M. Y. Lee, B. Neta dan J. Dzunic, *On optimal fourth order iterative methods free from second derivative and their dynamics*, Appl. Math. Comput., 218 (2012), 6427–6438.

[2] E. Hansen dan M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numerical Mathematics, 27 (1977), 257–259.

[3] J. H. Mathews dan K. D. Fink *Numerical Method Using MATLAB, Third Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

[4] A. Ralston dan P. Rabinowits, *A First Course in Numerical Analysis, Second Edition*, Mc Graw-Hill, New York, 1978.

[5] J. R. Sharma dan R. K. Guha, *Some modified Newton's methods with fourth-order convergence*, Advances in Applied Science Research, 2 (2011), 240–247.

[6] J.R. Sharma dan R. Sharma *Modified Jarratt method for computing multiple roots*, Applied Mathematics Computation., 217 (2010), 878–881.

[7] A. Singh dan J. P. Jaiswal, *An efficient family of optimal fourth order iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations*, Proc. Natl. Acad. Sci., Scct. A Phys. Sci., 85 (2015), 439–450.

[8] X. Zhou, X. Chen, dan Y. Song *Constructing higher-order methods for obtaining the multiple roots of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011), 4199–4206.